# DIMENSION FINIE

Les espaces vectoriels qui sont engendrés par un nombre fini de vecteurs sont appelés espaces vectoriels de dimension finie. Pour ces espaces, nous allons voir comment calculer une base, c'est-à-dire une famille minimale de vecteurs qui engendrent tout l'espace. Le nombre de vecteurs dans une base s'appelle la dimension et nous verrons comment calculer la dimension des espaces et de leurs sous-espaces vectoriels.

## 1. Famille libre

### 1.1. **Définition.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Définition 1.** Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de $E$ est une ***famille libre*** ou ***linéairement indépendante*** si toute combinaison linéaire égale au vecteur nul

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est ***liée*** ou ***linéairement dépendante***. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une ***relation de dépendance linéaire*** entre les $v_j$.

**Exemple 1.** Les polynômes $P_1(X) = 1 - X$, $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ et $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ forment une famille liée dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, car

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

**Exemple 2.** Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la famille $\{\cos, \sin\}$. Montrons que c'est une famille libre. Supposons que l'on ait $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = 0$, cette égalité donne $\lambda = 0$. Et pour $x = \frac{\pi}{2}$, elle donne $\mu = 0$. Donc la famille $\{\cos, \sin\}$ est libre. En revanche la famille $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ est liée car on a la relation de dépendance linéaire $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$. Les coefficients de dépendance linéaire sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

**Théorème 1.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de $p \geqslant 2$ vecteurs de $E$ est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

*Démonstration.* — Supposons d'abord $\mathcal{F}$ liée. Il existe donc une relation de dépendance linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0,$$

avec $\lambda_k \neq 0$ pour au moins un indice $k$. Passons tous les autres termes à droite du signe égal. Il vient

$$\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_p v_p,$$

où $v_k$ ne figure pas au second membre. Comme $\lambda_k \neq 0$, on peut diviser cette égalité par $\lambda_k$ et l'on obtient

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}v_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_k}v_p,$$

c'est-à-dire que $v_k$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, ce qui peut encore s'écrire $v_k \in \mathrm{Vect}\big(\mathcal{F} \setminus \{v_k\}\big)$ (avec la notation ensembliste $A \setminus B$ pour l'ensemble des éléments de $A$ qui n'appartiennent pas à $B$).

— Réciproquement, supposons que pour un certain $k$, on ait $v_k \in \mathrm{Vect}\big(\mathcal{F}\setminus\{v_k\}\big)$. Ceci signifie que l'on peut écrire

$$v_k = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_p v_p,$$

où $v_k$ ne figure pas au second membre. Passant $v_k$ au second membre, il vient

$$0 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots - v_k + \cdots + \mu_p v_p,$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire pour $\mathcal{F}$ (puisque $-1 \neq 0$) et ainsi la famille $\mathcal{F}$ est liée.

□

**Mini-exercice.**

(1) Montrer que toute famille contenant une famille liée est liée.

(2) Montrer que toute famille inclue dans une famille libre est libre.

(3) Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire et que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille liée de $E$, alors $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ est une famille liée de $F$.

(4) Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire *injective* et que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille libre de $E$, alors $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ est une famille libre de $F$.

## 2. Famille génératrice

Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

### 2.1. Définition.

**Définition 2.** Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de $E$. La famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une ***famille génératrice*** de l'espace vectoriel $E$ si tout vecteur de $E$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ***engendre*** l'espace vectoriel $E$.

Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ forment une famille génératrice de $E$ si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

**Exemple 3.** Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Alors les polynômes $\{1, X, \ldots, X^n\}$ forment une famille génératrice. Par contre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes ne possède pas de famille génératrice finie.

2.2. **Liens entre familles génératrices.** La proposition suivante est souvent utile :

**Proposition 1.** Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille génératrice de $E$. Alors $\mathcal{F}' = \left\{v'_1, v'_2, \dots, v'_q\right\}$ est aussi une famille génératrice de $E$ si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}'$.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la définition de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$ et de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}'$. □

Nous chercherons bientôt à avoir un nombre minimal de générateurs. Voici une proposition sur la réduction d'une famille génératrice.

**Proposition 2.** Si la famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ engendre $E$ et si l'un des vecteurs, par exemple $v_p$, est combinaison linéaire des autres, alors la famille $\{v_1, \dots, v_p\} \backslash \{v_p\} = \{v_1, \dots, v_{p-1}\}$ est encore une famille génératrice de $E$.

