# APPLICATION LINÉAIRE EN DIMENSION FINIE

Ce chapitre est l'aboutissement de toutes les notions d'algèbre linéaire vues jusqu'ici :

— espaces vectoriels,
— dimension,
— applications linéaires,
— matrices.

Nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène à l'étude des matrices.

# 1. Rang d'une application linéaire

## 1.1. Construction et caractérisation.

**Théorème 1.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On suppose $E$ de dimension finie $n$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
Alors pour tout choix $(v_1, \dots, v_n)$ de $n$ vecteurs de $F$, il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad f(e_i) = v_i.$$

**Exemple 1.** Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}[X]$ telle que $f(e_i) = (X+1)^i$ pour $i = 1, \dots, n$ (où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i (X+1)^i.$$

*Démonstration.*

— *Unicité.* Soit $f$ répondant à la problématique. Pour $x \in E$, il existe des scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Comme $f$ est linéaire, on a

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i. \tag{$*$}$$

Donc, si elle existe, $f$ est unique.

— *Existence.* Montrons qu'une application définie par l'équation $(*)$ est linéaire et vérifie $f(e_i) = v_i$.

(1) Si $(x_1, \ldots, x_n)$ (resp. $y = (y_1, \ldots, y_n)$) sont les coordonnées de $x$ (resp. $y$) dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) f(e_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) + \mu \sum_{i=1}^n y_i f(e_i) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

(2) Les coordonnées de $e_i$ sont $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donc $f(e_i) = 1 \cdot v_i = v_i$.

$\square$

1.2. **Rang d'une application linéaire.**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**Proposition 1.** Si $E$ est de dimension finie, alors :

— $\operatorname{Im} f = f(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$.

*Démonstration.* On montre que tout élément de $\operatorname{Im} f$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

— Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe un élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$.

— Il existe des scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Par linéarité de $f$, on en déduit que

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

□

**Définition 1.** La dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est appelée ***rang de $f$*** :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)}$$

**Exemple 2.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (3x-4y+2z, 2x-3y-z)$. Quel est le rang de $f$ ?

La matrice de $f$ dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

les colonnes étant égales à $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ respectivement.

Le rang de $f$ est donc égale au rang de $A$.

***Estimons le rang sans faire de calculs.***

— Nous avons une famille de 3 vecteurs donc $\operatorname{rg} f \leqslant 3$.

— Les vecteurs $v_1, v_2, v_3$ vivent dans un espace de dimension 2 donc $\operatorname{rg} f \leqslant 2$.

— $f$ n'est pas l'application linéaire nulle donc $\operatorname{rg} f \geqslant 1$.

Donc le rang de $f$ vaut 1 ou 2.

Il est facile de voir que $v_1$ et $v_2$ sont linéairement indépendants, donc le rang est 2 :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \dim \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3) = 2$$

**Remarque :** il est encore plus facile de voir que le rang de la matrice $A$ est 2 en remarquant que ses deux seules lignes ne sont pas colinéaires.

1.3. **Théorème du rang.** Le théorème du rang donne une relation entre la dimension du noyau et la dimension de l'image d'une application linéaire.

**Théorème 2** (Théorème du rang)**.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E$ étant de dimension finie. Alors

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Autrement dit : $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f.$$

*Démonstration.* (1) Soit $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$.

(2) Il existe des vecteurs $\epsilon_{p+1}, \ldots, \epsilon_n$ de $E$ tels que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ soit une base de $E$ (*théorème de la base incomplète*).

(3) Alors $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \ldots, f(\epsilon_n)$, donc par les vecteurs $f(\epsilon_{p+1}), \ldots, f(\epsilon_n)$.

(4) Montrons que ces vecteurs forment une famille libre.

