THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

On a vu les droites du plan et les droites et plans de l'espaces comme des ensembles de solutions d'équations cartésiennes. On généralise cela en plus grande dimension.

1. La théorie

1.1. Définitions.

Définition 1. On appelle ***équation linéaire*** dans les variables (ou ***inconnues***) $x_1, \dots, x_p$ toute relation de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b, \tag{1}$$

où $a_1, \dots, a_p$ et b sont des nombres réels donnés.

Remarque.
- Ces équations linéaires sont *implicites*, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les variables, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre les variables.
- *Résoudre* une équation signifie donc la rendre *explicite*, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les variables peuvent prendre. C'est la même différence qu'entre les équations cartésiennes et les représentations paramétriques des droites ou plans.
- On peut aussi considérer des équations linéaires de nombres rationnels ou de nombres complexes.

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

Définition 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un ***système de n équations linéaires à p inconnues*** $x_1, \dots, x_p$ est une liste de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \dots, x_p$.

On écrit usuellement de tels systèmes en n lignes placées les unes sous les autres.

Exemple 1. Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

La forme générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\leftarrow \text{équation } 1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & (\leftarrow \text{équation } 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i & (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n & (\leftarrow \text{équation } n) \end{array}\right.$$

Les nombres a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, sont les ***coefficients*** du système. Les nombres b_i, $i = 1, \dots, n$, constituent le ***second membre*** du système.

Remarque. Bien ranger les variables verticalement !

Dans l'exemple 1, on a $n = 2$ (nombre d'équations = nombre de lignes), $p = 3$ (nombre d'inconnues = nombre de colonnes à gauche du signe =) et $a_{11} = 1$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -3$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 9$.

Définition 3. Une ***solution*** du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L' ***ensemble des solutions du système*** est l'ensemble de tous ces p-uplets.

Exemple 2. Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

admet comme solution $(-18, -6, 1)$, c'est-à-dire

$$x_1 = -18\,, \qquad x_2 = -6\,, \qquad x_3 = 1\,.$$

Par contre, $(7, 2, 0)$ ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

En règle générale, on s'attache à déterminer l'ensemble des solutions d'un système linéaire. C'est ce que l'on appelle ***résoudre*** le système linéaire. Ceci amène à poser la définition suivante.

Définition 4. On dit que deux systèmes linéaires sont ***équivalents*** s'ils ont le même ensemble de solutions.

À partir de là, le jeu pour résoudre un système linéaire donné consistera à le transformer en un système équivalent dont la résolution sera plus simple que celle du système de départ. Nous verrons plus loin comment procéder de façon systématique pour arriver à ce but.

1.2. **Différents types de systèmes.** Voici un résultat théorique important pour les systèmes linéaires.

Théorème 1. Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

En particulier, si vous trouvez 2 solutions différentes à un système linéaire, alors c'est que vous pouvez en trouver une infinité ! Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit ***incompatible***. La preuve de ce théorème sera vue dans le cours sur les matrices, avec l'étude des systèmes échelonnés réduits.

1.3. **Systèmes homogènes.** Un cas particulier important est celui des ***systèmes homogènes***, pour lesquels $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$. Cette solution est appelée *solution triviale*. Géométriquement, dans le cas 2×2, un système homogène correspond à deux droites qui passent par l'origine, $(0, 0)$ étant donc toujours solution.

Mini-exercices.

(1) Écrire un système linéaire de 4 équations et 3 inconnues qui n'a aucune solution. Idem avec une infinité de solution. Idem avec une solution unique.

(2) Montrer que si un système linéaire *homogène* a une solution $(x_1, \dots, x_p) \neq (0, \dots, 0)$, alors il admet une infinité de solutions.

2. Résolution par la méthode du pivot de Gauss

2.1. Systèmes échelonnés.

Définition 5. Un système est ***échelonné*** si :
- le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est ***échelonné réduit*** si en plus :
- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple 3.
- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné (mais pas réduit).
- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ n'est pas échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).

Il se trouve que les systèmes linéaires sous une forme échelonnée réduite sont particulièrement simples à résoudre.

Exemple 4. Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues est échelonné et réduit.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & +2x_3 & & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Ce système se résout trivialement en

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 25-2x_3 \\ x_2 & = & 16+2x_3 \\ x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$

En d'autres termes, pour toute valeur de x_3 réelle, les valeurs de x_1, x_2 et x_4 calculées ci-dessus fournissent une solution du système, et on les a ainsi toutes obtenues. On peut donc décrire entièrement l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \big\{(25-2x_3, 16+2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\big\}.$$

Proposition 1. Considérons un système $\mathcal{S}$ échelonné réduit à n équations et p inconnues avec des coefficients réels (ou complexes) :

$$\left\{\begin{array}{llllllcll} x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots\cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\leftarrow \text{équation } 1) \\ & x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots\cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & (\leftarrow \text{équation } 2) \\ & & \ddots & & & \vdots & = & \vdots & \\ & & & & x_m+\cdots & +a_{mp}x_p & = & b_m & (\leftarrow \text{équation } m) \\ & & & & & 0 & = & b_{m+1} & \\ & & & & & \vdots & = & \vdots & \\ & & & & & 0 & = & b_n & (\leftarrow \text{équation } n) \end{array}\right.$$

Alors

(1) si un des b_i, pour $i \geqslant m+1$, n'est pas nul, $\mathcal{S}$ n'a pas de solution.
On suppose désormais $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$.