*Démonstration.* En effet, comme les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ engendrent $E$, alors pour tout élément $v$ de $E$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Or l'hypothèse $v_p$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_{p-1}$ se traduit par l'existence de scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ tels que

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Alors, le vecteur $v$ s'écrit :

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + \lambda_p \left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}\right).$$

Donc

$$v = \left(\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1\right) v_1 + \cdots + \left(\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}\right) v_{p-1},$$

ce qui prouve que $v$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_{p-1}$. Ceci achève la démonstration. Il est clair que si l'on remplace $v_p$ par n'importe lequel des vecteurs $v_i$, la démonstration est la même. □

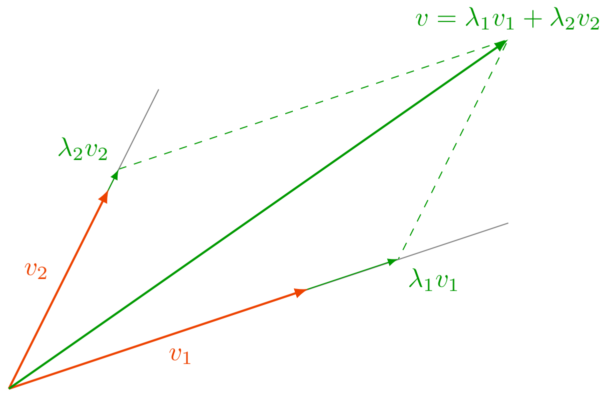
**Mini-exercice.**

(1) Montrer qu'une famille de vecteurs contenant une famille génératrice est encore une famille génératrice de $E$.

(2) Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire *surjective* et que $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une famille génératrice de $E$ , alors $\left\{f(v_1), \dots, f(v_p)\right\}$ est une famille génératrice de $F$.

## 3. Base

La notion de base généralise la notion de repère. Dans $\mathbb{R}^2$, un repère est donné par un couple de vecteurs non colinéaires. Dans $\mathbb{R}^3$, un repère est donné par un triplet de vecteurs non coplanaires. Dans un repère, un vecteur se décompose suivant les vecteurs d'une base. Il en sera de même pour une base d'un espace vectoriel.




### 3.1. Définition.

**Définition 3** (Base d'un espace vectoriel)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de $E$ est une ***base*** de $E$ si $\mathcal{B}$ est une famille libre ***et*** génératrice de $E$.

**Théorème 2.** Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel $E$. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il ***existe*** des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ***uniques*** tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

**Remarque.**

(1) $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'appellent les ***coordonnées*** du vecteur $v$ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Il faut observer que pour une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ on introduit un ***ordre*** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permutait les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.

(3) Notez que l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & \mathbb{K}^n & \to & E \\ & & (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ vers l'espace vectoriel $E$.

*Preuve du théorème 2.*

— Par définition, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E$, donc pour tout $v \in E$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Cela prouve la partie existence.

— Il reste à montrer l'unicité des $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ d'autres scalaires tels que $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$. Alors, par différence on a : $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$. Comme $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre, ceci implique $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n - \mu_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \dots, \lambda_n = \mu_n$. $\square$

**Exemple 4.** Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la ***base canonique*** de $\mathbb{K}^n$.

Voici quelques autres exemples :

**Exemple 5.**

(1) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !

(2) Voici une autre base de $\mathbb{R}_n[X]$ : $(1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\cdots+X^n)$.

(3) L'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices $2 \times 2$ admet une base formée des vecteurs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, n'importe quelle matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4.$$

(4) C'est un bon exercice de prouver que les quatre matrices suivantes forment aussi une base de $M_2(\mathbb{R})$ :

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Théorème de la base incomplète.

**Théorème 3** (Théorème de la base incomplète)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

En particulier, tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie admet une base.

*Démonstration.* On considère l'ensemble de toutes les sous-familles libres d'éléments de $\mathcal{G}$. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient $\mathcal{L}$. Il existe un nombre finie de telles familles car $\mathcal{G}$ est un ensemble fini. On en choisit une de cardinal maximum. Notons la $\mathcal{B}$, et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $E$.

Déjà $\mathcal{B}$ est libre par construction. Soit $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$. Alors la famille $\mathcal{B} \cup \{g\}$ est de cardinal plus grand que celui de $\mathcal{B}$, donc est liée. Comme $\mathcal{B}$ est libre, c'est que le vecteur ajouté $g$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Ceci étant vrai pour tous les éléments de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$, on en déduit $\operatorname{Vect} \mathcal{B} = \operatorname{Vect} \mathcal{G} = E$, et donc $\mathcal{B}$ est aussi génératrice de $E$. C'est donc une base de $E$. □

**Mini-exercice.**

(1) Donner une base de l'espace vectoriel des matrices $3 \times 3$ ayant une diagonale nulle.

