APPLICATION LINÉAIRE EN DIMENSION FINIE

Ce chapitre est l'aboutissement de toutes les notions d'algèbre linéaire vues jusqu'ici : espaces vectoriels, dimension, applications linéaires, matrices. Nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène à l'étude des matrices, ce qui facilite les calculs.

1. Rang d'une application linéaire

Lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire et que E est de dimension finie, la théorie de la dimension fournit de nouvelles propriétés très riches pour l'application linéaire f.

1.1. Construction et caractérisation.

Une application linéaire $f : E \to F$, d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel quelconque, est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel E de départ. C'est ce qu'affirme le théorème suivant :

Théorème 1 (Construction d'une application linéaire)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie n et que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Alors pour tout choix $(v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$f(e_i) = v_i.$$

Le théorème ne fait aucune hypothèse sur la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée F.

Exemple 1. Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}[X]$ telle que $f(e_i) = (X+1)^i$ pour $i = 1, \dots, n$ (où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i (X+1)^i.$$

Démonstration.

— *Unicité.* Supposons qu'il existe une application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Pour $x \in E$, il existe des scalaires $x_1, x_2, \dots, x_n$ uniques tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme f est linéaire, on a

$$(*) \qquad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Donc, si elle existe, f est unique.

— *Existence.* Nous venons de voir que s'il existe une solution c'est nécessairement l'application définie par l'équation $(*)$. Montrons qu'une application définie par l'équation $(*)$ est linéaire et vérifie $f(e_i) = v_i$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ (resp. $y = (y_1, \dots, y_n)$) sont les coordonnées de x (resp.

y) dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x+\mu y) &= f\left(\sum_{i=1}^n(\lambda x_i+\mu y_i)e_i\right)=\sum_{i=1}^n(\lambda x_i+\mu y_i)f(e_i)\\ &= \lambda\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)+\mu\sum_{i=1}^n y_i f(e_i)=\lambda f(x)+\mu f(y). \end{aligned}$$

Enfin les coordonnées de e_i sont $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (avec un 1 en i-ème position), donc $f(e_i)=1\cdot v_i=v_i$. Ce qui termine la preuve du théorème.

□

1.2. **Rang d'une application linéaire.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f : E\to F$ une application linéaire. On rappelle que l'on note $f(E)$ par $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f=\big\{f(x)|x\in E\big\}$. $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 1. Si E est de dimension finie, alors :
— $\operatorname{Im} f=f(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie.
— Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.
La dimension de cet espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est appelée ***rang de f*** :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f)=\dim\operatorname{Im} f=\dim\operatorname{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que tout élément de $\operatorname{Im} f$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1),\dots,f(e_n)$.

Soit y un élément quelconque de $\operatorname{Im} f$. Il existe donc un élément x de E tel que $y=f(x)$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, il existe des scalaires $(x_1,\dots,x_n)$ tels que $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$. En utilisant la linéarité de f, on en déduit que $y=f(x)=\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple 2. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z)=(3x-4y+2z,2x-3y-z)$. Quel est le rang de f ?

Si on note $e_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $e_3=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, alors (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit de trouver le rang de la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$:

$$v_1=f(e_1)=f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right),\quad v_2=f(e_2)=f\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-4\\-3\end{smallmatrix}\right),\quad v_3=f(e_3)=f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)$$

ou, ce qui revient au même, trouver le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&-4&2\\2&-3&-1\end{pmatrix}.$$

Commençons par estimer le rang sans faire de calculs.
— Nous avons une famille de 3 vecteurs donc $\operatorname{rg} f\leqslant 3$.
— Mais en fait les vecteurs v_1,v_2,v_3 vivent dans un espace de dimension 2 donc $\operatorname{rg} f\leqslant 2$.
— f n'est pas l'application linéaire nulle (autrement dit v_1,v_2,v_3 ne sont pas tous nuls) donc $\operatorname{rg} f\geqslant 1$.

Donc le rang de f vaut 1 ou 2. Il est facile de voir que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, donc le rang est 2 :

$$\operatorname{rg} f=\operatorname{rg}\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)=\dim\operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3)=2$$

Remarque : il est encore plus facile de voir que le rang de la matrice A est 2 en remarquant que ses deux seules lignes ne sont pas colinéaires.

