

L'ESPACE VECTORIEL \mathbb{R}^n

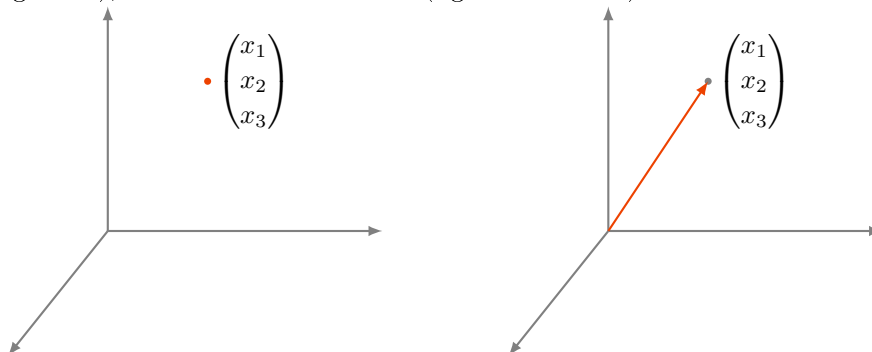
Ce chapitre est consacré à l'ensemble \mathbb{R}^n vu comme espace vectoriel. On peut le voir comme une introduction avant d'attaquer le cours détaillé sur les espaces vectoriels.

1. VECTEURS DE \mathbb{R}^n

1.1. Opérations sur les vecteurs.

- L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.
- Le plan est formé des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels. Il est noté \mathbb{R}^2 . C'est un espace à deux dimensions.
- L'espace de dimension 3 est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Il est noté \mathbb{R}^3 .

Le symbole $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace (figure de gauche), soit comme un vecteur (figure de droite) :



On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension n pour tout entier positif $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Les éléments de l'espace de dimension n sont les n -uples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels. L'espace de dimension n est noté \mathbb{R}^n . Comme en dimensions 2 et 3, le n -uple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dénote aussi bien un point qu'un vecteur de l'espace de dimension n .

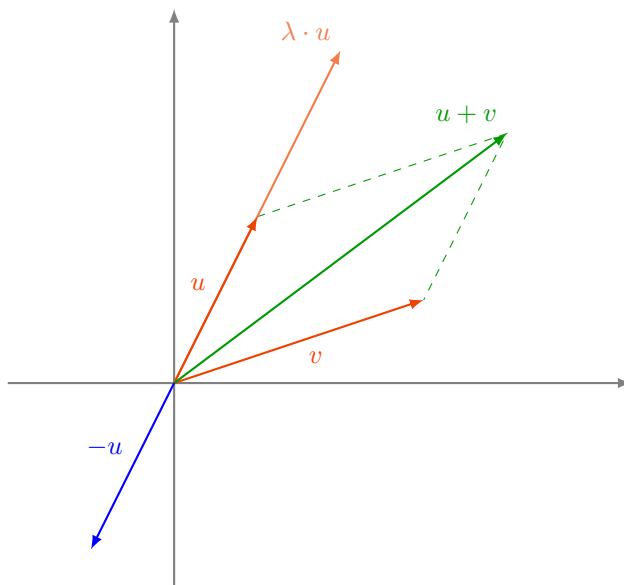
Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n (remarquez qu'on ne met plus de flèches pour la notation des vecteurs). En voyant \mathbb{R}^n comme l'espace des matrices colonnes $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on sait comment additionner deux vecteurs ou les multiplier par un réel :

- **Somme de deux vecteurs.** Leur somme est par définition le vecteur $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$.
- **Produit d'un vecteur par un scalaire.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (un *scalaire*) : $\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$.

— Le **vecteur nul** de \mathbb{R}^n est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

— L'**opposé** du vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$.

Voici des vecteurs dans \mathbb{R}^2 (ici $\lambda = 2$) :

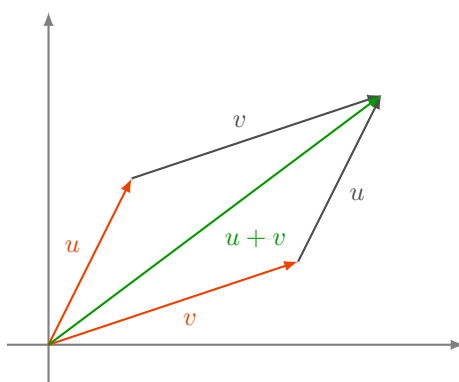


Si λ est un scalaire et u un vecteur, on notera souvent λu au lieu de $\lambda \cdot u$.

Théorème 1. Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors :

- | | |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| (1) $u + v = v + u$ | <i>commutativité de la somme (de vecteurs)</i> |
| (2) $u + (v + w) = (u + v) + w$ | <i>associativité de la somme</i> |
| (3) $u + 0 = 0 + u = u$ | <i>0 est l'élément neutre pour la somme</i> |
| (4) $u + (-u) = 0$ | <i>existence d'un inverse pour la somme</i> |
| (5) $1 \cdot u = u$ | <i>1 est l'élément neutre pour le produit (par un scalaire)</i> |
| (6) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ | <i>associativité du produit</i> |
| (7) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ | <i>distributivité du produit par rapport à la somme</i> |
| (8) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ | <i>distributivité de la somme par rapport au produit</i> |



Chacune de ces propriétés découle directement de la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire. Ces huit propriétés font de \mathbb{R}^n un **espace vectoriel**. Dans le cadre général, ce sont ces huit propriétés qui définissent ce qu'est un espace vectoriel.

