ESPACE VECTORIEL

— C'est une structure fondamentale des mathématiques modernes.
— Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents.

Par exemple,

— on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel.
— Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel.
— Même chose avec les polynômes, les matrices,...

Contrepartie de cette grande généralité de situations : la notion d'espace vectoriel est difficile à appréhender et demandera une quantité conséquente de travail !

1. Espace vectoriel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. Dans la plupart des exemples, ce sera le corps des réels $\mathbb{R}$.

1.1. **Définition d'un espace vectoriel.** Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs tel qu'on peut

— additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u + v$ (ou $u - v$)

— multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda \cdot u$.

Voici la définition formelle :

Définition 1. Un ***$\mathbb{K}$-espace vectoriel*** est un ensemble non vide E muni d'une :

— loi de composition interne $+$, c'est-à-dire d'une application de $E \times E \to E$:

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

— loi de composition externe $\cdot$, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E \to E$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) $u+v=v+u \quad$ (pour tous $u,v \in E$)

(2) $u+(v+w)=(u+v)+w \quad$ (pour tous $u,v,w \in E$)

(3) Il existe un ***élément neutre*** $0_E \in E$ tel que $u+0_E=u \quad$ (pour tout $u \in E$)

(4) Tout $u \in E$ admet un ***symétrique*** u' tel que $u+u'=0_E$, noté $u'=-u$.

(5) $1 \cdot u = u \quad$ (pour tout $u \in E$)

(6) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u \quad$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

(7) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u,v \in E$)

(8) $(\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

Remarque. Un ensemble muni d'une loi de composition interne vérifiant les quatre premières propriétés est appelé un groupe commutatif.

1.2. **Premiers exemples.**

Exemple 1 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$)**.** Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

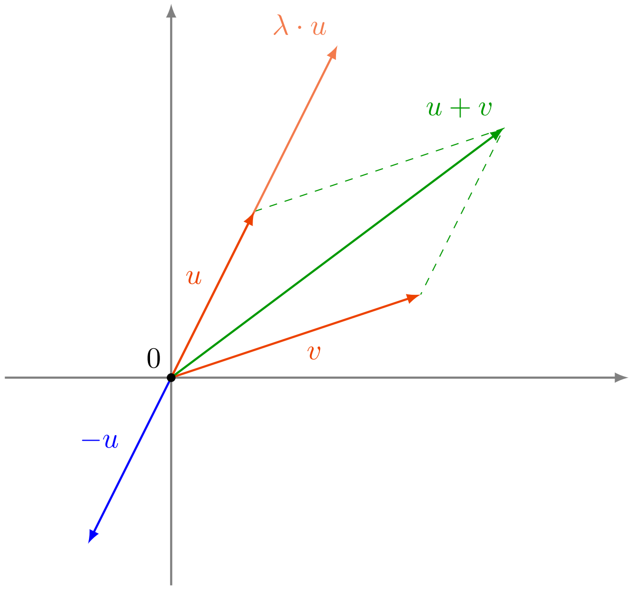
— *Définition de la loi interne.* Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

— *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.



Exemple 2 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$)**.** Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$. Un élément $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

— *Définition de la loi interne.* Si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n).$$

— *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et $(x_1, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$. Le symétrique de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \ldots, x_n)$.

De manière analogue, on peut définir le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, et plus généralement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

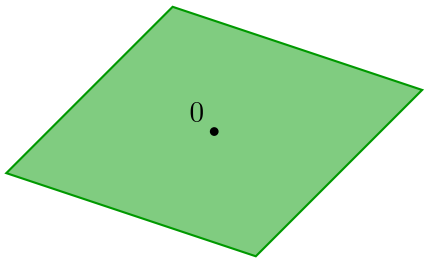
Plus généralement, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est ... un espace vectoriel. On verra la démonstration plus tard, mais déjà :

Exemple 3. Tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel (par rapport aux opérations habituelles sur les vecteurs).

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{P}$ un plan passant par l'origine. Le plan admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b et c sont des réels non tous nuls.



Un élément $u \in E$ est donc un triplet (noté ici comme un vecteur colonne) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $ax + by + cz = 0$.

On va vérifier qu'on a bien un espace vectoriel ...