(2) Idem avec l'espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$.

## 4. Dimension d'un espace vectoriel

### 4.1. Définition.

**Définition 4.** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de ***dimension finie***.

Par le théorème de la base incomplète, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.

On va pouvoir parler de ***la*** dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

**Théorème 4** (Théorème de la dimension)**.** Toutes les bases d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Nous détaillerons la preuve un peu plus loin.

**Définition 5.** La ***dimension*** d'un espace vectoriel de dimension finie $E$, notée $\dim E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de $E$.

**Méthodologie.** Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de trouver une base de $E$ (une famille à la fois libre et génératrice) : le cardinal (nombre d'éléments) de cette famille donne la dimension de $E$. Le théorème 4 de la dimension prouve que même si on choisissait une base différente alors ces deux bases auraient le même nombre d'éléments.

**Convention.** On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0\}$ la dimension 0.

4.2. **Exemples.**

**Exemple 6.**

(1) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$. La dimension de $\mathbb{R}^2$ est donc 2.

(2) Les vecteurs $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$, et illustrent qu'une autre base contient le même nombre d'éléments.

(3) Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est de dimension $n$, car par exemple sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ contient $n$ éléments.

(4) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, qui contient $n+1$ éléments.

**Exemple 7.** Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :
— $\mathbb{R}[X]$ : l'espace vectoriel de tous les polynômes,
— $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ : l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
— $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ : l'espace vectoriel des suites réelles.

4.3. **Compléments.** Lorsqu'un espace vectoriel est de dimension finie, le fait de connaître sa dimension est une information très riche ; les propriétés suivantes montrent comment exploiter cette information.

Le schéma de démonstration du théorème de la dimension sera : Lemme 1 $\Longrightarrow$ Proposition 3 $\Longrightarrow$ Théorème 4.

Le point clé est le Lemme dont la démonstration sera donnée plus loin pour les étudiants intéressés.

**Lemme 1.** Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre et soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de $E$. Alors $\operatorname{Card} \mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{G}$.

Ce lemme implique le résultat important :

**Proposition 3.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base ayant $n$ éléments. Alors :

(1) Toute famille libre de $E$ a au plus $n$ éléments.

(2) Toute famille génératrice de $E$ a au moins $n$ éléments.

En effet, soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ telle que $\operatorname{Card} \mathcal{B} = n$.

(1) On applique le lemme 1 à la famille $\mathcal{B}$ considérée génératrice ; alors une famille libre $\mathcal{L}$ vérifie $\operatorname{Card} \mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{B} = n$.

(2) On applique le lemme 1 à la famille $\mathcal{B}$ considérée maintenant comme une famille libre, alors une famille génératrice $\mathcal{G}$ vérifie $n = \operatorname{Card} \mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{G}$.

Cette proposition implique le théorème 4 de la dimension :

**Corollaire 1.** Si $E$ est un espace vectoriel admettant une base ayant $n$ éléments, alors toute base de $E$ possède $n$ éléments.

*Démonstration.* Par la proposition 3, si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de $E$, alors $\mathcal{B}$ est à la fois une famille libre et génératrice, donc possède à la fois au plus $n$ éléments et au moins $n$ éléments, donc exactement $n$ éléments. ☐

Il reste à énoncer un résultat important et très utile :

**Théorème 5.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$. Il y a équivalence entre :
(i) $\mathcal{F}$ est une base de $E$,
(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de $E$,
(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E$.

La preuve est une conséquence du théorème 4 de la dimension et du théorème 3 de la base incomplète.

Autrement dit, lorsque le nombre de vecteurs considéré est exactement égal à la dimension de l'espace vectoriel, l'une des deux conditions – être libre ou bien génératrice – suffit pour que ces vecteurs déterminent une base de $E$.

*Démonstration.*
- Les implications (i) $\implies$ (ii) et (i) $\implies$ (iii) découlent de la définition d'une base.
- Voici la preuve de (ii) $\implies$ (i).