(2) Si $p > m$, $\mathcal{S}$ a une infinité de solutions,

(3) Si $p = m$, $\mathcal{S}$ a une unique solution.

Démonstration. Au tableau.

□

2.2. **Opérations sur les équations d'un système.** Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations (c'est-à-dire sur les lignes) qui sont :

(1) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une équation par un réel non nul.

(2) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j.

(3) $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Exemple 5. Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \quad (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & \quad (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \quad (L_3) \end{array}\right.$$

Commençons par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: on soustrait à la deuxième équation deux fois la première équation. On obtient un système équivalent avec une nouvelle deuxième ligne (plus simple) :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \\ & -2y & -2z & = & -6 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

On continue pour faire apparaître un coefficient 1 en tête de la deuxième ligne ; pour cela on divise la ligne L_2 par -3 :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 & \end{array}\right.$$

On continue ainsi

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \\ & & 4z & = & -4 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \\ & & z & = & -1 & \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & & = & 4 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & & = & 6 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ & y & & = & 4 & \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right.$$

On aboutit à un système réduit et échelonné :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2}$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2, 4, -1)$.

La méthode utilisée pour cet exemple est reprise et généralisée dans le paragraphe suivant.

2.3. **Méthode du pivot de Gauss.** La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire. Nous allons décrire cet algorithme sur un exemple. Il s'agit d'une description précise d'une suite d'opérations à effectuer, qui dépendent de la situation et d'un ordre précis. Ce processus aboutit toujours (et en plus assez rapidement) à un système échelonné puis réduit, qui conduit immédiatement aux solutions du système.

Partie A. Passage à une forme échelonnée.

Soit le système suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Comme ce n'est pas le cas ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{array}\right. \qquad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2}$$

Nous avons déjà un coefficient 1 devant le x_1 de la première ligne. On dit que nous avons un ***pivot*** en position $(1, 1)$ (première ligne, première colonne). Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne.

Il n'y a pas de terme x_1 sur le deuxième ligne. Faisons disparaître le terme x_1 de la troisième ligne ; pour cela on fait l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{array}\right. \qquad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

On change le signe de la seconde ligne ($L_2 \leftarrow -L_2$) pour faire apparaître 1 au coefficient du pivot $(2, 2)$ (deuxième ligne, deuxième colonne) :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{array}\right. \qquad {\scriptstyle L_2 \leftarrow -L_2}$$

On fait disparaître le terme x_2 de la troisième ligne, puis on fait apparaître un coefficient 1 pour le pivot de la position $(3, 3)$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & 2x_3 & +10x_4 & = & 8 \end{array}\right. \qquad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 & \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 & \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}\right.$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée.

Partie B. Passage à une forme réduite.

Il reste à le mettre sous la forme échelonnée réduite. Pour cela, on ajoute à une ligne des multiples adéquats des lignes situées au-dessous d'elle, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

On fait apparaître des 0 sur la troisième colonne en utilisant le pivot de la troisième ligne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -2x_2 & & 2x_4 & = & -8 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 & \end{array}\right.$$

On fait apparaître des 0 sur la deuxième colonne (en utilisant le pivot de la deuxième ligne) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & -4x_4 & = & -2 & \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 & \end{array}\right.$$

Le système est sous forme échelonnée réduite.

Partie C. Solutions. Le système est maintenant très simple à résoudre. En choisissant x_4 comme variable libre, on peut exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = 4x_4 - 2, \quad x_2 = 3x_4 + 3, \quad x_3 = -5x_4 + 4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$$\mathcal{S} = \big\{(4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\big\}.$$

2.4. **Systèmes homogènes.** Le fait que l'on puisse toujours se ramener à un système échelonné réduit implique le résultat suivant :

Théorème 2. Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.

Remarque. C'est le cas des droites du plan passant par l'origine, ou des droites et plans de l'espace passant par l'origine. Ça sera le cas plus généralement des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (non réduit au vecteur nul) que l'on verra plus tard.

Exemple 6. Considérons le système homogène

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 13x_5 = 0 \\ x_3 + 20x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

On pose comme variables libres x_2 et x_5 pour avoir

$$x_1 = -x_2 - 13x_5, \qquad x_3 = -20x_5, \qquad x_4 = 2x_5,$$

et l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \big\{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}\big\}$$

qui est bien infini.

Mini-exercices.

(1) Écrire un système linéaire à 4 équations et 5 inconnues qui soit échelonné mais pas réduit. Idem avec échelonné, non réduit, dont tous les coefficients sont 0 ou $+1$. Idem avec échelonné et réduit.

(2) Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(3) Si l'on passe d'un système (S) par une des trois opérations élémentaires à un système (S'), alors quelle opération permet de passer de (S') à (S) ?

(4) Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

(5) Résoudre le système suivant, selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + 2z = b \\ 2y + 2z = 4 \end{cases}$$