2. SOUS-ESPACES VECTORIEL DE \mathbb{R}^n

2.1. Définition.

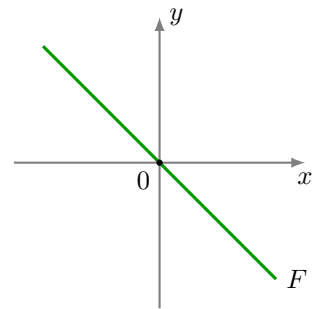
Définition 1. Une partie F de \mathbb{R}^n est appelée un **sous-espace vectoriel** si

- le vecteur nul appartient à F
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$
- $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in F$

Exemple 1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

En effet :

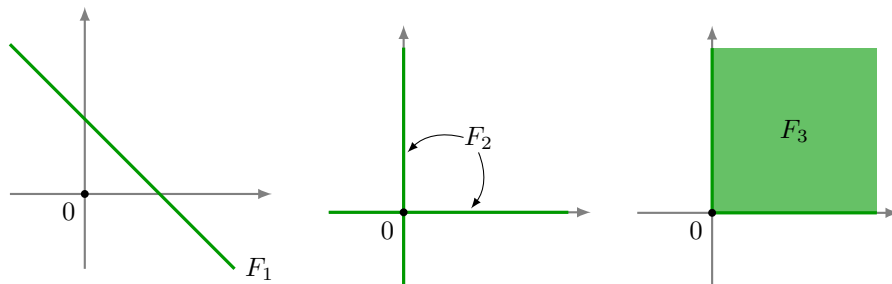
- $(0, 0) \in F$
- si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F
alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$,
donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$
et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F
- si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $x + y = 0$, donc $\lambda x + \lambda y = 0$ d'où $\lambda u \in F$



Voici des sous-ensembles qui **ne sont pas** des sous-espaces vectoriels

Exemple 2.

- (1) $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ n'est pas un s.e.v. de \mathbb{R}^2 .
En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1 .
- (2) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ n'est pas un s.e.v. de \mathbb{R}^2 .
En effet $u = (1, 0), v = (0, 1) \in F_2$, mais $u + v = (1, 1) \notin F_2$.
- (3) $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ n'est pas un s.e.v. de \mathbb{R}^2 .
En effet $u = (1, 1) \in F_3$ mais, pour $\lambda = -1$, $-u = (-1, -1) \notin F_3$.



Il est parfois plus pratique de démontrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel en utilisant le résultat suivant.

Lemme 1. Soit F une partie non vide de \mathbb{R}^n . Alors F est un **sous-espace vectoriel** de \mathbb{R}^n si et seulement si $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$ pour tous $u, v \in F$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F .

Démonstration. Exercice. □

Un exemple de sous-espace vectoriel est donné par l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et soit $AX = 0$ le système de n équations à p inconnues :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2. L'ensemble des vecteurs X solutions de $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Démonstration. Soit F l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^p$ solutions de l'équation $AX = 0$

— $0 \in F$

— F est stable par addition : si $AX = 0$ et $AX' = 0$ alors $A(X + X') = AX + AX' = 0$

— F est stable par multiplication par un scalaire : si $AX = 0$ alors $A(\lambda X) = 0$

□

Exemple 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions de ce système est

$$F = \{(x = 2s - 3t, y = s, z = t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . On peut aussi voir F comme donné par l'équation $(x = 2y - 3z)$; c'est donc un plan passant par l'origine.

Mini-exercice. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

- (1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
- (2) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$
- (3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$
- (4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$
- (5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$

2.2. Combinaison linéaires. Soient v_1, v_2, \dots, v_m des vecteurs de \mathbb{R}^n

Définition 2. Tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$$

est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_m de \mathbb{R}^n .

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque : Si $m = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est **colinéaire** à v_1 .

Exemple 4. (1) Dans \mathbb{R}^3 , $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car on a

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Dans \mathbb{R}^2 , le vecteur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire au vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 5. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Montrons que $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de u et v .

On cherche donc λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$, ou encore

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 9 = \lambda + 6\mu \\ 2 = 2\lambda + 4\mu \\ 7 = -\lambda + 2\mu \end{cases}.$$

Une solution de ce système est $(\lambda = -3, \mu = 2)$, ce qui implique que w est combinaison linéaire de u et v :

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3. Soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . C'est même le plus petit sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n contenant les vecteurs v_1, \dots, v_m .

On appelle cet espace le **sous-espace vectoriel engendré par v_1, \dots, v_m** , noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$.

Démonstration. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\}$.

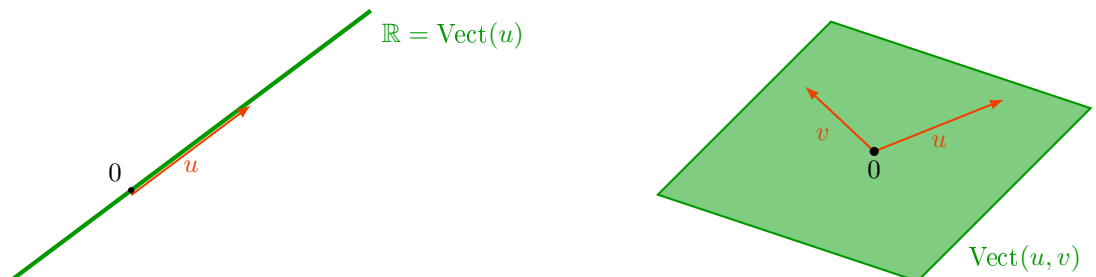
- (1) $0 \in F$ car F contient la combinaison linéaire particulière $0v_1 + \dots + 0v_m$.
- (2) Si $u, v \in F$ alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ et $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ tels que $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$. On en déduit que $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_m + \mu_m)v_m$ appartient bien à F .
- (3) De même, $\lambda \cdot u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda\lambda_m)v_m \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Si G est un sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, \dots, v_m\}$, alors il est stable par combinaison linéaire ; il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\}$. Par conséquent F est inclus dans G : F est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $\{v_1, \dots, v_m\}$. \square

$$u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_m) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \quad u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$$