Soient $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ des scalaires tels que

$$\alpha_{p+1} f(\epsilon_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\epsilon_n) = 0.$$

ou encore ($f$ est linéaire)

$$f\left(\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n\right) = 0$$

ou encore

$$\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n \in \operatorname{Ker} f.$$

Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n = \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_p \epsilon_p$$

(*car* $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ *est une base de* $\operatorname{Ker} f$) ou encore

$$-\lambda_1 \epsilon_1 - \cdots - \lambda_p \epsilon_p + \alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n = 0.$$

Alors

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

car $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de $E$.
Les vecteurs $f(\epsilon_{p+1}), \ldots, f(\epsilon_n)$ définissent donc bien une base de $\operatorname{Im} f$ qui est donc de dimension $n - p$.

$\square$

**Exemple 3.** Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & \multicolumn{2}{l}{(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4)} \end{array}$$

***Calculons le rang de $f$ et la dimension du noyau de $f$.***

On va utiliser deux méthodes :

(1) on calcule d'abord la dimension du noyau,

(2) on calcule d'abord la dimension de l'image.

— **Première méthode.** On calcule d'abord le noyau :

$$\begin{aligned} (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On résout ce système ...

et on trouve qu'il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On choisit $x_3$ et $x_4$ comme paramètres et on trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{(-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Les deux vecteurs définissant le noyau sont linéairement indépendants, donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

D'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$$

— **Deuxième méthode.** On calcule d'abord l'image. On note $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculons $v_i = f(e_i)$ :

$$v_1 = f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad v_2 = f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 = f(e_3) = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix} \quad v_4 = f(e_4) = f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$$

On réduit la matrice $A$, formée des vecteurs colonnes, sous une forme échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le rang de $A$ est 2, ainsi

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\big) = 2$$

Par le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg} f = 4 - 2 = 2.$$

1.4. **Application linéaire entre deux espaces de même dimension.**

**Théorème 3.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec $E$ et $F$ de dimension finie et $\dim E = \dim F$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $f$ est bijective
(ii) $f$ est injective
(iii) $f$ est surjective

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
f \text{ est injective} &\iff \dim \operatorname{Im} f = \dim E \quad \text{(par le théorème du rang)}\\
&\iff \dim \operatorname{Im} f = \dim F \quad \text{(par l'hypothèse } \dim E = \dim F\text{)}\\
&\iff \operatorname{Im} f = F \quad (\text{car} \quad \operatorname{Im} f \subset F)\\
&\iff f \text{ est surjective}
\end{aligned}$$

$\square$

**Exemple 4.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$.

***Est-ce que $f$ est bijective ?***

**Première méthode.** L'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x,y) = 0 \iff (x-y, x+y) = (0,0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $f$ est injective et donc, par le théorème 3, que $f$ est un isomorphisme.

**Seconde Méthode.** On peut aussi montrer que la matrice de $f$ dans les bases canoniques est inversible...

On peut enfin démontrer un résultat annoncé dans le cours sur les matrices.

**Proposition 2.** Si une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet un inverse à droite, c'est-à-dire il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I$, alors $A$ est inversible.

*Démonstration.*

(1) Montrons l'existence d'un inverse à gauche. Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M) = MA$.

(a) $f$ est une application linéaire, car

$$f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A = \lambda f(M) + \mu f(N).$$

(b) $f$ est injective : si $f(M) = O$, cela donne $MA = O$. On multiplie cette égalité par $B$ à droite :

$$MAB = OB \quad \text{ou encore} \quad M = MI = O.$$

(c) Par le théorème 3, $f$ est donc aussi surjective.

(d) Alors la matrice identité est dans l'image de $f$ : il existe $C \in M_n(\mathbb{K})$ tel que

$$f(C) = I \quad \text{ou encore} \quad CA = I.$$

(2) Montrons l'égalité des inverses. Calculons $CAB$ de deux façons :

$$(CA)B = IB = B \qquad \text{et } C(AB) = CI = C$$

donc $B = C$.

$\square$

**Mini-exercice.**

(1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z, 2y + 3z)$. Calculer une base du noyau de $f$, une base de l'image de $f$ et vérifier le théorème du rang.