1.3. **Théorème du rang.** Le théorème du rang est un résultat fondamental dans la théorie des applications linéaires en dimension finie.

On se place toujours dans la même situation :
— $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,
— E est un espace vectoriel de dimension finie,
— le ***noyau*** de f est $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$; c'est un sous-espace vectoriel de E, donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension finie,
— l'***image*** de f est $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$; c'est un sous-espace vectoriel de F et est de dimension finie.

Le théorème du rang donne une relation entre la dimension du noyau et la dimension de l'image de f.

Théorème 2 (Théorème du rang)**.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Alors

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Autrement dit : $\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f}$

Dans la pratique, cette formule sert à déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.

Exemple 3. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & & \longmapsto & (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4) \end{array}$$

Calculons le rang de f et la dimension du noyau de f.

— **Première méthode.** On calcule d'abord le noyau :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On résout ce système et on trouve qu'il est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

On choisit x_3 et x_4 comme paramètres et on trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{ (-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Les deux vecteurs définissant le noyau sont linéairement indépendants, donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

On applique maintenant le théorème du rang pour en déduire sans calculs la dimension de l'image : $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$. Donc le rang de f est 2.

— **Deuxième méthode.** On calcule d'abord l'image. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculons $v_i = f(e_i)$:

$$v_1 = f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad v_2 = f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 = f(e_3) = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix} \quad v_4 = f(e_4) = f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$$

On réduit la matrice A, formée des vecteurs colonnes, sous une forme échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 6 & 4\\ -1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc le rang de A est 2, ainsi

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\big) = 2$$

Maintenant, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg} f = 4 - 2 = 2$.

On trouve bien sûr le même résultat par les deux méthodes.

Exemple 4. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P''(X) \end{array}$$

où $P''(X)$ est la dérivée seconde de $P(X)$. Quel est le rang et la dimension du noyau de f ?

— **Première méthode.** On calcule d'abord le noyau :

$$\begin{aligned} P(X) \in \operatorname{Ker} f &\iff f\big(P(X)\big) = 0 \\ &\iff P''(X) = 0 \\ &\iff P'(X) = a \\ &\iff P(X) = aX + b \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Cela prouve que $\operatorname{Ker} f$ est engendré par les deux polynômes : 1 (le polynôme constant) et X. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X)$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - 2 = n - 1$.

— **Deuxième méthode.** On calcule d'abord l'image : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de l'espace de départ $\mathbb{R}_n[X]$, donc

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \dots, f(X^n)\big).$$

Tout d'abord, $f(1) = 0$ et $f(X) = 0$. Pour $k \geqslant 2$, $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2}$. Comme les degrés sont échelonnés, il est clair que $\big\{f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n)\big\} = \big\{2, 6X, 12X^2, \dots, n(n-1)X^{n-2}\big\}$ engendre un espace de dimension $n-1$, donc $\operatorname{rg} f = n - 1$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \operatorname{rg} f = (n+1) - (n-1) = 2$.

Démonstration du théorème du rang.

— Premier cas : f est injective.

En désignant par $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, nous avons vu que la famille à n éléments $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F (car f est injective), donc une famille libre de $\operatorname{Im} f$. De plus, $\big\{f(e_1), \dots, f(e_n)\big\}$ est une partie génératrice de $\operatorname{Im} f$. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = n$, et comme f est injective, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, et ainsi le théorème du rang est vrai.

— Deuxième cas : f n'est pas injective.

Dans ce cas le noyau de f est un sous-espace de E de dimension p avec $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n-p$ vecteurs $\epsilon_{p+1}, \ldots, \epsilon_n$ de E tels que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ soit une base de E.

Alors $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \ldots, f(\epsilon_n)$. Mais, comme pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p$ on a $f(\epsilon_i) = 0$, $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $f(\epsilon_{p+1}), \ldots, f(\epsilon_n)$.