Exemple 6. (1) **Droite vectorielle** $\text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}u$ (avec $u \neq 0$)



$$(2) \text{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Si u et v ne sont pas colinéaires, c'est un **plan vectoriel**.

$$(3) u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \text{ Déterminons } \mathcal{P} = \text{Vect}(u, v)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v) &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v \quad \text{pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases} \end{aligned}$$

c'est un plan d'équation cartésienne ($x - 2y + z = 0$).

Mini-exercice. (1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

(b) Trouver deux vecteurs u, v tels que $F = \text{Vect}(u, v)$.

(2) Décrire le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. FAMILLES LIBRE ET GÉNÉRATRICE

3.1. Famille libre.

Définition 3. Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La famille $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une famille **libre** si aucun des vecteurs v_i ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs v_j de la famille, avec $j \neq i$. Autrement dit, si

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

pour certains réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Exemple 7.

(1) La famille constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre.

(2) Par contre la famille constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. En effet

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Pour des vecteurs de \mathbb{R}^n , décider si une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre ou liée revient à résoudre un système linéaire.

Exemple 8. Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 , considérons la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On souhaite déterminer si elle est libre ou liée. On cherche des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On calcule (voir un peu plus bas) que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, ce qui fait que

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est donc une famille liée.

Voici les calculs de la réduction de Gauss sur la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 9. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée ? Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille libre.

Exemple 10. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une famille liée, car

$$3v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

Si $v \neq 0$, la famille à un seul vecteur $\{v\}$ est libre (et liée si $v = 0$). Considérons le cas particulier d'une famille de deux vecteurs.

Proposition 1. La famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 est un multiple de v_2 ou v_2 est un multiple de v_1 .

Ce qui se reformule ainsi par contraposition : « La famille $\{v_1, v_2\}$ est libre si et seulement si v_1 n'est pas un multiple de v_2 et v_2 n'est pas un multiple de v_1 . »

Démonstration.

- Supposons la famille $\{v_1, v_2\}$ liée, alors il existe λ_1, λ_2 non tous les deux nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Si c'est λ_1 qui n'est pas nul, on peut diviser par λ_1 , ce qui donne $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ et v_1 est un multiple de v_2 . Si c'est λ_2 qui n'est pas nul, alors de même v_2 est un multiple de v_1 .
- Réciproquement, si v_1 est un multiple de v_2 , alors il existe un scalaire μ tel que $v_1 = \mu v_2$, soit $1v_1 + (-\mu)v_2 = 0$, ce qui est une relation de dépendance linéaire entre v_1 et v_2 puisque $1 \neq 0$: la famille $\{v_1, v_2\}$ est alors liée. Même conclusion si c'est v_2 qui est un multiple de v_1 .

□

Généralisons tout de suite cette proposition à une famille d'un nombre quelconque de vecteurs.

Théorème 4. Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de $p \geq 2$ vecteurs de \mathbb{R}^n est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de \mathcal{F} est combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{F} .

Démonstration. C'est essentiellement la même démonstration que ci-dessus.

— Supposons d'abord \mathcal{F} liée. Il existe donc une relation de dépendance linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0,$$

avec $\lambda_k \neq 0$ pour au moins un indice k . Passons tous les autres termes à droite du signe égal. Il vient

$$\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_p v_p,$$

où v_k ne figure pas au second membre. Comme $\lambda_k \neq 0$, on peut diviser cette égalité par λ_k et l'on obtient

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_k} v_p,$$

c'est-à-dire que v_k est combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{F} , ce qui peut encore s'écrire $v_k \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{v_k\})$ (avec la notation ensembliste $A \setminus B$ pour l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B).

— Réciproquement, supposons que pour un certain k , on ait $v_k \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{v_k\})$. Ceci signifie que l'on peut écrire

$$v_k = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_p v_p,$$

où v_k ne figure pas au second membre. Passant v_k au second membre, il vient

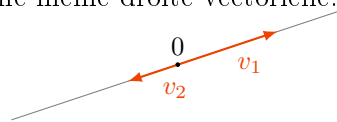
$$0 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots - v_k + \dots + \mu_p v_p,$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire pour \mathcal{F} (puisque $-1 \neq 0$) et ainsi la famille \mathcal{F} est liée.

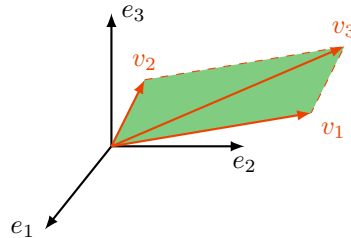
□

Interprétation géométrique de la dépendance linéaire

— Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.



— Dans \mathbb{R}^3 , trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires. Ils sont donc dans un même plan vectoriel.



Proposition 2. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Si \mathcal{F} contient plus de n éléments (c'est-à-dire $p > n$), alors \mathcal{F} est une famille liée.

