ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

— Les espaces vectoriels qui sont engendrés par un nombre fini de vecteurs sont appelés espaces vectoriels de dimension finie.
— Pour ces espaces, nous allons voir comment calculer une base.
— Le nombre de vecteurs dans une base s'appelle la dimension et nous verrons comment calculer la dimension des espaces et des sous-espaces.

1. Famille libre

1.1. **Définition.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1. Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une ***famille libre*** ou ***linéairement indépendante*** si toute combinaison linéaire égale au vecteur nul

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \ldots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est ***liée*** ou ***linéairement dépendante***.

Exemple 1. Les polynômes

$$P_1(X) = 1 - X, \quad P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2, \quad P_3(X) = 1 + 3X - X^2$$

forment une famille liée dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, car

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

Exemple 2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la famille $\{\cos, \sin\}$. C'est une famille libre.

En effet, supposons que l'on ait $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

- En particulier, pour $x = 0$, cette égalité donne $\lambda = 0$.
- pour $x = \frac{\pi}{2}$, elle donne $\mu = 0$.
- Donc la famille $\{\cos, \sin\}$ est libre.

En revanche la famille $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ est liée car on a la relation de dépendance linéaire

$$\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0.$$

Les coefficients de dépendance linéaire sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

Théorème 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $p \geqslant 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Démonstration. Similaire au cas de $\mathbb{R}^n$. Voir le fichier du cours pour les détails. $\square$

2. Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition 2. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une ***famille génératrice*** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ***engendre*** l'espace vectoriel E.

Remarque. Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Exemple 3. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Alors les polynômes $\{1, X, \ldots, X^n\}$ forment une famille génératrice. Par contre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes ne possède pas de famille génératrice finie.

Nous chercherons bientôt à avoir un nombre minimal de générateurs.

Proposition 1. Si la famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ engendre E et si l'un des vecteurs, par exemple v_p, est combinaison linéaire des autres, alors la famille $\{v_1, \ldots, v_p\} \setminus \{v_p\} = \{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ est encore une famille génératrice de E.

Démonstration. Pour tout élément v de E, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Or l'hypothèse se traduit par l'existence de scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ tels que

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Alors, le vecteur v s'écrit :

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + \lambda_p \left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}\right).$$

Donc

$$v = \left(\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1\right) v_1 + \cdots + \left(\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}\right) v_{p-1},$$

ce qui prouve que v est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_{p-1}$. $\square$

3. Base

Définition 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une ***base*** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre ***et*** génératrice de E.

Théorème 2. Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il ***existe*** des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ***uniques*** tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Démonstration. Similaire au cas de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Remarque.

(1) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent les ***coordonnées*** du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Il faut observer que pour une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ on introduit un ***ordre*** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permutait les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.

(3) Notez que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi \quad : \quad \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ vers l'espace vectoriel E.

Exemple 4. Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la ***base canonique*** de $\mathbb{K}^n$.

Voici quelques autres exemples :

Exemple 5.

(1) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !

(2) Voici une autre base de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$(1, 1+X, 1+X+X^2, \ldots, 1+X+X^2+\cdots+X^n)$$

(3) L'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 admet une base formée des vecteurs :

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

En effet, n'importe quelle matrice $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4.$$

Théorème 3 (Théorème de la base incomplète)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration. On considère l'ensemble de toutes les sous-familles libres d'éléments de $\mathcal{G}$. Cet ensemble est

— non vide puisqu'il contient $\mathcal{L}$,

— fini.

On en choisit une de cardinal maximum. Notons la $\mathcal{B}$, et montrons que c'est une base de E.

— Déjà $\mathcal{B}$ est libre par construction.

— Pour $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$, la famille $\mathcal{B} \cup \{g\}$ est de cardinal plus grand que celui de $\mathcal{B}$, donc est liée.

— Comme $\mathcal{B}$ est libre, c'est que g est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

— Ceci étant vrai pour tous les éléments de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$, on en déduit

$$\operatorname{Vect} \mathcal{B} = \operatorname{Vect} \mathcal{G} = E.$$

Donc $\mathcal{B}$ est aussi génératrice de E. C'est donc une base de E.