  Si $\mathcal{F}$ est une famille libre ayant $n$ éléments, alors par le théorème de la base incomplète (théorème 3) il existe une famille $\mathcal{F}'$ disjointe de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ soit une base de $E$. D'une part $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est une base de $E$ qui est de dimension $n$, donc par le théorème 4, $\operatorname{Card}\left(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'\right) = n$. Mais d'autre part $\operatorname{Card}\left(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'\right) = \operatorname{Card} \mathcal{F} + \operatorname{Card} \mathcal{F}'$ et par hypothèse $\operatorname{Card} \mathcal{F} = n$. Donc $\operatorname{Card} \mathcal{F}' = 0$, ce qui implique que $\mathcal{F}' = \varnothing$ et donc que $\mathcal{F}$ est déjà une base de $E$.
- Voici la preuve de (iii) $\implies$ (i).

  Par hypothèse, $\mathcal{F}$ est cette fois une famille génératrice. Toujours par le théorème 3, on peut extraire de cette famille une base $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Puis par le théorème 4, $\operatorname{Card} \mathcal{B} = n$, donc $n = \operatorname{Card} \mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{F} = n$. Donc $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est bien une base.

☐

**Exemple 8.** Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(v_1, v_2, v_3)$ suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$ ?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

- Nous avons une famille de 3 vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Donc pour montrer que la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est une base, par le théorème 5, il suffit de montrer que la famille est libre ou bien de montrer qu'elle est génératrice. Dans la pratique, il est souvent plus facile de vérifier qu'une famille est libre.

— À quelle condition la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Cela implique le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 &= 0 \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 0 \\ (t-4)\lambda_2 + (t-4)\lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ (t-4)\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

— Il est clair que si $t \neq 4$, alors la seule solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ et donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre. Si $t = 4$, alors par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -1)$ est une solution non nulle, donc la famille n'est pas libre.

— Conclusion : si $t \neq 4$ la famille est libre, donc par le théorème 5 la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est en plus génératrice, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $t = 4$, la famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

4.4. **Démonstration.** On donne maintenant la démonstration du lemme 1. Cette démonstration est délicate, on peut l'accepter dans un premier temps.

*Démonstration.* La preuve de ce lemme se fait en raisonnant par récurrence.

On démontre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété suivante est vraie : « Dans un espace vectoriel engendré par $n$ vecteurs, toute famille ayant $n+1$ éléments est liée. »

**Initialisation.** On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 1$. Soit $E$ un espace vectoriel engendré par un vecteur noté $g_1$, et soit $\{v_1, v_2\}$ une famille de $E$ ayant deux éléments. Les vecteurs $v_1$ et $v_2$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires du vecteur $g_1$ ; autrement dit, il existe des scalaires $\alpha_1$, $\alpha_2$ tels que $v_1 = \alpha_1 g_1$ et $v_2 = \alpha_2 g_1$, ce qui donne la relation : $\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2 = 0_E$. En supposant $v_2$ non nul (sinon il est évident que $\{v_1, v_2\}$ est liée), le scalaire $\alpha_2$ est donc non nul. On a trouvé une combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, v_2$, avec des coefficients non tous nuls. Donc la famille $\{v_1, v_2\}$ est liée.

**Hérédité.** On démontre maintenant que si la propriété est vraie au rang $n-1$ ($n \geqslant 2$), alors elle vraie au rang $n$. Soit $E$ un espace vectoriel engendré par $n$ vecteurs notés $g_1, g_2, \ldots, g_n$, et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ une famille de $E$ ayant $n+1$ éléments. Tout vecteur $v_j$, pour $j = 1, 2, \ldots, n+1$, est combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc il existe des scalaires $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_n^j$ tels que :

$$v_j = \alpha_1^j g_1 + \alpha_2^j g_2 + \cdots + \alpha_n^j g_n.$$

*Remarque.* On est contraint d'utiliser ici deux indices $i, j$ pour les scalaires (attention ! $j$ n'est pas un exposant) car deux informations sont nécessaires : l'indice $j$ indique qu'il s'agit de la décomposition du vecteur $v_j$, et $i$ indique à quel vecteur de la famille génératrice est associé ce coefficient.

En particulier, pour $j = n+1$, le vecteur $v_{n+1}$ s'écrit :

$$v_{n+1} = \alpha_1^{n+1} g_1 + \alpha_2^{n+1} g_2 + \cdots + \alpha_n^{n+1} g_n.$$

Si $v_{n+1}$ est nul, c'est terminé, la famille est liée ; sinon, $v_{n+1}$ est non nul, et au moins un des coefficients $\alpha_j^{n+1}$ est non nul. On suppose, pour alléger l'écriture, que $\alpha_n^{n+1}$ est non nul (sinon il suffit de changer l'ordre des vecteurs). On construit une nouvelle famille de $n$ vecteurs de $E$ de telle sorte que ces vecteurs soient combinaisons linéaires de $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, c'est-à-dire appartiennent au sous-espace engendré par $\{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$. Pour $j = 1, 2, \ldots, n$, on définit $w_j$ par :

$$w_j = \alpha_n^{n+1} v_j - \alpha_n^j v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n^{n+1} \alpha_k^j - \alpha_n^j \alpha_k^{n+1}) g_k.$$