Démonstration. Supposons que

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_p = \begin{pmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{pmatrix}.$$

L'équation

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$$

donne alors le système suivant

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \dots + v_{1p}x_p = 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \dots + v_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \dots + v_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène de n équations à p inconnues. Lorsque $p > n$, ce système a des solutions non triviales (voir le chapitre « Systèmes linéaires », dernier théorème) ce qui montre que la famille \mathcal{F} est une famille liée. \square

Mini-exercice.

- (1) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre de \mathbb{R}^2 ? Même question avec la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 .
- (2) Montrer que toute famille contenant une famille liée est liée.
- (3) Montrer que toute famille incluse dans une famille libre est libre.

3.2. Famille génératrice.

Définition 4. Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La famille $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une famille **génératrice** de F (ou encore **engendre** F) si $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$.

Exemple 11. La famille constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendre le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $z = 0$.

Exemple 12. Considérons par exemple les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 . La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice car tout vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sont ici $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$.

Exemple 13. Soient maintenant les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 . Les vecteurs $\{v_1, v_2\}$ ne forment pas une famille génératrice de \mathbb{R}^3 . Par exemple, le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\text{Vect}(v_1, v_2)$. En effet, si c'était le cas, alors il existerait $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Ce qui s'écrirait aussi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. (La première et la dernière ligne impliquent $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, ce qui est incompatible avec la deuxième.)

Exemple 14. Dans \mathbb{R}^2 .

- Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $\{v_1, v_2\}$ est génératrice de \mathbb{R}^2 car tout vecteur de \mathbb{R}^2 se décompose comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Soient maintenant $v'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\{v'_1, v'_2\}$ est aussi une famille génératrice. En effet, soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément quelconque de \mathbb{R}^2 . Montrer que v est combinaison linéaire de v'_1 et v'_2 revient à démontrer l'existence de deux réels λ et μ tels que $v = \lambda v'_1 + \mu v'_2$. Il s'agit donc d'étudier l'existence de solutions au système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu = y \end{cases}$$

Il a pour solution $\lambda = x - y$ et $\mu = -x + 2y$, et ceci, quels que soient les réels x et y . Ceci prouve qu'il peut exister plusieurs familles finies différentes, non incluses les unes dans les autres, engendrant le même espace vectoriel.

En application de la théorie des systèmes linéaires, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3. Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Si $r < n$, alors cette famille n'est pas une famille génératrice de \mathbb{R}^n .

Démonstration. Soit v un vecteur de \mathbb{R}^n de coordonnées (b_1, \dots, b_n) . Dire que v est dans l'espace engendré par la famille $\{v_1, \dots, v_r\}$ revient à dire qu'il existe une solution à l'équation

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = v$$

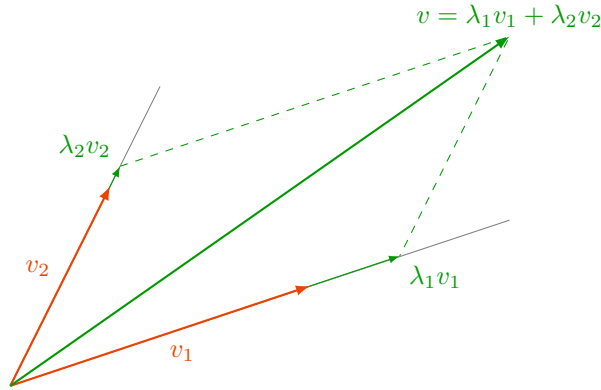
d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$. Cette équation correspond à un système linéaire de n équations à r inconnues, dont le second membre est donné par les coordonnées de v . On applique la méthode du pivot de Gauss pour échelonner ce système. La forme échelonnée, sans le second membre, aura au plus r lignes non nulles. Par contre par la méthode du pivot de Gauss, les $n - r$ dernières coordonnées du second membre de la forme échelonnée seront des combinaisons non nulles des coefficients de v . En particulier on pourra choisir des valeurs des coordonnées de v qui rendent le système incompatible. Pour ces valeurs, le vecteur v ne sera pas dans $\text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$.

□

Mini-exercice.

- (1) À quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 ?
- (2) Même question avec la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 .
- (3) Montrer qu'une famille de vecteurs contenant une famille génératrice est encore une famille génératrice de E .

3.3. Base. La notion de base généralise la notion de repère. Dans \mathbb{R}^2 , un repère est donné par un couple de vecteurs non colinéaires. Dans \mathbb{R}^3 , un repère est donné par un triplet de vecteurs non coplanaires. Dans un repère, un vecteur se décompose suivant les vecteurs d'une base.



Définition 5. Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La famille $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une **base** de F si $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une famille libre et si elle engendre F .

Théorème 5. Une base de \mathbb{R}^n possède exactement n éléments.

Démonstration. Une base est une famille libre, donc elle a au plus n éléments. Elle est génératrice, donc elle a au moins n éléments.

□

Une base permet d'exprimer les vecteurs de \mathbb{R}^n en fonction de leur *coordonnées*.

Théorème 6. Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de \mathbb{R}^n . Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} . Autrement dit, il **existe** des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ **uniques** tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Remarque.

- (1) $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur v dans la base \mathcal{B} .
- (2) Il faut observer que pour une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ on introduit un **ordre** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permute les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.

Démonstration du théorème 6.