$\square$

Corollaire 1. Tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie admet une base.

Démonstration. Choisir pour $\mathcal{L}$ la famille constituée d'un unique élément (non nul) de la famille génératrice. $\square$

Mini-exercice.

(1) Montrer que les quatre matrices suivantes forment une base de $M_2(\mathbb{R})$:

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Donner une base de l'espace vectoriel des matrices 3×3 ayant une diagonale nulle.

4. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de ***dimension finie***.

On va pouvoir parler de ***la*** dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

Théorème 4 (Théorème de la dimension)**.** Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

La démonstration est compliquée. Nous en donnerons l'idée plus tard. Les détails sont disponibles sur le fichier du cours.

Définition 5. La ***dimension*** d'un espace vectoriel de dimension finie E, notée $\dim E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E.

Convention. On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0\}$ la dimension 0.

Exemple 6.

(1) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right))$. La dimension de $\mathbb{R}^2$ est donc 2.

(2) Les vecteurs $(\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$, et illustrent qu'une autre base contient le même nombre d'éléments.

(3) Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, car par exemple sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ contient n éléments.

(4) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, qui contient $n+1$ éléments.

Exemple 7. Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :

— $\mathbb{R}[X]$: l'espace vectoriel de tous les polynômes,
— $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
— $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des suites réelles.

4.1. Schéma de démonstration du théorème de la dimension.

$$\text{Lemme 1} \implies \text{Proposition 2} \implies \text{Théorème de la dimension.}$$

On va accepter la démonstration du Lemme 1 :

Lemme 1. Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre et soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors $\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{G}$.

Proposition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base ayant n éléments. Alors :

(1) Toute famille libre de E a au plus n éléments.

(2) Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Démonstration. En effet, soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\operatorname{Card}\mathcal{B} = n$.

— On applique le lemme 1 à la famille $\mathcal{B}$ considérée génératrice ; alors une famille libre $\mathcal{L}$ vérifie $\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{B} = n$.

— On applique le lemme 1 à la famille $\mathcal{B}$ considérée maintenant comme une famille libre, alors une famille génératrice $\mathcal{G}$ vérifie $n = \operatorname{Card}\mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{G}$.

$\square$

On en déduit le théorème de la dimension via :

Corollaire 2. Si E est un espace vectoriel admettant une base ayant n éléments, alors toute base de E possède n éléments.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

- $\mathcal{B}$ est une famille libre, donc possède au plus n éléments,
- $\mathcal{B}$ est une famille génératrice, donc possède au moins n éléments,
- donc $\mathcal{B}$ possède exactement n éléments.

$\square$

Théorème 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E,

(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E,

(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Démonstration.

— (i) $\implies$ (ii) et (i) $\implies$ (iii) sont immédiates.

— (ii) $\implies$ (i). Soit $\mathcal{F}$ est une famille libre ayant n éléments.

  — On la complète en une base $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ de E.

  — Donc $\operatorname{Card}\left(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'\right) = n$.

  — Or $\operatorname{Card} \mathcal{F} = n$, donc $\operatorname{Card} \mathcal{F}' = 0$ et $\mathcal{F}' = \varnothing$,

  et donc $\mathcal{F}$ est déjà une base de E.

— (iii) $\implies$ (i). Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.

  — On extrait de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

  — $\operatorname{Card} \mathcal{B} = n$, d'où $n = \operatorname{Card} \mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{F} = n$.

  Donc $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est bien une base.

$\square$

Exemple 8. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs (v_1, v_2, v_3) suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

— À quelle condition la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Cela implique le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_2 & = & 0 \\ (t-4)\lambda_2 + (t-4)\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ (t-4)\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

— Si $t \neq 4$, alors la seule solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ et donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre.

— Si $t = 4$, alors par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -1)$ est une solution non nulle, donc la famille n'est pas libre.