Montrons que ces vecteurs forment une famille libre. Soient $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ des scalaires tels que

$$\alpha_{p+1} f(\epsilon_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\epsilon_n) = 0.$$

Puisque f est une application linéaire, cette égalité équivaut à l'égalité $f\left(\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n\right) = 0$, qui prouve que le vecteur $\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n$ appartient au noyau de f. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n = \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_p \epsilon_p.$$

Comme $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de E, les vecteurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ sont linéairement indépendants et par conséquent pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\lambda_i = 0$, et pour tout $i = p+1, \ldots, n$, $\alpha_i = 0$. Les vecteurs $f(\epsilon_{p+1}), \ldots, f(\epsilon_n)$ définissent donc bien une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est de dimension $n-p$, ce qui achève la démonstration.

On remarquera le rôle essentiel joué par le théorème de la base incomplète dans cette démonstration. □

1.4. Application linéaire entre deux espaces de même dimension.

Théorème 3. Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.

Supposons $\dim E = \dim F$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective

(ii) f est injective

(iii) f est surjective

Autrement dit, dans le cas d'une application linéaire entre deux espaces de ***même*** dimension, pour démontrer qu'elle est bijective, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés : injectivité ou surjectivité.

Démonstration. C'est immédiat à partir du théorème du rang. En effet, la propriété f injective équivaut à $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc d'après le théorème du rang, f est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Im} f = \dim E$. D'après l'hypothèse sur l'égalité des dimensions de E et de F, ceci équivaut à $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$. Cela équivaut donc à $\operatorname{Im} f = F$, c'est-à-dire f est surjective. □

Exemple 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$. Une façon simple de montrer que l'application linéaire f est bijective est de remarquer que l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. Ensuite on calcule le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x,y) = 0 \iff (x-y, x+y) = (0,0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \big\{(0,0)\big\}$ est réduit au vecteur nul, ce qui prouve que f est injective et donc, par le théorème 3, que f est un isomorphisme.

On peut enfin démontrer un résultat annoncé dans le cours sur les matrices.

Proposition 2. Si une matrice carrée admet un inverse à droite, alors c'est aussi un inverse à gauche.

Démonstration. La démonstration se fait en deux temps : (1) l'existence d'un inverse à gauche ; (2) l'égalité des inverses.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice admettant un inverse à droite, c'est-à-dire il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I$.

(1) Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M) = MA$.
   (a) f est une application linéaire, car $f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A = \lambda f(M) + \mu f(N)$.
   (b) f est injective : en effet supposons $f(M) = O$ (où O est la matrice nulle), cela donne $MA = O$. On multiplie cette égalité par B à droite, ainsi $MAB = OB$, donc $MI = O$, donc $M = O$.
   (c) Par le théorème 3, f est donc aussi surjective.
   (d) Comme f est surjective, alors en particulier l'identité est dans l'image de f. C'est-à-dire il existe $C \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $f(C) = I$. Ce qui est exactement dire que C est un inverse à gauche de A : $CA = I$.

(2) Nous avons $AB = I$ et $CA = I$. Montrons $B = C$. Calculons CAB de deux façons :
$$(CA)B = IB = B \quad \text{et } C(AB) = CI = C$$
donc $B = C$.

□

Mini-exercice.

(1) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire qui envoie e_1 sur son opposé, qui envoie e_2 sur le vecteur nul et qui envoie e_3 sur la somme des trois vecteurs e_1, e_2, e_3.
(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z, 2y + 3z)$. Calculer une base du noyau de f, une base de l'image de f et vérifier le théorème du rang.
(3) Même question avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-y + z, x + z, x + y)$.
(4) Même question avec l'application linéaire $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à X^k associe X^{k-1} pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et qui à 1 associe 0.
(5) Lorsque c'est possible, calculer la dimension du noyau, le rang et dire si f peut être injective, surjective, bijective :
   — Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$.
   — Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$.
   — Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
   — Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$.

2. Matrice d'une application linéaire

Nous allons voir qu'il existe un lien étroit entre les matrices et les applications linéaires. À une matrice on associe naturellement une application linéaire. Et réciproquement, étant donné une application linéaire, et des bases pour les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, on associe une matrice.

Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

2.1. **Matrice associée à une application linéaire.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient p la dimension de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soient n la dimension de F et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit enfin $f : E \to F$ une application linéaire.