- Par définition, \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^n , donc pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

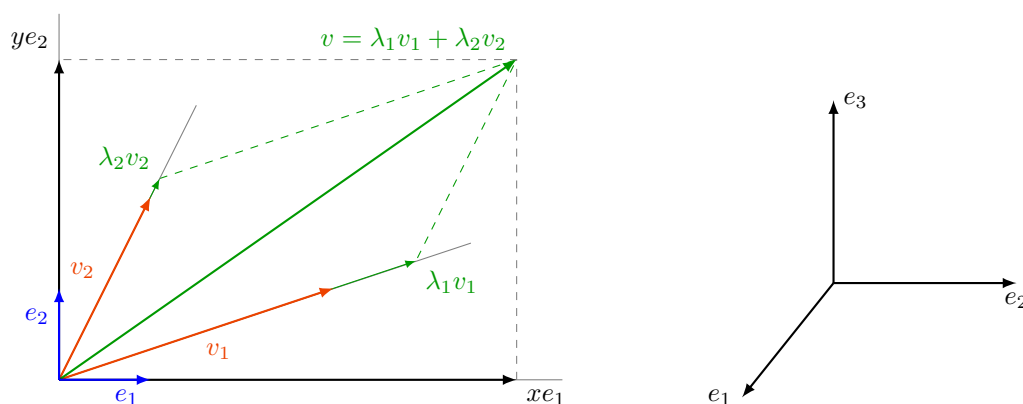
Cela prouve la partie existence.

- Il reste à montrer l'unicité des $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ d'autres scalaires tels que $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$. Alors, par différence on a : $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$. Comme $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre, ceci implique $\lambda_1 - \mu_1 = 0$, $\lambda_2 - \mu_2 = 0$, \dots , $\lambda_n - \mu_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, \dots , $\lambda_n = \mu_n$.

□

Exemple 15.

- (1) Soient les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors (e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^2 , appelée **base canonique** de \mathbb{R}^2 .
- (2) Soient les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors (v_1, v_2) forment aussi une base de \mathbb{R}^2 .



- (3) De même dans \mathbb{R}^3 , si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (e_1, e_2, e_3) forment la **base canonique** de \mathbb{R}^3 .

Exemple 16. Les vecteurs de \mathbb{R}^n :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de \mathbb{R}^n , appelée la **base canonique** de \mathbb{R}^n .

Exemple 17. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrons que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Dans les deux premiers points, nous ramenons le problème à l'étude d'un système linéaire.

- (1) Montrons d'abord que \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 . Soit $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Ceci se reformule comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci conduit au système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_1 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_2 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = a_3. \end{cases}$$

Il nous restera à montrer que ce système a une solution $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

- (2) Pour montrer que \mathcal{B} est une famille libre, il faut montrer que l'unique solution de

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ceci équivaut à montrer que le système

$$(S') \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

a une unique solution

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

(3) Nous pouvons maintenant répondre à la question sans explicitement résoudre les systèmes.

Remarquons que les deux systèmes ont la même matrice de coefficients. On peut donc montrer simultanément que \mathcal{B} est une famille génératrice et une famille libre de \mathbb{R}^3 en montrant que la matrice des coefficients est inversible. En effet, si la matrice des coefficients est inversible, alors (S) admet une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ quel que soit (a_1, a_2, a_3) et d'autre part (S') admet la seule solution $(0, 0, 0)$.

Cette matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Elle est bien inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : \mathcal{B} est une famille libre et génératrice ; c'est une base de \mathbb{R}^3 .

Remarque. L'exemple 17 se généralise de la façon suivante. Pour montrer que n vecteurs de \mathbb{R}^n forment une base de \mathbb{R}^n , il suffit de montrer la chose suivante : la matrice A constituée des composantes de ces vecteurs (chaque vecteur formant une colonne de A) est inversible.

Application : montrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

forment aussi une base de \mathbb{R}^n .

Remarque. On verra plus tard (dans le cours sur les espaces vectoriels de dimension finie) que toutes les bases d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ont le même nombre d'éléments. Le cardinal d'une base de F est appelé la **dimension** de F .

Proposition 4. Une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 est de dimension un. Un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 est de dimension deux.

Démonstration. La représentation paramétrique d'une droite du plan ou de l'espace fournit un vecteur non nul qui engendre la droite. La famille constituée de ce vecteur est donc libre et génératrice. C'est donc une base.

De même pour un plan vectoriel, la représentation paramétrique fournit une famille de deux vecteurs linéairement indépendants qui engendrent le plan. Cette famille de deux vecteurs est donc une base du plan vectoriel.

□

Exemple 18. Considérons le plan P de \mathbb{R}^3 d'équation cartésienne $x + 2y - z = 0$. Une représentation paramétrique en est donnée par

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} z-2y \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ainsi

$$P = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

De plus la famille $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre. En effet si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} -2\lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\lambda = \mu = 0$. Ainsi $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de P .

Mini-exercice.

- (1) Trouver toutes les façons d'obtenir une base de \mathbb{R}^2 avec les vecteurs suivants : $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- (2) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ de \mathbb{R}^3 . En extraire une base.
- (3) Déterminer une base du sous-espace vectoriel E_1 de \mathbb{R}^3 d'équation $x + 3y - 2z = 0$. Compléter cette base en une base de \mathbb{R}^3 . Idem avec E_2 vérifiant les deux équations $x + 3y - 2z = 0$ et $y = z$.

4. APPLICATION LINÉAIRE

Soient

$$f_1 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_2 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \quad \dots \quad f_n : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

n fonctions de p variables réelles à valeurs réelles ; chaque f_i est une fonction :

$$f_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_p)$$

On construit une application

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)).$$

4.1. Applications linéaires.

Définition 6. Une application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$ est dite une **application linéaire** si

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p \end{cases}$$

En notation matricielle, on a

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

ou encore, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice (a_{ij}) ,

$$f(X) = AX.$$

Autrement dit, une application linéaire $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $X \mapsto AX$. La matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée la **matrice de l'application linéaire** f dans la base canonique.