Conclusion : si $t \neq 4$ la famille est libre, donc par le théorème 5 la famille (v_1, v_2, v_3) est en plus génératrice, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $t = 4$, la famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

Mini-exercice. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse par un résultat du cours ou un contre-exemple :

(1) Une famille de $p \geqslant n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est génératrice.

(2) Une famille de $p > n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est liée.

(3) Une famille de $p < n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est libre.

(4) Une famille génératrice de $p \leqslant n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est libre.

(5) Une famille de $p \neq n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n n'est pas une base.

(6) Toute famille libre à p éléments d'un espace vectoriel de dimension n se complète par une famille ayant exactement $n-p$ éléments en une base de E.

5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

- il contient le sous-espace vectoriel $F_1 = \mathbb{R}_n[X]$ des (fonctions) polynômes de degré $\leqslant n$, qui est de dimension finie ;
- et aussi le sous-espace vectoriel $F_2 = \mathbb{R}[X]$ de l'ensemble des (fonctions) polynômes, qui lui est de dimension infinie.

5.1. **Dimension d'un sous-espace vectoriel.**

Théorème 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie ;
(2) $\dim F \leqslant \dim E$;
(3) $F = E \iff \dim F = \dim E$.

Démonstration.

(1)
- Si $F \neq \{0\}$, il existe des familles libres dans F, et elles ont au plus $n = \dim E$ éléments.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de F de cardinal maximal. On va montrer que $F = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$.
- Sinon, soit $v \in F \setminus \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Alors la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est encore une famille libre de F, contradiction.
- Ainsi $\mathcal{F}$ engendre F, qui est donc de dimension finie.

(2) De plus $\dim F = \operatorname{Card} \mathcal{F} \leqslant \dim E$.

(3) Enfin si $\dim F = \operatorname{Card} \mathcal{F} = \dim E$, alors $\mathcal{F}$ est aussi une base de E. Donc $F = E$.

$\square$

Exemple 9. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces vectoriels de E sont :

— soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace $\{0\}$;

— soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}\{u\}$ engendrés par les vecteurs non nuls u de E ;

— soit de dimension 2 : c'est alors l'espace E tout entier.

Vocabulaire. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 2$) :

— tout sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé ***droite vectorielle***,

— tout sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé ***plan vectoriel***,

— tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé ***hyperplan*** de E.

Pour $n = 3$, un hyperplan est un plan vectoriel.

Pour $n = 2$, un hyperplan est une droite vectorielle.

Corollaire 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F est de dimension finie et que $G \subset F$. Alors :

$$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

Exemple 10. Deux droites vectorielles F et G sont soit égales, soit d'intersection réduite au vecteur nul.

Exemple 11. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$F = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Est-ce que $F = G$?

(1) Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, donc G est de dimension 2.

(2) Les vecteurs u et v appartiennent à F, donc G est contenu dans F.

(3) F est contenu strictement dans $\mathbb{R}^3$, donc $\dim F < \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(4) Puisque F contient G alors $\dim F \geqslant \dim G = 2$, donc $\dim F = 2$.

On a donc démontré que $G \subset F$ et que $\dim G = \dim F$, ce qui entraîne $G = F$.

Théorème 7 (Théorème des quatre dimensions)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Remarque. Notez l'analogie de la formule avec la formule pour les ensembles finis :

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

Preuve du théorème 7. Soit $\mathcal{B}_{F\cap G} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une base de $F \cap G$.

- On complète $\mathcal{B}_{F\cap G}$ en une base $\mathcal{B}_F = \{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de F.
- On complète $\mathcal{B}_{F\cap G}$ en une base $\mathcal{B}_G = \{u_1, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$ de G.

Montrer que la famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$.

$$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = \{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$$

- Il est clair que c'est une famille génératrice de $F + G$.
- Montrons que cette famille est libre.

Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0 \tag{1}$$

que l'on note

$$u + v + w = 0.$$

— Alors $u + v \in F$ et $u + v = -w \in G$, donc $u + v \in F \cap G$.
— Or $u \in F \cap G$, donc $v \in F \cap G$.
— Alors $\beta_j = 0$ pour tout j car les $\{v_j\}$ complètent la base de $F \cap G$.
— La combinaison linéaire nulle (1) devient $u + w = 0$.
— Or $\mathcal{B}_G$ est une base de G, donc $\alpha_i = 0$ et $\gamma_k = 0$ pour tout i, k.

Ainsi $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$.

— Il ne reste plus qu'à compter le nombre de vecteurs de chaque base :

$$\dim F \cap G = \operatorname{Card} \mathcal{B}_{F \cap G} = p,$$
$$\dim F = \operatorname{Card} \mathcal{B}_F = q,$$
$$\dim G = \operatorname{Card} \mathcal{B}_G = r,$$
$$\dim(F + G) = \operatorname{Card} \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = q + r - p.$$

Ce qui prouve bien

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

□

Corollaire 4. Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple 12. Dans un espace vectoriel E de dimension 6, on considère deux sous-espaces F et G avec $\dim F = 3$ et $\dim G = 4$. Peut-on avoir $F \oplus G = E$?

— $\dim(F \cap G) \leqslant \dim F = 3$, donc $F \cap G$ est de dimension $0, 1, 2$ ou 3.
— $\dim G \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim E = 6$, donc $F + G$ est de dimension $4, 5$ ou 6.
— Le théorème 7 des quatre dimensions nous donne la relation :

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$$

soit

$$\dim(F \cap G) = 7 - \dim(F + G)$$

— Comme $F + G$ est de dimension 4, 5 ou 6, alors la dimension de $F \cap G$ est 3, 2 ou 1.

Conclusion : F et G ne sont jamais en somme directe dans E.

La méthode de la preuve du théorème 7 des quatre dimensions implique aussi :

Corollaire 5. Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.

Mini-exercice.

(1) Soient $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-7\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\11\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $F = G$.

(2) Dans un espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces F et G vérifiant $\dim F = 3$ et $\dim G \leqslant 2$. Que peut-on dire pour $\dim(F \cap G)$? Et pour $\dim(F + G)$?

(3) Dans un espace vectoriel E de dimension finie, montrer l'équivalence entre :
(i) $F \oplus G = E$;
(ii) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$;
(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

6. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle ***rang*** de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, notée $\mathrm{rg}\{v_1, \dots, v_p\}$.

On va s'intéresser au calcul du rang. On commence par des inégalités évidentes.

Lemme 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E.

(1) Alors $0 \leqslant \mathrm{rg}\{v_1, \dots, v_p\} \leqslant p$.

(2) Si de plus E est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}\{v_1, \dots, v_p\} \leqslant \dim E$.

Remarque. Le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est nul si et seulement si $v_1 = \cdots = v_p = 0_E$. De manière similaire, le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est égal à p si et seulement si la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre.

Exemple 13. On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$.

Le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc compris entre 1 et 3.

La famille $\{v_1, v_2\}$ est libre donc le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ est au moins égal à 2.

Est-ce 2 ou 3 ?

La question est équivalente au fait que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée.

Or $v_1 = v_2 - v_3$, donc le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ est égal à 2.

Rappels :
-Le rang d'une matrice est égal au nombre de lignes non nulles obtenu après échelonnement de la matrice selon ses lignes.
-Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Ceci revient à dire que le rang est également égal au nombre de colonnes non nulles après échelonnement de la matrice ... selon ses colonnes !

Définition 7. Une matrice est échelonnée par rapport à ses colonnes si sa transposée est échelonnée par rapport à ses lignes.

Dit autrement : une matrice est échelonnée par rapport aux colonnes si le nombre de zéros commençant une colonne croît strictement colonne après colonne (à moins que toute les dernières colonnes ne soient nulles).

Voici un exemple d'une matrice échelonnée par colonnes ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & + & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 14. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée par rapport à ses colonnes alors que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas.