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{P}$. Autrement dit,

$$\begin{array}{rrcl} & ax + by + cz & = & 0, \\ \text{et} & ax' + by' + cz' & = & 0. \end{array}$$

Alors $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ est aussi dans $\mathcal{P}$ car on a bien :

$$a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0.$$

Les autres propriétés sont aussi faciles à vérifier : par exemple l'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; et si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$, alors $ax + by + cz = 0$, que l'on peut réécrire $a(-x) + b(-y) + c(-z) = 0$ et ainsi $-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$.

Attention ! Un plan ne contenant pas l'origine n'est pas un espace vectoriel, car justement il ne contient pas le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3. **Terminologie et notations.**

— On appelle les éléments de E des ***vecteurs***. Au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

— Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des ***scalaires***.

— L' ***élément neutre*** 0_E s'appelle aussi le ***vecteur nul***. Ne pas confondre avec l'élément 0 de $\mathbb{K}$.

— Le ***symétrique*** $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'***opposé***.

— La loi de composition interne sur E est appelée couramment l'addition et $u + u'$ est appelée somme des vecteurs u et u'.

— La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire. La multiplication du vecteur u par le scalaire λ sera souvent notée simplement λu, au lieu de $\lambda \cdot u$.

Somme de n vecteurs. Il est possible de définir, par récurrence, l'addition de n vecteurs, $n \geqslant 2$:

— la structure d'espace vectoriel permet de définir l'addition de deux vecteurs (et initialise le processus).
— Si maintenant la somme de $n-1$ vecteurs est définie, alors la somme de n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est définie par

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) + v_n.$$

L'associativité de la loi $+$ nous permet de ne pas mettre les parenthèses.

On notera $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i$.

Mini-exercice.

(1) Vérifier les 8 axiomes qui font de $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Idem pour une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine définie par

$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0\,. \end{cases}$$

(3) Justifier que les ensembles suivants *ne sont pas* des espaces vectoriels :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\big\}$$
$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\big\}$$
$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\big\}$$
$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant 1\big\}$$

(4) Montrer par récurrence que si les v_i sont des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in E.$$

1.4. **Détail des axiomes de la définition.**

Loi interne.

La loi de composition interne dans E, c'est une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

- à partir de deux vecteurs u et v de E, on nous fournit un vecteur noté $u + v$.
- La loi de composition interne dans E et la somme dans $\mathbb{K}$ seront souvent toutes les deux notées $+$: **ne pas confondre !**

Loi externe.

La loi de composition externe, c'est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

— à partir d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $u \in E$, on nous fournit un autre vecteur noté $\lambda \cdot u$.

Axiomes relatifs à la loi interne.

(1) ***Commutativité.*** Pour tous $u, v \in E$, $u + v = v + u$. On peut donc additionner des vecteurs dans l'ordre que l'on souhaite.

(2) ***Associativité.*** Pour tous $u, v, w \in E$, on a $u + (v + w) = (u + v) + w$. Conséquence : on peut « oublier » les parenthèses et noter sans ambiguïté $u + v + w$.

(3) Il existe un ***élément neutre***, c'est-à-dire qu'il existe un élément de E, noté 0_E, vérifiant : pour tout $u \in E$, $u + 0_E = u$ (et on a aussi $0_E + u = u$ par commutativité). Cet élément 0_E s'appelle aussi le ***vecteur nul***.

(4) Tout élément u de E admet un ***symétrique*** (ou ***opposé***), c'est-à-dire qu'il existe un élément u' de E tel que $u + u' = 0_E$ (et on a aussi $u' + u = 0_E$ par commutativité). Cet élément u' de E est noté $-u$.

Proposition 1.

- S'il existe un élément neutre 0_E vérifiant l'axiome (3), alors il est unique.
- Soit u un élément de E. S'il existe un élément symétrique u' de E vérifiant l'axiome (4), alors il est unique.

Démonstration.

- Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments vérifiant la définition de l'élément neutre. On a alors, pour tout élément u de E :

$$u + 0_E = 0_E + u = u \qquad \text{et} \qquad u + 0'_E = 0'_E + u = u$$

  - Alors, la première propriété utilisée avec $u = 0'_E$ donne $0'_E + 0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$.
  - La deuxième propriété utilisée avec $u = 0_E$ donne $0_E + 0'_E = 0'_E + 0_E = 0_E$.
  - En comparant ces deux résultats, il vient $0_E = 0'_E$.
- Supposons qu'il existe deux symétriques de u notés u' et u''. On a :

$$u + u' = u' + u = 0_E \qquad \text{et} \qquad u + u'' = u'' + u = 0_E.$$

  Calculons $u' + (u + u'')$ de deux façons différentes, en utilisant l'associativité de la loi $+$ et les relations précédentes.
  - $u' + (u + u'') = u' + 0_E = u'$
  - $u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0_E + u'' = u''$
  - On en déduit $u' = u''$.

□

Axiomes relatifs à la loi externe.

(5) Soit 1 l'élément neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$. Pour tout élément u de E, on a

$$1 \cdot u = u.$$

(6) Pour tous éléments λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$$

Axiomes liant les deux lois.

(7) ***Distributivité*** par rapport à l'addition des vecteurs. Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$ et pour tous éléments u et v de E, on a

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

(8) ***Distributivité*** par rapport à l'addition des scalaires. Pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a :

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

La loi interne et la loi externe doivent donc satisfaire ces huit axiomes pour que $(E, +, \cdot)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1.5. **Exemples.** Dans les exemples qui suivent :

— la vérification des axiomes se fait simplement et est laissée en exercice

— on indiquera seulement les valeurs de l'élément neutre de la loi interne et du symétrique d'un élément.

Exemple 4 (L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)**.**

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Nous le munissons d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de la manière suivante.

— *Loi interne.* Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La somme des fonctions f et g, que l'on va noter $f + g$, est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(pour insister : $+$ désigne la somme de fonctions, et $+$ la somme de réels)

— *Loi externe.* Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\lambda \cdot f$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x).$$

(ici $\cdot$ désigne la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$).

— *Élément neutre.* C'est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0.$$

— *Symétrique.* Le symétrique de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x).$$

Le symétrique de f est noté $-f$.

On vérifie (au tableau) qu'ainsi pourvu, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel.

Exemple 5 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles)**.**

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; autrement dit $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

— *Loi interne.* Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites appartenant à $\mathcal{S}$. La suite $u + v$ est la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + v_n$$

(où $u_n + v_n$ désigne la somme de u_n et de v_n dans $\mathbb{R}$).

— *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{S}$, $\lambda \cdot u$ est la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda \times u_n$$

où $\times$ désigne la multiplication dans $\mathbb{R}$.

— *Élément neutre.* L'élément neutre de la loi interne est la suite dont tous les termes sont nuls.

— *Symétrique.* Le symétrique de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = -u_n.$$

Elle est notée $-u$.

Exemple 6 (Les matrices)**.** L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

— La loi interne est l'addition de deux matrices.
— La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire.
— L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls).
— Le symétrique de la matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$.

De même, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque : le produit matriciel n'apparaît pas dans la construction de l'espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Autres exemples :

(1) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$. L'addition est l'addition de deux polynômes $P(X) + Q(X)$, la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot P(X)$. L'élément neutre est le polynôme nul. L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$.

(2) L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(3) L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ...

(4) **Attention :** $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel !!!
- addition $z + z'$ de deux nombres complexes
- multiplication λz par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$
- L'élément neutre est le nombre complexe 0
- le symétrique du nombre complexe z est $-z$.

1.6. **Règles de calcul.**

Proposition 2. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

(1) $0 \cdot u = 0_E$

(2) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

(3) $(-1) \cdot u = -u$

(4) $\boxed{\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E}$

Remarque : L'opération qui à (u, v) associe $u + (-v)$ s'appelle la ***soustraction***.
Le vecteur $u + (-v)$ est noté $u - v$.
Les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$$

et

$$(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u.$$

Les démonstrations des propriétés sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels :

Démonstration. (1) $[0 \cdot u = 0_E]$

— Le point de départ de la démonstration est l'égalité dans $\mathbb{K}$: $0 + 0 = 0$.
— D'où, pour tout vecteur de E, l'égalité $(0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u$.
— Par la distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne et la définition de l'élément neutre, on obtient $0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 \cdot u$.
  On peut rajouter l'élément neutre dans le terme de droite, pour obtenir :
$$0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 \cdot u + 0_E.$$
— En ajoutant $-(0 \cdot u)$ de chaque côté de l'égalité, on obtient :
$$0 \cdot u = 0_E.$$

(2) $[\lambda \cdot 0_E = 0_E]$ La preuve est semblable en partant de l'égalité $0_E + 0_E = 0_E$.