Remarque.

- On a toujours $f(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$. Si on note 0 pour le vecteur nul dans \mathbb{R}^p et aussi dans \mathbb{R}^n , alors une application linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$.
- Le nom complet de la matrice A est : la matrice de l'application linéaire f de la base canonique de \mathbb{R}^p vers la base canonique de \mathbb{R}^n ! On verra plus tard qu'on peut associer d'autres matrices à f si on choisit d'autres bases.

Exemple 19. La fonction $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} y_1 &= -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ y_2 &= 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ y_3 &= 7x_1 - 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

est une application linéaire. Elle s'exprime sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 20.

- Pour l'application linéaire identité $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, sa matrice associée est l'identité I_n (car $I_n X = X$).
- Pour l'application linéaire nulle $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (0, \dots, 0)$, sa matrice associée est la matrice nulle $0_{n,p}$ (car $0_{n,p} X = 0$).

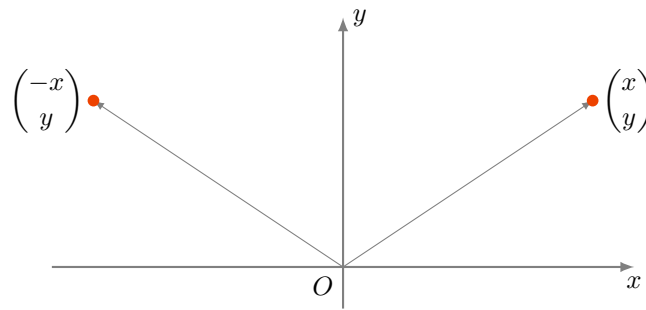
4.2. Exemples géométriques d'applications linéaires.

4.2.1. *Réflexion par rapport à l'axe (Oy).* La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

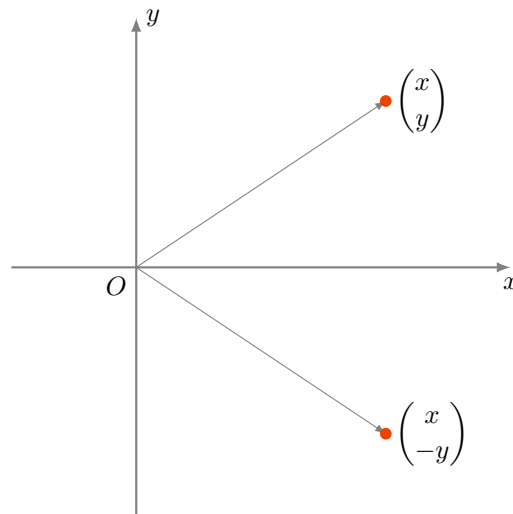
est la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$



4.2.2. *Réflexion par rapport à l'axe (Ox)*. La réflexion par rapport à l'axe des abscisses (Ox) est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

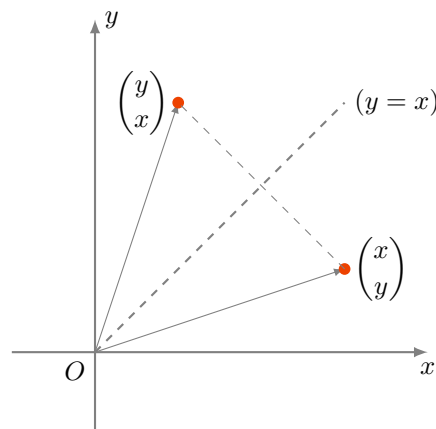


4.2.3. *Réflexion par rapport à la droite ($y = x$)*. La réflexion par rapport à la droite ($y = x$) est donnée par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

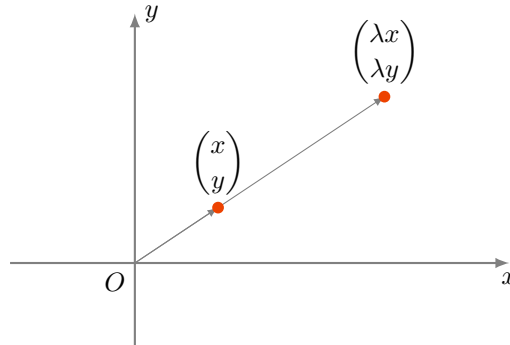


4.2.4. *Homothéties.* L'homothétie de rapport λ centrée à l'origine est :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors la matrice de l'homothétie est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2.$$

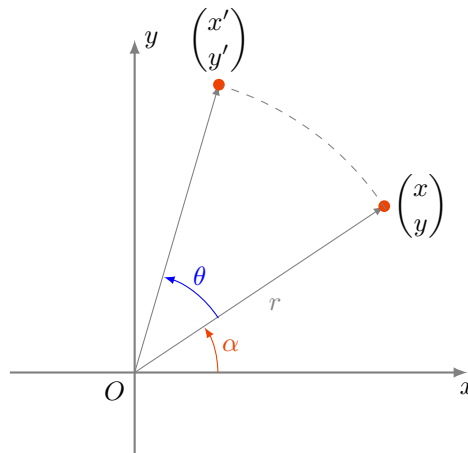


Remarque. La translation de vecteur $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u_0 \\ y + v_0 \end{pmatrix}.$$

Si c'est une translation de vecteur non nul, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors *ce n'est pas* une application linéaire, car $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.2.5. *Rotations.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ , centrée à l'origine.