Le coefficient de $g_n$ est nul. Donc $w_j$ est bien combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$. On a $n$ vecteurs qui appartiennent à un espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : la famille $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ est liée. Par conséquent, il existe des scalaires non tous nuls $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n = 0.$$

En remplaçant les $w_j$ par leur expression en fonction des vecteurs $v_i$, on obtient :

$$\alpha_n^{n+1} \lambda_1 v_1 + \alpha_n^{n+1} \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n^{n+1} \lambda_n v_n - (\lambda_1 \alpha_n^1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^n) v_{n+1} = 0_E$$

Le coefficient $\alpha_n^{n+1}$ a été supposé non nul et au moins un des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est non nul ; on a donc une combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls, ce qui prouve que ces vecteurs forment une famille liée.

**Conclusion.** La démonstration par récurrence est ainsi achevée. □

**Mini-exercice.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse par un résultat du cours ou un contre-exemple :

(1) Une famille de $p \geqslant n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ est génératrice.

(2) Une famille de $p > n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ est liée.

(3) Une famille de $p < n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ est libre.

(4) Une famille génératrice de $p \leqslant n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ est libre.

(5) Une famille de $p \neq n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ n'est pas une base.

(6) Toute famille libre à $p$ éléments d'un espace vectoriel de dimension $n$ se complète par une famille ayant exactement $n-p$ éléments en une base de $E$.

## 5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ étant lui même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la question est de savoir s'il est de dimension finie ou s'il ne l'est pas.

Prenons l'exemple de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

— il contient le sous-espace vectoriel $F_1 = \mathbb{R}_n[X]$ des (fonctions) polynômes de degré $\leqslant n$, qui est de dimension finie ;

— et aussi le sous-espace vectoriel $F_2 = \mathbb{R}[X]$ de l'ensemble des (fonctions) polynômes, qui lui est de dimension infinie.

### 5.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Nous allons voir par contre que lorsque $E$ est de dimension finie alors $F$ aussi.

**Théorème 6.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

(1) Alors $F$ est de dimension finie ;

(2) $\dim F \leqslant \dim E$ ;

(3) $F = E \iff \dim F = \dim E$.

*Démonstration.*

- Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Si $F = \{0\}$ il n'y a rien à montrer. On suppose donc $F \neq \{0\}$ et soit $v$ un élément non nul de $F$. La famille $\{v\}$ est une famille libre de $F$, donc $F$ contient des familles libres. Toute famille libre d'éléments de $F$ étant une famille libre d'éléments de $E$ (voir la définition des familles libres), alors comme $E$ est de dimension $n$, toutes les familles libres de $F$ ont au plus $n$ éléments.
- On considère l'ensemble $K$ des entiers $k$ tels qu'il existe une famille libre de $F$ ayant $k$ éléments :

  $$K = \Big\{k \in \mathbb{N} \mid \exists\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset F \ \text{ et } \ \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \text{ est une famille libre de } F\Big\}$$

  Cet ensemble $K$ est non vide (car $1 \in K$) ; $K$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{N}$ (puisque tout élément de $K$ est compris entre 1 et $n$) donc $K$ admet un maximum. Notons $p$ ce maximum et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille libre de $F$ ayant $p$ éléments.
- Montrons que $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est aussi génératrice de $F$. Par l'absurde, s'il existe $w$ un élément de $F$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$, alors la famille $\{v_1, \ldots, v_p, w\}$ ne peut pas être libre (sinon $p$ ne serait pas le maximum de $K$). La famille $\{v_1, \ldots, v_p, w\}$ est donc liée, mais alors la relation de dépendance linéaire implique que $w \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$, ce qui est une contradiction.

  Conclusion : $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre et génératrice, donc est une base de $F$.
- On a ainsi démontré simultanément que :
  - $F$ est de dimension finie (puisque $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de $F$).
  - Ainsi $\dim F = p$, donc $\dim F \leqslant \dim E$ (puisque toute famille libre de $F$ a au plus $n$ éléments).
  - De plus, lorsque $p = n$, le $p$-uplet $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, qui est une base de $F$, est aussi une base de $E$ (car $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est alors une famille libre de $E$ ayant exactement $n$ éléments, donc est une base de $E$). Tout élément de $E$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, d'où $E = F$.