Exemple 15. Quel est le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

En faisant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$, $C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1$, on obtient des zéros sur la première ligne à droite du premier pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

On échange C_2 et C_3 par l'opération $C_2 \leftrightarrow C_3$ pour avoir le coefficient -1 en position de pivot et ainsi éviter d'introduire des fractions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

En faisant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$ et $C_5 \leftarrow C_5 + 5C_2$, on obtient des zéros à droite de ce deuxième pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix}$$

Enfin, en faisant les opérations $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ et $C_5 \leftarrow C_5 - 2C_3$, on obtient une matrice échelonnée par colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 colonnes non nulles : on en déduit que le rang de A est 3.

Mini-exercice.

(1) Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer son rang.

(2) Calculer le rang précédent en utilisant les vecteurs lignes.

6.1. **Matrice des coefficients d'une famille de vecteurs.** On suppose E de dimension finie, et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Chaque vecteurs d'une famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ se décompose sous la forme

$$v_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n.$$

La matrice des coefficients de $\{v_1, \ldots, v_p\}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne représente les coefficients du vecteurs v_j dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Le rang de la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est égal au rang de la matrice de ses coefficients dans la base $\mathcal{B}$.

Pour la démonstration, on va combiner deux lemmes.

Avant, on reprend l'exemple 13.

Exemple 16. La matrice des vecteurs $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ et $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

On l'échelonne en

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim_{C_3 \to C_3 + C_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim_{C_3 \to C_3 - C_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

qui est bien de rang égal à 2 conformément à l'exemple 13.

Premier lemme.

Lemme 3. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonnes d'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ ne change pas lorsque l'on applique à A une des trois opérations élémentaires sur ses colonnes.

Démonstration. — Le résultat est évident pour l'échange de deux colonnes.

— Idem pour la multiplication d'une colonne par un scalaire non nul.

— Montrons le dans le cas où on ajoute à la colonne C_i de A le produit de la colonne C_j de A, pour $i \neq j$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Il s'agit de montrer l'égalité

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_p) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p).$$

Déjà l'inclusion

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p) \subset \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_p)$$

est facile. Pour démontrer l'inclusion

$$\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_p) \subset \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p),$$

il suffit de vérifier que C_i est combiniasion linéaire de $C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_p$. Or

$$C_i = (C_i + \lambda C_j) - \lambda C_j$$

et on obtient l'égalité désirée.

$\square$

Second lemme.

Lemme 4. Soit A une matrice échelonnée par rapport à ses colonnes. Alors le rang de A est égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes.

Démonstration. Notons $C_1, \dots, C_r$ les colonnes non nulles de A.

Il suffit donc de montrer que la famille $\{C_1, \dots, C_r\}$ est libre. Supposons qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r = 0.$$

En transposant cette égalité, on obtient donc

$$\lambda_1 \, {}^tC_1 + \cdots + \lambda_r \, {}^tC_r = 0.$$

Le système linéaire correspondant est échelonné par rapport à ses lignes, et donc son unique solution est la solution nulle $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, ce qui termine la démonstration. $\square$

On peut maintenant démontrer le :

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Le rang de la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est égal au rang de la matrice de ses coefficients dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Soit A la matrice des coefficients et A' sa matrice échelonnée réduite selon les colonnes.
-D'après le premier lemme, les espaces engendrés par les colonnes de A et A' sont égaux.
-D'après le second, leur dimension est égale au rang de A'.
-Or $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$. $\square$

Corollaire 6. Soit A une matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$. Le rang de la famille des vecteurs colonnes de A est égal au rang de la famille des vecteurs lignes de A.

Par contre les sous-espaces vectoriels eux-mêmes ne sont pas égaux. Ils ne vivent même pas dans les mêmes espaces vectoriels !

Remarque. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E avec $\operatorname{Card} \mathcal{F} = \dim E$. Notons A la matrice des coefficients des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \operatorname{rg} \mathcal{F} = n \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

Mini-exercice.

(1) Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-il une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Une base ?

(2) Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-il une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Une base ?