(2) Même question avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-y+z, x+z, x+y)$.

(3) Lorsque c'est possible, calculer la dimension du noyau, le rang et dire si $f$ peut être injective, surjective, bijective :
- Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$.
- Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$.
- Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$.
- Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$.

## 2. Matrice d'une application linéaire

Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On va noter

— $p$ la dimension de $E$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$.

— $n$ la dimension de $F$ et soit $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$

On a vu que :

— $f$ est déterminée de façon unique par l'image d'une base de $E$.

— Pour tout $j$, le vecteur $f(e_j)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de $F$.

Il existe donc $n$ scalaires uniques $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1,j}f_1 + a_{2,j}f_2 + \cdots + a_{n,j}f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

**Important :** $f$ est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$.

**Définition 2.** La ***matrice de l'application linéaire*** $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j$-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \ldots & f(e_j) & \ldots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

**Dit autrement :** c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par $f$ des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$.

**Remarque.**

— La taille de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépend uniquement de $\dim E$ et $\dim F$.

— Les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépendent eux du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

— On avait rencontré dans le cours sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ le cas où les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étaient les bases canoniques.

**Exemple 5.** Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{smallmatrix}\right).$$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) ***Quelle est la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*** ?

- On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- De même $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.
- Enfin $f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est donc $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) On va changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Considérons les vecteurs

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

***Quelle est la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$*** ? On a :

$$f(\epsilon_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\phi_1 - \phi_2$$
$$f(\epsilon_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$$
$$f(\epsilon_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\phi_1 + \phi_2$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

### 2.1. Opérations sur les applications linéaires et les matrices.

**Proposition 3.** Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$. Alors :
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

*Démonstration.* Exercice. $\square$

**Attention :**
- la matrice associée à la somme de deux applications linéaires est donc la somme des matrices ***à condition de considérer les mêmes bases*** sur les espaces de départ et d'arrivée pour les deux applications.
- Idem avec le produit par un scalaire.

Soit $G$ un autre espace vectoriel de dimension finie.

**Proposition 4.** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires et soient $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\mathcal{B}'$ une base de $F$ et $\mathcal{B}''$ une base de $G$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}$$

**Autrement dit :** à condition de bien choisir les bases, la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elles, dans le même ordre.

**Remarque.**
La démonstration est proche de celle vu dans le cours sur les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$.
Il faut cependant faire attention aux choix des bases.

*Démonstration.* Soit

- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$,
- $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$,
- $\mathcal{B}'' = (g_1, \dots, g_q)$ une base de $G$.

Écrivons

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $f$,
- $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{ij}) \in M_{q,n}(\mathbb{K})$ la matrice de $g$,
- $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = (c_{ij}) \in M_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $g \circ f$.

On a

$$\begin{array}{rcll}(g \circ f)(e_1) & = & g\big(f(e_1)\big) & \\ & = & g(a_{11}f_1 + \cdots + a_{n1}f_n) & \text{par définition de } A \\ & = & a_{11}g(f_1) + \cdots + a_{n1}g(f_n) & \text{par linearité de } g \\ & = & a_{11}\Big(b_{11}g_1 + \cdots + b_{q1}g_q\Big) + \cdots + a_{n1}\Big(b_{1n}g_1 + \cdots + b_{qn}g_q\Big) & \end{array}$$

Ainsi, la première colonne de $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ est

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{n1}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} + \cdots + a_{n1}b_{2n} \\ \vdots \\ a_{11}b_{q1} + \cdots + a_{n1}b_{qn} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est aussi la première colonne de la matrice $BA$.

Il reste à faire la même chose avec les autres colonnes. $\square$

**Exemple 6.** On pose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$. Soient
— $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $E$,
— $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de $F$, et
— $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2)$ une base de $G$.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ des applications linéaires de matrices

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

***Calculons la matrice*** $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ ***de deux façons différentes :***

(1) via la définition de la matrice d'une application linéaire,

(2) via la proposition précédente.