Les propriétés des applications linéaires entre deux espaces de dimension finie permettent d'affirmer que :

— l'application linéaire f est déterminée de façon unique par l'image d'une base de E, donc par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

— Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_j)$ est un vecteur de F et s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F.

Il existe donc n scalaires uniques $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ (parfois aussi notés $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$) tels que

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \cdots + a_{n,j} f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

Ainsi, l'application linéaire f est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante :

Définition 1. La ***matrice de l'application linéaire*** f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Remarque.

— La taille de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F.

— Par contre, les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$ de E et de la base $\mathcal{B}'$ de F.

— On avait rencontré dans le cours sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ le cas où les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étaient les bases canoniques.

Exemple 6. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

Il est utile d'identifier vecteurs lignes et vecteurs colonnes ; ainsi f peut être vue comme l'application $f : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{smallmatrix}\right)$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(1) Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
- On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$.
- De même $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$.
- Enfin $f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right)$.

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

(2) On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad \phi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$?

$f(\epsilon_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\phi_1 - \phi_2$, $f(\epsilon_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$, $f(\epsilon_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\phi_1 + \phi_2$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix}3 & -4 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

2.2. Opérations sur les applications linéaires et les matrices.

Proposition 3. Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors :
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

Autrement dit, si on note :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) \quad C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) \quad D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)$$

Alors :

$$C = A + B \qquad\qquad D = \lambda A$$

Autrement dit : la matrice associée à la somme de deux applications linéaires est la somme des matrices (à condition de considérer la même base sur l'espace de départ pour les deux applications et la même base sur l'espace d'arrivée). Idem avec le produit par un scalaire.

Le plus important sera la composition des applications linéaires.

Proposition 4. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}$$

Autrement dit, si on note :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \qquad C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$$

Alors

$$C = B \times A$$

Autrement dit, à condition de bien choisir les bases, la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elles, dans le même ordre.

En fait, le produit de matrices, qui semble compliqué au premier abord, est défini afin de correspondre à la composition des applications linéaires.

Démonstration. Posons $p = \dim(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E ; $n = \dim F$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F ; $q = \dim G$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G. Écrivons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{ij}) \in M_{q,n}(\mathbb{K})$ la matrice de g, $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = (c_{ij}) \in M_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $g \circ f$.

On a

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_1) &= g\big(f(e_1)\big) \\
&= g(a_{11} f_1 + \cdots + a_{n1} f_n) \\
&= a_{11} g(f_1) + \cdots + a_{n1} g(f_n) \\
&= a_{11}\Big(b_{11} g_1 + \cdots + b_{q1} g_q\Big) + \cdots + a_{n1}\Big(b_{1n} g_1 + \cdots + b_{qn} g_q\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi, la première colonne de $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ est

$$\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + \cdots + a_{n1} b_{1n} \\ a_{11} b_{21} + \cdots + a_{n1} b_{2n} \\ \vdots \\ a_{11} b_{q1} + \cdots + a_{n1} b_{qn} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est aussi la première colonne de la matrice BA. En faisant la même chose avec les autres colonnes, on remarque que $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ et BA sont deux matrices ayant leurs colonnes égales. On a donc bien l'égalité cherchée. $\square$

Exemple 7. On considère deux applications linéaires : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$ avec $f : E \to F$, $g : F \to G$. On se donne des bases : $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F, et $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2)$ une base de G.

On suppose connues les matrices de f et g :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

Calculons la matrice associée à $g \circ f : E \to G$, $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$, de deux façons différentes.

(1) **Première méthode.** Revenons à la définition de la matrice de l'application linéaire $g \circ f$. Il s'agit d'exprimer l'image des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}''$. C'est-à-dire qu'il faut exprimer $g \circ f(e_j)$ dans la base (g_1, g_2).

— Calcul des $f(e_j)$. On sait par définition de la matrice A que $f(e_1)$ correspond au premier vecteur colonne : plus précisément, $f(e_1) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = 1f_1 + 1f_2 + 0f_3 = f_1 + f_2$.
De même, $f(e_2) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = 0f_1 + 1f_2 + 2f_3 = f_2 + 2f_3$.