□

### 5.2. **Exemples.**

**Exemple 9.** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces vectoriels de $E$ sont :

- soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace $\{0\}$ ;
- soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}\{u\}$ engendrés par les vecteurs non nuls $u$ de $E$ ;
- soit de dimension 2 : c'est alors l'espace $E$ tout entier.

**Vocabulaire.** Plus généralement, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$ ($n \geqslant 2$), tout sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 1 est appelé ***droite vectorielle*** de $E$ et tout sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 2 est appelé ***plan vectoriel*** de $E$. Tout sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $n-1$ est appelé ***hyperplan*** de $E$. Pour $n = 3$, un hyperplan est un plan vectoriel ; pour $n = 2$, un hyperplan est une droite vectorielle.

Le théorème 6 précédent permet de déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 2.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On suppose que $F$ est de dimension finie et que $G \subset F$. Alors :

$$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

**Exemple 10.** Deux droites vectorielles $F$ et $G$ sont soit égales, soit d'intersection réduite au vecteur nul.

**Exemple 11.** Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}(u, v) \quad \text{où } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que $F = G$ ?

(1) On remarque que les vecteurs $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires, donc $G$ est de dimension 2, et de plus ils appartiennent à $F$, donc $G$ est contenu dans $F$.

(2) Pour trouver la dimension de $F$, on pourrait déterminer une base de $F$ et on montrerait alors que la dimension de $F$ est 2. Mais il est plus judicieux ici de remarquer que $F$ est contenu strictement dans $\mathbb{R}^3$ (par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ n'est pas dans $F$), donc $\dim F < \dim \mathbb{R}^3 = 3$ ; mais puisque $F$ contient $G$ alors $\dim F \geqslant \dim G = 2$, donc la dimension de $F$ ne peut être que 2.

(3) On a donc démontré que $G \subset F$ et que $\dim G = \dim F$, ce qui entraîne $G = F$.

### 5.3. Théorème des quatre dimensions.

**Théorème 7** (Théorème des quatre dimensions)**.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F, G$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Alors :

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

**Remarque.** Notez l'analogie de la formule avec la formule pour les ensembles finis :

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

*Preuve du théorème 7.*

— Nous allons partir d'une base $\mathcal{B}_{F \cap G} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ de $F \cap G$. On commence par compléter $\mathcal{B}_{F \cap G}$ en une base $\mathcal{B}_F = \{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de $F$. On complète ensuite $\mathcal{B}_{F \cap G}$ en une base $\mathcal{B}_G = \{u_1, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$ de $G$.

— Nous allons maintenant montrer que la famille

$$\{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$$

est une base de $F + G$. Il est tout d'abord clair que c'est une famille génératrice de $F + G$ (car $\mathcal{B}_F$ est une famille génératrice de $F$ et $\mathcal{B}_G$ est une famille génératrice de $G$).

— Montrons que cette famille est libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0 \tag{1}$$

On pose $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$, $v = \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j$, $w = \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k$. Alors d'une part $u + v \in F$ (car $\mathcal{B}_F$ est une base de $F$) mais comme l'équation (1) équivaut à $u + v + w = 0$, alors $u + v = -w \in G$ (car $w \in G$). Maintenant $u + v \in F \cap G$ et aussi bien sûr $u \in F \cap G$, donc $v = \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j \in F \cap G$. Cela implique $\beta_j = 0$ pour tout $j$ (car les $\{v_j\}$ complètent la base de $F \cap G$).

La combinaison linéaire nulle (1) devient $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0$. Or $\mathcal{B}_G$ est une base de $G$, donc $\alpha_i = 0$ et $\gamma_k = 0$ pour tout $i, k$. Ainsi $\mathcal{B}_{F+G} = \{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$ est une base de $F + G$.

— Il ne reste plus qu'à compter le nombre de vecteurs de chaque base : $\dim F \cap G = \operatorname{Card} \mathcal{B}_{F\cap G} = p$, $\dim F = \operatorname{Card} \mathcal{B}_F = q$, $\dim G = \operatorname{Card} \mathcal{B}_G = r$, $\dim(F+G) = \operatorname{Card} \mathcal{B}_{F+G} = q + r - p$. Ce qui prouve bien $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

$\square$

**Corollaire 3.** Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

**Exemple 12.** Dans un espace vectoriel $E$ de dimension 6, on considère deux sous-espaces $F$ et $G$ avec $\dim F = 3$ et $\dim G = 4$. Que peut-on dire de $F \cap G$ ? de $F + G$ ? Peut-on avoir $F \oplus G = E$ ?