Si le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait un angle α avec l'horizontale et que le point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est à une distance r de l'origine, alors

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}.$$

Si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dénote l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la rotation d'angle θ , on obtient :

$$\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x' = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ y' = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \end{cases}$$

(où l'on a appliqué les formules de trigonométrie pour $\cos(\alpha + \theta)$ et $\sin(\alpha + \theta)$).

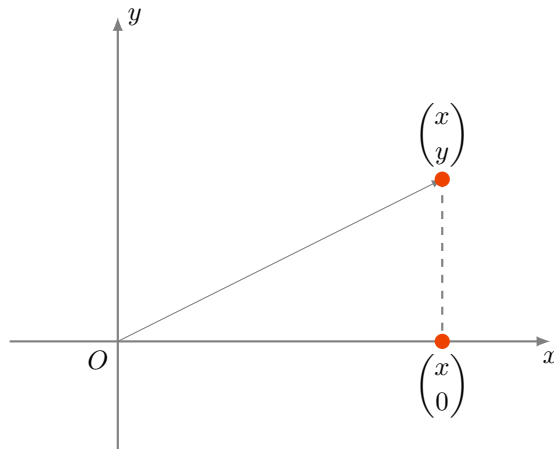
On aboutit à

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la rotation d'angle θ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

4.2.6. Projections orthogonales.



L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale sur l'axe (Ox) . C'est une application linéaire donnée par la matrice

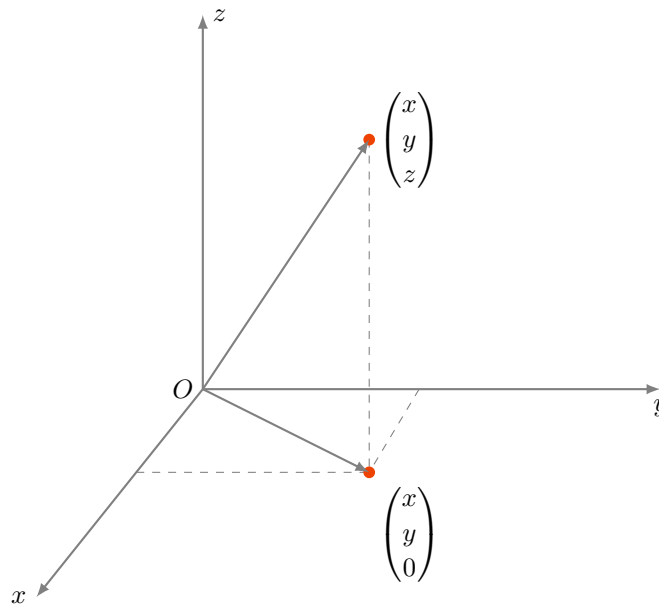
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale sur le plan (Oxy) et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



De même, la projection orthogonale sur le plan (Oxz) est donnée par la matrice de gauche ; la projection orthogonale sur le plan (Oyz) par la matrice de droite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.7. *Réflexions dans l'espace.* L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

est la réflexion par rapport au plan (Oxy) . C'est une application linéaire et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De même, les réflexions par rapport aux plans (Oxz) (à gauche) et (Oyz) (à droite) sont données par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mini-exercice.

- (1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer et dessiner l'image par f de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et plus généralement de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dessiner l'image par f du carré de sommets $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dessiner l'image par f du cercle inscrit dans ce carré.
- (2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer l'image par f de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et plus généralement de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- (3) Écrire la matrice de la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{3}$ centrée à l'origine. Idem dans l'espace avec la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe (Ox) .

(4) Écrire la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur l'axe (Oy) .

5. PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS LINÉAIRES

5.1. Composition d'applications linéaires et produit de matrices.

Proposition 5. Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. Alors leur composition $f \circ g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire dont la matrice est

$$\boxed{\text{Mat}(f \circ g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(g)}$$

Démonstration. Notons :

- $A = \text{Mat}(f) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice associée à f ,
- $B = \text{Mat}(g) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ est la matrice associée à g ,
- $C = \text{Mat}(f \circ g) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ est la matrice associée à $f \circ g$.

On a pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^q$:

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(BX) = A(BX) = (AB)X.$$

Donc la matrice associée à $f \circ g$ est $C = AB$.

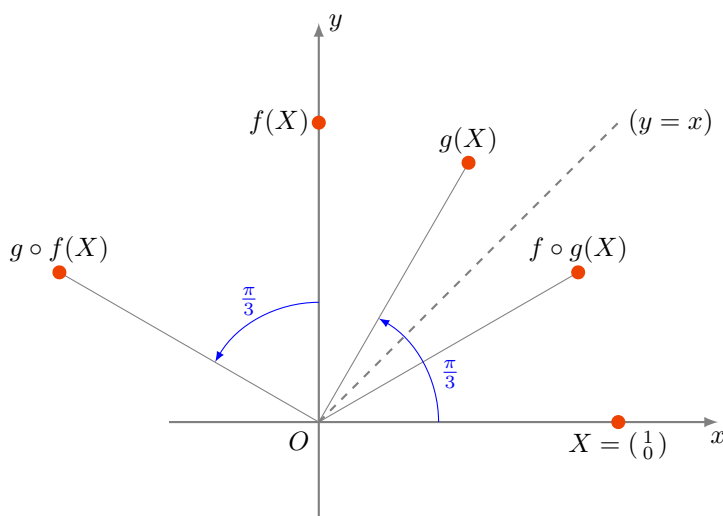
□

En fait le produit de matrices, qui au premier abord peut sembler bizarre et artificiel, est défini exactement pour vérifier cette relation.