(1) **Première méthode.** Exprimer $g \circ f(e_1)$ et $g \circ f(e_2)$ dans la base $(g_1, g_2)$.

— Calcul de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Par définition de $A$

$$f(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = 1f_1 + 1f_2 + 0f_3 = f_1 + f_2$$

De même,

$$f(e_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = 0f_1 + 1f_2 + 2f_3 = f_2 + 2f_3$$

— Calcul des $g(f_1), g(f_2)$ et $g(f_3)$. Par définition, $g(f_j)$ correspond à la $j$-ème colonne de la matrice $B$ :

$$g(f_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = 2g_1 + 3g_2$$

De même

$$g(f_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = -g_1 + g_2, \qquad g(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''} = 2g_2$$

— Calcul de $g \circ f(e_1)$ et $g \circ f(e_2)$. Par linéarité :

$$g \circ f(e_1) = g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2) = (2g_1 + 3g_2) + (-g_1 + g_2) = g_1 + 4g_2$$

$$g \circ f(e_2) = g(f_2 + 2f_3) = g(f_2) + 2g(f_3) = (-g_1 + g_2) + 2(2g_2) = -g_1 + 5g_2$$

— Ainsi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) **Deuxième méthode.** Utilisons le produit de matrices : on sait que $C = BA$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = C = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** c'est bien plus rapide ainsi !

2.2. **Matrice d'un endomorphisme.**

— On se restreint maintenant au cas $E = F$.

— Si $\dim E = n$, alors chaque matrice associée à $f$ est une matrice carrée de taille $n \times n$.

— Si on choisit $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associée à $f$.

— Mais on peut aussi choisir deux bases distinctes pour $E$.

**Exemple 7.**

(1) $\mathrm{id} : E \to E$. Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de $E$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = I_n$.
**Attention.** Ce n'est plus vrai si $\mathcal{B}'$ est différente de $\mathcal{B}$.

(2) Homothétie $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ (où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le rapport de l'homothétie) : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.

(3) Symétrie centrale $s : E \to E$, $s(x) = -x$ : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.

(4) Cas de $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta$, centrée à l'origine, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la ***base canonique*** $\mathcal{B}$. Alors $r_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\,\theta + y\cos\theta)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

**Proposition 5.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Alors, quel que soit $p \in \mathbb{N}$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^p$$

Autrement dit, si $A$ est la matrice associée à $f$, alors la matrice associée à $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ occurrences}}$ est $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

*Démonstration.* La démonstration (laissée en exercice) est une récurrence sur $p$ en utilisant la proposition 4. □

**Exemple 8.** Soit $r_\theta$ la matrice de la rotation d'angle $\theta$ dans $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique. La matrice de $r_\theta^p$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta)\big)^p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^p$$

Un calcul par récurrence montre ensuite que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la matrice de la rotation d'angle $p\theta$ : composer $p$ fois la rotation d'angle $\theta$ revient à effectuer une rotation d'angle $p\theta$.

**Théorème 4.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\mathcal{B}'$ une base de $F$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

(1) $f$ est bijective si et seulement si la matrice $A$ est inversible. Autrement dit, $f$ est un isomorphisme si et seulement si sa matrice associée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

(2) De plus, si $f : E \to F$ est bijective, alors la matrice de l'application linéaire $f^{-1} : F \to E$ de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A^{-1}$. Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1}$.

Voici le cas particulier très important d'un endomorphisme $f : E \to E$ où $E$ est muni de la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

**Corollaire 1.**
- $f$ est bijective si et seulement si $A$ est inversible.
- Si $f$ est bijective, alors la matrice associée à $f^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $A^{-1}$.

Autrement dit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$.

*Preuve du théorème 4.* On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

— Si $f$ est bijective, notons $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$. Alors par la proposition 4 on sait que

$$BA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I.$$

De même $AB = I$.

Ainsi $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible et son inverse est $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$.