— $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel inclus dans $F$, donc $\dim(F \cap G) \leqslant \dim F = 3$. Donc les dimensions possibles pour $F \cap G$ sont pour l'instant $0, 1, 2, 3$.
— $F + G$ est un sous-espace vectoriel contenant $G$ et inclus dans $E$, donc $4 = \dim G \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim E = 6$. Donc les dimensions possibles pour $F + G$ sont $4, 5, 6$.
— Le théorème 7 des quatre dimensions nous donne la relation : $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 4 - \dim(F + G) = 7 - \dim(F + G)$. Comme $F + G$ est de dimension 4, 5 ou 6, alors la dimension de $F \cap G$ est 3, 2 ou 1.
— Conclusion : les dimensions possibles pour $F + G$ sont 4, 5 ou 6 ; les dimensions correspondantes pour $F \cap G$ sont alors 3, 2 ou 1. Dans tous les cas, $F \cap G \neq \{0\}$ et en particulier $F$ et $G$ ne sont jamais en somme directe dans $E$.

La méthode de la preuve du théorème 7 des quatre dimensions implique aussi :

**Corollaire 4.** Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie admet un supplémentaire.

**Mini-exercice.**

(1) Soient $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-7\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\11\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $F = G$.

(2) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $G = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Calculer les dimensions de $F, G, F \cap G, F + G$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

(3) Dans un espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces $F$ et $G$ vérifiant $\dim F = 3$ et $\dim G \leqslant 2$. Que peut-on dire pour $\dim(F \cap G)$ ? Et pour $\dim(F + G)$ ?

(4) Dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie, montrer l'équivalence entre : (i) $F \oplus G = E$ ; (ii) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ ; (iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

(5) Soit $H$ un hyperplan dans un espace vectoriel de dimension finie $E$. Soit $v \in E \setminus H$. Montrer que $H$ et $\operatorname{Vect}(v)$ sont des sous-espaces supplémentaires dans $E$.

## 6. Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 6.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de $E$. On appelle ***rang*** de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, notée $\operatorname{rg}\{v_1, \dots, v_p\}$.

On va s'intéresser au calcul du rang. On commence par des inégalités évidentes.

**Lemme 2.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de $E$.

(1) Alors $0 \leqslant \operatorname{rg}\{v_1, \dots, v_p\} \leqslant p$.

(2) Si de plus $E$ est de dimension finie, alors $\operatorname{rg}\{v_1, \dots, v_p\} \leqslant \dim E$.

**Remarque.** Le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est nul si et seulement si $v_1 = \cdots = v_p = 0_E$. De manière similaire, le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est égal à $p$ si et seulement si la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre.

**Exemple 13.** On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$. Le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc compris entre 1 et 3. De plus la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre donc le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ est au moins égal à 2. Est-ce 2 ou 3 ? La question est équivalente au fait que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée. Or $v_1 = v_2 - v_3$, donc le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ est égal à 2.

On a défini le rang d'une matrice comme le nombre de lignes non nulles obtenu après échelonnement de la matrice selon ses lignes. On a aussi énoncé le résultat disant que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. Ceci revient à dire que le rang est également égal au nombre de colonnes non nulles après échelonnement de la matrice ... selon ses colonnes !

**Définition 7.** Une matrice est échelonnée par rapport à ses colonnes si sa transposée est échelonnée par rapport à ses lignes.

Dit autrement, une matrice est échelonnée par rapport à ses colonnes si le nombre de zéros commençant une colonne croît strictement colonne après colonne (à moins que toute les dernières colonnes ne soient nulles).

Voici un exemple d'une matrice échelonnée par colonnes ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & + & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemple 14.** La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée par rapport à ses colonnes alors que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas.

**Exemple 15.** Quel est le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

En faisant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$ , $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$, $C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1$, on obtient des zéros sur la première ligne à droite du premier pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

On échange $C_2$ et $C_3$ par l'opération $C_2 \leftrightarrow C_3$ pour avoir le coefficient $-1$ en position de pivot et ainsi éviter d'introduire des fractions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

En faisant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$ et $C_5 \leftarrow C_5 + 5C_2$, on obtient des zéros à droite de ce deuxième pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix}$$

Enfin, en faisant les opérations $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ et $C_5 \leftarrow C_5 - 2C_3$, on obtient une matrice échelonnée par colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 colonnes non nulles : on en déduit que le rang de $A$ est 3.