Exemple 21. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ (centrée à l'origine). Les matrices sont

$$A = \text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Voici pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ les images $f(X)$, $g(X)$, $f \circ g(X)$, $g \circ f(X)$:



Alors

$$C = \text{Mat}(f \circ g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Notons que si l'on considère la composition $g \circ f$ alors

$$D = \text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \times \text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Les matrices $C = AB$ et $D = BA$ sont distinctes, ce qui montre que la composition d'applications linéaires, comme la multiplication des matrices, n'est pas commutative en général.

5.2. Application linéaire bijective et matrice inversible.

Théorème 7. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective (injective et surjective) si et seulement si sa matrice associée dans la base canonique $A = \text{Mat}(f) \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

Corollaire 1. Si f est bijective, alors f^{-1} est linéaire et

$$\text{Mat}(f^{-1}) = (\text{Mat}(f))^{-1}.$$

Démonstration. L'application f est définie par $f(X) = AX$. Donc si f est bijective, alors d'une part $f(X) = Y \iff X = f^{-1}(Y)$, mais d'autre part $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$. Conséquence : f^{-1} est linéaire et la matrice de f^{-1} est A^{-1} . □

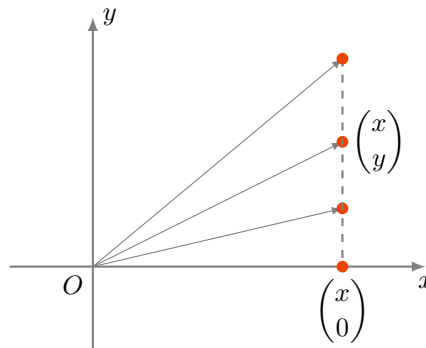
Exemple 22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ . Alors $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la rotation d'angle $-\theta$.

On a

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}(f^{-1}) = (\text{Mat}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Exemple 23. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe (Ox) . Alors f n'est pas injective. En effet, pour x fixé et tout $y \in \mathbb{R}$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. L'application f n'est pas non plus surjective : ceci se vérifie aisément car aucun point en-dehors de l'axe (Ox) n'est dans l'image de f .



La matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; elle n'est pas inversible.

La preuve du théorème 7 est une conséquence directe du théorème suivant, vu dans le chapitre sur les matrices :

Théorème 8. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La matrice A est inversible.
- (ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Pour tout second membre Y , le système linéaire $AX = Y$ a une unique solution X .

Voici donc la preuve du théorème 7.

Démonstration. — Si A est inversible, alors pour tout vecteur Y le système $AX = Y$ a une unique solution X , autrement dit pour tout Y , il existe un unique X tel que $f(X) = AX = Y$. f est donc bijective.

— Si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur X non nul tel que $AX = 0$. En conséquence on a $X \neq 0$ mais $f(X) = f(0) = 0$. f n'est pas injective donc pas bijective. \square

5.3. Caractérisation des applications linéaires.

Théorème 9. Une application $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire si et seulement si pour tous les vecteurs u, v de \mathbb{R}^p et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(i) \quad f(u + v) = f(u) + f(v),$$

$$(ii) \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Remarque. Dans le cadre général des espaces vectoriels, ce sont les deux propriétés (i) et (ii) qui définissent une application linéaire.

Voici la preuve du théorème 9.

Démonstration. Supposons $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire, et soit A sa matrice. On a $f(u + v) = A(u + v) = Au + Av = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda f(u)$.

Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application qui vérifie (i) et (ii). Nous devons construire une matrice A telle que $f(u) = Au$. Notons d'abord que (i) implique que $f(v_1 + v_2 + \dots + v_r) = f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_r)$. Notons (e_1, \dots, e_p) les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^p .

Soit A la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont

$$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p).$$

$$\text{Pour } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad \text{alors} \quad X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p$$

et donc

$$\begin{aligned} AX &= A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p) \\ &= Ax_1 e_1 + Ax_2 e_2 + \dots + Ax_p e_p \\ &= x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + \dots + x_p A e_p \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_p f(e_p) \\ &= f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + \dots + f(x_p e_p) \\ &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p) = f(X). \end{aligned}$$

On a alors $f(X) = AX$, et f est bien une application linéaire (de matrice A). \square

La démonstration du théorème implique de plus :

Corollaire 2. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire, et soient e_1, \dots, e_p les vecteurs de base canonique de \mathbb{R}^p . Alors la matrice de f (dans les bases canoniques de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n) est donnée par

$$\text{Mat}(f) = (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \cdots \quad f(e_p)) ;$$

autrement dit les vecteurs colonnes de $\text{Mat}(f)$ sont les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, \dots, e_p) .

Exemple 24. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_1 - 4x_2 \\ y_3 = 5x_1 + x_2 + x_3 \\ y_4 = 3x_2 + 2x_3 . \end{cases}$$

Calculons les images des vecteurs de la base canonique $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Donc la matrice de f est :

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exemple 25. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ et soit g la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{6}$ centrée à l'origine. Calculons la matrice de l'application $f \circ g$. La base canonique de \mathbb{R}^2 est formée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f \circ g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad f \circ g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de $f \circ g$ est :

$$\text{Mat}(f \circ g) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Mini-exercice.

- (1) Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 associée à la matrice $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et g l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 associée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ? Si oui, calculer leur matrice.
- (2) Les applications linéaires associées aux matrices suivantes (dans les bases canoniques) sont-elles bijectives ? $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.
- (3) Quel est l'image du vecteur e_1 par l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 associée à la matrice $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$? Et l'image de e_2 ? De $e_1 + e_2$?