— Calcul des $g(f_j)$. Par définition, $g(f_j)$ correspond à la j-ème colonne de la matrice B :
  — $g(f_1) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = 2g_1 + 3g_2$
  — $g(f_2) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = -g_1 + g_2$
  — $g(f_3) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = 2g_2$

— Calcul des $g \circ f(e_j)$. Pour cela on combine les deux séries de calculs précédents :

$$g \circ f(e_1) = g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2) = (2g_1 + 3g_2) + (-g_1 + g_2) = g_1 + 4g_2$$

$$g \circ f(e_2) = g(f_2 + 2f_3) = g(f_2) + 2g(f_3) = (-g_1 + g_2) + 2(2g_2) = -g_1 + 5g_2$$

— Calcul de la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$: cette matrice est composée des vecteurs $g \circ f(e_j)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}''$. Comme

$$g \circ f(e_1) = g_1 + 4g_2 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} \qquad g \circ f(e_2) = -g_1 + 5g_2 = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}''}$$

alors

$$C = \begin{pmatrix}1 & -1\\4 & 5\end{pmatrix}$$

On trouve bien une matrice de taille 2×2 (car l'espace de départ et d'arrivée de $g \circ f$ est $\mathbb{R}^2$).

(2) **Deuxième méthode.** Utilisons le produit de matrices : on sait que $C = BA$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = C = B \times A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\4 & 5\end{pmatrix}$$

Cet exemple met bien en évidence le gain, en termes de quantité de calculs, réalisé en passant par l'intermédiaire des matrices.

2.3. **Matrice d'un endomorphisme.** Dans cette section, on étudie le cas où l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques : $f : E \to E$ est un endomorphisme. Si $\dim E = n$, alors chaque matrice associée à f est une matrice carrée de taille $n \times n$.

Deux situations :
— Si on choisit la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, alors on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associée à f.
— Mais on peut aussi choisir deux bases distinctes pour le même espace vectoriel E ; on note alors comme précédemment $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exemple 8.
— Cas de l'identité : $\mathrm{id} : E \to E$ est définie par $\mathrm{id}(x) = x$. Alors quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, la matrice associée est la matrice identité : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = I_n$. (Attention ! Ce n'est plus vrai si la base d'arrivée est différente de la base de départ.)
— Cas d'une homothétie $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ (où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le rapport de l'homothétie) : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.
— Cas d'une symétrie centrale $s : E \to E$, $s(x) = -x$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.

— Cas de $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, centrée à l'origine, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$. Alors $r_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\,\theta + y\cos\theta)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier de la puissance d'un endomorphisme de E, nous obtenons :

Corollaire 1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Alors, quel que soit $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^p$$

Autrement dit, si A est la matrice associée à f, alors la matrice associée à $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ occurrences}}$ est $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$. La démonstration est une récurrence sur p en utilisant la proposition 4.

Exemple 9. Soit r_θ la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$. La matrice de r_θ^p est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta)\big)^p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^p$$

Un calcul par récurrence montre ensuite que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la matrice de la rotation d'angle $p\theta$: composer p fois la rotation d'angle θ revient à effectuer une rotation d'angle $p\theta$.

2.4. **Matrice d'un isomorphisme.** Passons maintenant aux isomorphismes. Rappelons qu'un isomorphisme $f : E \to F$ est une application linéaire bijective. Nous avons vu que cela entraîne $\dim E = \dim F$.

Théorème 4 (Caractérisation de la matrice d'un isomorphisme)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

(1) f est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Autrement dit, f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice associée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.
(2) De plus, si $f : E \to F$ est bijective, alors la matrice de l'application linéaire $f^{-1} : F \to E$ est la matrice A^{-1}. Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1}$.

Voici le cas particulier très important d'un endomorphisme $f : E \to E$ où E est muni de la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Corollaire 2.
— f est bijective si et seulement si A est inversible.
— Si f est bijective, alors la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}.

Autrement dit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$.

Exemple 10. Soient $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ (centrée à l'origine) et s la réflexion par rapport à l'axe $(y = x)$. Quelle est la matrice associée à $(s \circ r)^{-1}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$?

— Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, on trouve la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

— La matrice associée à la réflexion est $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— La matrice de $s \circ r$ est $B \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

— La matrice de $(s \circ r)^{-1}$ est $(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On aurait aussi pu calculer ainsi : $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \cdots$

— On note que $(BA)^{-1} = BA$ ce qui, en termes d'applications linéaires, signifie que $(s \circ r)^{-1} = s \circ r$. Autrement dit, $s \circ r$ est son propre inverse.

Preuve du théorème 4. On note $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

— Si f est bijective, notons $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$. Alors par la proposition 4 on sait que

$$BA = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I.$$

De même $AB = I$. Ainsi $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible et son inverse est $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$.

— Réciproquement, si $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est une matrice inversible, notons $B = A^{-1}$. Soit $g : F \to E$ l'application linéaire telle que $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$. Alors, toujours par la proposition 4 :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = BA = I$$

Donc la matrice de $g \circ f$ est l'identité, ce qui implique $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Ainsi f est bijective (et sa bijection réciproque est g).

□

Mini-exercice.

(1) Calculer la matrice associée aux applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base canonique :
  (a) f_1 la symétrie par rapport à l'axe (Oy),
  (b) f_2 la symétrie par rapport à l'axe $(y = x)$,
  (c) f_3 la projection orthogonale sur l'axe (Oy),
  (d) f_4 la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

  Calculer quelques matrices associées à $f_i \circ f_j$ et, lorsque c'est possible, à f_i^{-1}.

(2) Même travail pour $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:
  (a) f_1 l'homothétie de rapport λ,
  (b) f_2 la réflexion orthogonale par rapport au plan (Oxz),
  (c) f_3 la rotation d'axe (Oz) d'angle $-\frac{\pi}{2}$,
  (d) f_4 la projection orthogonale sur le plan (Oyz).

3. Changement de bases

3.1. **Application linéaire, matrice, vecteur.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour chaque $x \in E$, il existe un p-uplet unique d'éléments de $\mathbb{K}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

La matrice des coordonnées de x est un vecteur colonne, noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ ou encore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Dans $\mathbb{R}^p$, si $\mathcal{B}$ est la base canonique, alors on note simplement $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ en omettant de mentionner la base.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Le but de ce paragraphe est de traduire l'égalité vectorielle $y = f(x)$ par une égalité matricielle.

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

Proposition 5.
— Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
— Pour $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
— Pour $y \in F$, notons $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Alors, si $y = f(x)$, on a

$$\boxed{Y = AX}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

Démonstration.
— On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
— On a

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right).$$

En utilisant la commutativité de $\mathbb{K}$, on a

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j\right) f_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j\right) f_n.$$

— La matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix}$.
— Ainsi la matrice $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix}$ n'est autre que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

□

Exemple 11. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est égale à

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On se propose de déterminer le noyau de f et l'image de f.

Les éléments x de E sont des combinaisons linéaires de e_1, e_2 et e_3 : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. On a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\, f \quad &\iff \quad f(x) = 0_E \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss. On trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &= \big\{ x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \big\} \\ &= \Big\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ -t \\ t \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{K} \Big\} = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right) \end{aligned}$$

Le noyau est donc de dimension 1. Par le théorème du rang, l'image $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 2. Les deux premiers vecteurs de la matrice A étant linéairement indépendants, ils engendrent $\mathrm{Im}\, f$: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right)$.

3.2. **Matrice de passage d'une base à une autre.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On sait que toutes les bases de E ont n éléments.

Définition 2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

On appelle ***matrice de passage*** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$.

On résume en :

La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ contient - en colonnes - les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

C'est pourquoi on note parfois aussi $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Exemple 12. Soit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. On considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

Il faut exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de (e_1, e_2). On calcule que :

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice de passage est donc :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On va interpréter une matrice de passage comme la matrice associée à l'application identité de E par rapport à des bases bien choisies.

Proposition 6. La matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{id}_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ où E est l'espace de départ muni de la base $\mathcal{B}'$, et E est aussi l'espace d'arrivée, mais muni de la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}$$

Faites bien attention à l'inversion de l'ordre des bases !