Dans les lignes qui suivent, on va faire un lien entre le rang d'une matrice et le rang d'une famille de vecteurs. Pour cela, on va supposer $E$ de dimension finie, et on associe à une famille de vecteurs la matrice des coefficients de ces vecteurs dans une base fixée.

Soit donc $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $E$. Chaque vecteurs d'une famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ se décompose sous la forme

$$v_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n.$$

La matrice des coefficients de $\{v_1, \ldots, v_p\}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j$-ème colonne représente les coefficients du vecteurs $v_j$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Théorème 8.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Le rang de la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est égal au rang de la matrice de ses coefficients dans la base $\mathcal{B}$.

On montre d'abord un lemme.

**Lemme 3.** Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonnes d'une matrice $A$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ ne change pas lorsque l'on applique à $A$ une des trois opérations élémentaires sur ses colonnes.

*Démonstration.* Le résultat est évident pour l'échange de deux colonnes ou la multiplication d'une colonne par un scalaire non nul. Montrons le dans le cas où on ajoute à la colonne $C_i$ de $A$ le produit de la colonne $C_j$ de $A$, pour $i \neq j$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Il s'agit de montrer l'égalité

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_p) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p).$$

L'inclusion

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p) \subset \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_p)$$

est facile car $C_i + \lambda C_j$ est combinaison linéaire de $C_i$ et $C_j$. Pour démontrer l'inclusion

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_p) \subset \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p),$$

il suffit de vérifier que $C_i$ est combiniasion linéaire de $C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_p$. Or

$$C_i = (C_i + \lambda C_j) - \lambda C_j$$

et on obtient l'égalité désirée. $\square$

*Démonstration du Théorème 8.* Échelonnons la matrice $A$ par rapport à ses colonnes (ou encore échelonnons la transposée de $A$ par rapport à ses lignes) pour obtenir une matrice échelonnée $A'$. À chaque étape, on effectue une opération élémentaire sur les colonnes des matrices, ce qui ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes des matrices. Le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est donc égal au rang de la famille des vecteurs colonnes de la matrice $A'$. Notons $C_1, \dots, C_r$ les $r$ colonnes non nulles de $A'$. On va montrer que le rang de la famille $\{C_1, \dots, C_r\}$ est égal à $r$, qui sera donc bien égal au rang de $A$.

Il suffit donc de montrer que la famille $\{C_1, \dots, C_r\}$ est libre. Supposons qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r = 0.$$

En transposant cette égalité, on obtient donc

$$\lambda_1 \, {}^tC_1 + \cdots + \lambda_r \, {}^tC_r = 0.$$

Le système linéaire correspondant est échelonné par rapport à ses lignes, et donc son unique solution est la solution nulle $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, ce qui termine la démonstration. $\square$

**Exemple 16.** La matrice des vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On l'échelonne en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{C_3 \to C_3 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{C_3 \to C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien de rang égal à 2 conformément à l'exemple 13.

**Exemple 17.** Quel est le rang de la famille des 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ ?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On est ramené à calculer le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que cette matrice peut être échelonnée par colonnes en : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a 3 colonnes non nulles : on en déduit que le rang de la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est 3.

En fait, nous avons même démontré que

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}\right).$$

Il est parfois plus simple de déterminer le rang d'une matrice en considérant ses lignes plutôt que ses colonnes, ce qui revient en même en vertu du fait que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. On en déduit :

**Corollaire 5.** Soit $A$ une matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$. Le rang de la famille des vecteurs colonnes de $A$ est égal au rang de la famille des vecteurs lignes de $A$.

Par contre les sous-espaces vectoriels eux-mêmes ne sont pas égaux. Ils ne vivent même pas dans les mêmes espaces vectoriels !

**Remarque.** Une matrice carrée de taille $n$ est inversible si et seulement son rang est égal à $n$. Pour une famille $\mathcal{F}$ de $n$ vecteurs dans une espace vectoriel $E$ de dimension $n$ muni d'une base $\mathcal{B}$, si $A$ dénote la matrice des coefficients des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, on en déduit donc :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, \mathcal{F} = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, A = n \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

**Mini-exercice.**

(1) Quel est le rang de la famille de vecteurs $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ?

(2) Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer son rang.

(3) Calculer le rang précédent en utilisant les vecteurs lignes.

(4) Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-il une famille libre de $\mathbb{R}^3$ ? Une base ?

(5) Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-il une famille libre de $\mathbb{R}^4$ ? Une base ?