— Réciproquement, supposons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ inversible. Soit $g : F \to E$ l'application linéaire telle que $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$. Alors, toujours par la proposition 4 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A^{-1}A = I$$

Donc la matrice de $g \circ f$ dans loa base $\mathcal{B}$ est l'identité.

Ceci implique $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Ainsi $f$ est bijective (et sa bijection réciproque est $g$).

□

**Mini-exercice.**

(1) Calculer la matrice associée aux applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base canonique :

   (a) $f_1$ la symétrie par rapport à l'axe $(y = x)$,

   (b) $f_2$ la projection orthogonale sur l'axe $(Oy)$.

(2) Calculer les matrices associées à $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$,

(3) Lorsque c'est possible, calculer la matrice associée à $f_i^{-1}$.

## 3. Changement de bases

3.1. **Application linéaire, matrice, vecteur.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $E$. Pour chaque $x \in E$, il existe un $p$-uplet unique d'éléments de $\mathbb{K}$ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

La matrice des coordonnées de $x$ est un vecteur colonne, noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ ou encore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Dans $\mathbb{R}^p$, si $\mathcal{B}$ est la base canonique, alors on note simplement

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

en omettant de mentionner la base.

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

***Le but de ce paragraphe est de traduire l'égalité vectorielle*** $y = f(x)$ ***par une égalité matricielle.***

Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$.

**Proposition 6.**

— Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

— Pour $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

— Pour $y \in F$, notons $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Alors, si $y = f(x)$, on a

$$\boxed{Y = AX}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

$$\boxed{Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = AX}$$

*Démonstration.*

— On pose $\quad \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p), \qquad \mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n),$

$A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad$ et $\quad X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$

— On a

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right).$$

En utilisant la commutativité de $\mathbb{K}$, on a donc

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j\right) f_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j\right) f_n.$$

— La matrice $Y$ des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est ainsi :

$$Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix}.$$

— Or

$$AX = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix}.$$

□

**Exemple 9.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est égale à

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

***On se propose de déterminer le noyau de $f$ et l'image de $f$.***

Les éléments $x$ de $E$ sont des combinaisons linéaires de $e_1$, $e_2$ et $e_3$ : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. On a

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} f & \iff f(x) = 0_E \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss. On trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{ x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ -t \\ t \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{K} \right\} = \operatorname{Vect}\left( \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right) \end{aligned}$$

Le noyau est donc de dimension 1.

Par le théorème du rang, l'image $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2.

Les deux premiers vecteurs de la matrice

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

étant linéairement indépendants, ils engendrent $\operatorname{Im} f$ :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left( \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right)$$

3.2. **Matrice de passage d'une base à une autre.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.

**Définition 3.** Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de $E$.

On appelle ***matrice de passage*** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, et on note $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la $j$-ème colonne est formée des coordonnées du $j$-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$dans la base $\mathcal{B}$.

**Exemple 10.** Soit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. On considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

***Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ ?***

Il faut exprimer $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ en fonction de $(e_1, e_2)$. On calcule que :

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est donc :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

***On va interpréter une matrice de passage comme la matrice associée à l'application identité de $E$ par rapport à des bases bien choisies.***

**Proposition 7.** La matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{id}_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}$$

**Attention** à l'inversion de l'ordre des bases !

*Démonstration.* On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$. On considère

$$\begin{array}{rcrcl} \mathrm{id}_E & : & (E,\mathcal{B}') & \longrightarrow & (E,\mathcal{B}) \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

On a

$$\mathrm{id}_E(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice dont la $j$-ème colonne est formée des coordonnées de $e'_j$ par rapport à $\mathcal{B}$, soit $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Par définition de la matrice de passage, c'est aussi la $j$-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. $\square$

**Proposition 8.**

(1) La matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$ : $\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$

(2) Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors $\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$

*Démonstration.*

(1) On a $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)$. Donc, d'après le théorème 4 caractérisant la matrice d'un isomorphisme,

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{id}_E^{-1}\right).$$

Or $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$, donc

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,.$$

(2) $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}'') \to (E, \mathcal{B})$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, \mathcal{B}'') \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathcal{B}') \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathcal{B}).$$

Autrement dit, on écrit $\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E$. Cette factorisation permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right),$$

soit

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}\,.$$

□

**Exemple 11.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Définissons

$$\mathcal{B}_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

***Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ ?***

On a d'abord

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La proposition 8 implique que $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Donc on a

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}^{-1} \times \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}.$$

Après calcul de l'inverse, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier l'effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur.

— Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
— Soit $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
— Pour $x \in E$, il se décompose en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

— Ce même $x \in E$ se décompose en $x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ dans la base $\mathcal{B}'$ et on note

$$X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

**Proposition 9.**

$$\boxed{X = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de la proposition 6 ($Y = AX$) et du fait que $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$. □

3.3. **Formule de changement de base.**

- Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de $E$.
- Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de $F$.
- Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.
- Soit $Q = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire $f$ de la base $\mathcal{B}_E$ vers la base $\mathcal{B}_F$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire $f$ de la base $\mathcal{B}'_E$ vers la base $\mathcal{B}'_F$.

**Théorème 5** (Formule de changement de base)**.**

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

*Démonstration.* L'application $f : (E, \mathcal{B}'_E) \to (F, \mathcal{B}'_F)$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, \mathcal{B}'_E) \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{f} (F, \mathcal{B}_F) \xrightarrow{\mathrm{id}_F} (F, \mathcal{B}'_F),$$

c'est-à-dire que $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$.

On a donc l'égalité de matrices suivante :

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(\mathrm{id}_F) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{P}_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} \\ &= Q^{-1}AP \end{aligned}$$

□

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, nous obtenons une formule plus simple :

— Soit $f : E \to E$ une application linéaire.
— Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$.
— Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
— Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de l'application linéaire $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
— Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de l'application linéaire $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Le théorème 5 devient alors :

**Corollaire 2.**

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

**Exemple 12.** Reprenons les deux bases de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple 11 :

$$\mathcal{B}_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

***Que vaut la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}_2$ ?***

(1) Nous avions calculé que la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ était

$$P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On calcule aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) On applique la formule du changement de base du corollaire 2 :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\ -2 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

**Remarque :** L'intérêt des changements de base est de se ramener à une matrice plus simple.

Par exemple ici, il est facile de calculer les puissances $B^k$, pour en déduire les $A^k$.

En effet pour $k \in \mathbb{N}$ :

$$B^k = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0\\ 0 & 0 & 3^k\end{pmatrix}$$

d'où

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3-3^{k+1}\\ 2-2^{k+1} & 2^k & 6-5\cdot 2^k-3^k\\ 0 & 0 & 3^k\end{pmatrix}.$$

3.4. **Pour aller plus loin : les matrices semblables.** Les matrices considérées dans ce paragraphe sont des matrices carrées, éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

**Définition 4.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice $B$ est ***semblable*** à la matrice $A$ s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

La relation « être semblable » est une relation d'équivalence dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ :

**Proposition 10.**
- La relation est ***réflexive*** : une matrice $A$ est semblable à elle-même.
- La relation est ***symétrique*** : si $A$ est semblable à $B$, alors $B$ est semblable à $A$.
- La relation est ***transitive*** : si $A$ est semblable à $B$, et $B$ est semblable à $C$, alors $A$ est semblable à $C$.

Le corollaire 2 se reformule ainsi :

**Corollaire 3.** Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.

**Mini-exercice.** (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$f(x,y) = (2x+y, 3x-2y).$$
Soit $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ avec ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_1 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calculer la matrice de $f$ dans la base canonique.

(b) Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.

(c) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.

(d) En déduire les coordonnées de $v$ dans la base $\mathcal{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

(e) Calculer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

(2) Même exercice dans $\mathbb{R}^3$ avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y,z) = (x-2y, y-2z, z-2x)$$
$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
et
$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$