Cette interprétation est un outil fondamental pour ce qui suit. Elle permet d'obtenir les résultats de façon très élégante et avec un minimum de calculs.

Démonstration. On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$. On considère

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{id}_E & : & (E,\mathcal{B}') & \longrightarrow & (E,\mathcal{B}) \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

On a $\mathrm{id}_E(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de e'_j par rapport à $\mathcal{B}$, soit $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$. Cette colonne est la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. ☐

Proposition 7.

(1) La matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$: $\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$

(2) Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors $\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$

Démonstration.

(1) On a $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)$. Donc, d'après le théorème 4 caractérisant la matrice d'un isomorphisme, $\mathrm{P}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{id}_E^{-1}\right)$. Or $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{P}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(2) $\mathrm{id}_E : (E,\mathcal{B}'') \to (E,\mathcal{B})$ se factorise de la façon suivante :

$$(E,\mathcal{B}'') \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E,\mathcal{B}') \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E,\mathcal{B}).$$

Autrement dit, on écrit $\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E$. Cette factorisation permet d'écrire l'égalité suivante : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right)$, soit $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

☐

Exemple 13. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Définissons

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$?

On a d'abord

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La proposition 7 implique que $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Donc on a $\mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}^{-1} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$. En appliquant la méthode de Gauss pour calculer $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}^{-1}$, on trouve alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier l'effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur.

- Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Soit $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
- Pour $x \in E$, il se décompose en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- Ce même $x \in E$ se décompose en $x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ dans la base $\mathcal{B}'$ et on note $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Proposition 8.

$$\boxed{X = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'}$$

Notez bien l'ordre !

Démonstration. $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$. On utilise que $x = \mathrm{id}_E(x)$ et la proposition 5. On a :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(\mathrm{id}_E(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'$$

□

3.3. **Formule de changement de base.**

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E.
- Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
- Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.
- Soit $Q = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}_E$ vers la base $\mathcal{B}_F$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}'_E$ vers la base $\mathcal{B}'_F$.

Théorème 5 (Formule de changement de base)**.**

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Démonstration. L'application $f : (E, \mathcal{B}'_E) \to (F, \mathcal{B}'_F)$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, \mathcal{B}'_E) \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{f} (F, \mathcal{B}_F) \xrightarrow{\mathrm{id}_F} (F, \mathcal{B}'_F),$$

c'est-à-dire que $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$.

On a donc l'égalité de matrices suivante :

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F}(\mathrm{id}_F) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{P}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E} \\ &= Q^{-1}AP \end{aligned}$$

□

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, nous obtenons une formule plus simple :
— Soit $f : E \to E$ une application linéaire.
— Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
— Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
— Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$.
— Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.

Le théorème 5 devient alors :

Corollaire 3.

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Exemple 14. Reprenons les deux bases de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple 13 :

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$?

(1) Nous avions calculé que la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ était

$$P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On calcule aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) On applique la formule du changement de base du corollaire 3 :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est souvent l'intérêt des changements de base, se ramener à une matrice plus simple. Par exemple ici, il est facile de calculer les puissances B^k, pour en déduire les A^k.

3.4. **Matrices semblables.** Les matrices considérées dans ce paragraphe sont des matrices carrées, éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 3. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice B est ***semblable*** à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

C'est un bon exercice de montrer que la relation « être semblable » est une relation d'équivalence dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$:

Proposition 9.
— La relation est ***réflexive*** : une matrice A est semblable à elle-même.
— La relation est ***symétrique*** : si A est semblable à B, alors B est semblable à A.
— La relation est ***transitive*** : si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C.

Vocabulaire :
Compte tenu de ces propriétés, on peut dire indifféremment que la matrice A est semblable à la matrice B ou que les matrices A et B sont semblables.
Le corollaire 3 se reformule ainsi :

Corollaire 4. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.

Mini-exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$, Soit $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ avec ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_1 = (\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

(1) Calculer la matrice de f dans la base canonique.

(2) Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.

(3) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.

(4) En déduire les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

(5) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

Même exercice dans $\mathbb{R}^3$ avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2y, y - 2z, z - 2x)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.