(3) $[(-1) \cdot u = -u]$ Montrer $(-1) \cdot u = -u$ signifie exactement que $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u, c'est-à-dire vérifie $u + (-1) \cdot u = 0_E$. En effet :
$$u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E.$$

(4) $[\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E]$

On sait déjà que si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$, alors les propriétés précédentes impliquent $\lambda \cdot u = 0_E$.

Pour la réciproque, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $u \in E$ un vecteur tels que $\lambda \cdot u = 0_E$.

Supposons λ différent de 0. On doit alors montrer que $u = 0_E$.

— Comme $\lambda \neq 0$, alors λ est inversible pour le produit dans le corps $\mathbb{K}$. Soit λ^{-1} son inverse.
— En multipliant par λ^{-1} les deux membres de l'égalité $\lambda \cdot u = 0_E$, il vient : $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0_E$.
— D'où en utilisant les propriétés de la multiplication par un scalaire $(\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E$ et donc $1 \cdot u = 0_E$.
— D'où $u = 0_E$.

□

Mini-exercice.

(1) Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.

(c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.

(d) L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

(e) L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x+y) = 0$.

(f) L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.

(g) L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f'' + f = 0$.

(h) L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(x) \sin x \; dx = 0$.

(i) L'ensemble des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $a + d = 0$.

(2) Prouver les propriétés de la soustraction : $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$ et $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$.

2. Sous-espace vectoriel

2.1. Définition d'un sous-espace vectoriel.

On a déjà rencontré les sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un ***sous-espace vectoriel*** si :

— $0_E \in F$,
— $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
— $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$.

Exemple 7.

(1) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En effet :
— la fonction nulle est continue
— la somme de deux fonctions continues est continue
— une fonction continue multipliée par une constante est une fonction continue.

(2) L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2.2. **Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.**

Théorème 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.

Exemple 8.

(1) L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les fonctions).

En effet :

(a) $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions,

(b) la fonction nulle est une fonction paire,

(c) si $f, g \in \mathcal{P}$ alors $f + g \in \mathcal{P}$,

(d) si $f \in \mathcal{P}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \cdot f \in \mathcal{P}$.

(2) On peut faire de même avec l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires.

(3) De manière similaire, l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les matrices).

Démonstration du théorème 1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

- La stabilité de F pour les deux lois permet de munir F d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, en restreignant à F les opérations définies dans E.
- Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, ainsi que les quatre axiomes relatifs à la loi externe sont vérifiés, car ils sont satisfaits dans E donc en particulier dans F, qui est inclus dans E.
- L'existence d'un élément neutre découle de la définition de sous-espace vectoriel.
- Il reste à justifier que si $u \in F$, alors son symétrique $-u$ appartient à F.

  Fixons $u \in F$.
  - Comme on a aussi $u \in E$, il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_E$.
  - Comme u est élément de F, alors pour $\lambda = -1$, on a $(-1)u \in F$.

  Et ainsi $-u$ appartient à F.

$\square$

Mini-exercice. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

(1) $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0\big\}$

(2) $\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=t \text{ et } y=z\big\}$

(3) $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=1\big\}$

(4) $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+xy\geqslant 0\big\}$

(5) $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geqslant 1\big\}$

(6) $\big\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=1\big\}$

(7) $\big\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1)=0\big\}$

(8) $\big\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante }\big\}$

(9) $\big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ tend vers } 0\big\}$

2.3. **Combinaisons linéaires.** On généralise maintenant la notion de combinaison linéaire rencontrée dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 3. Soit $n \geqslant 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \dots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé ***combinaison linéaire*** des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés ***coefficients*** de la combinaison linéaire.

Remarque : Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est ***colinéaire*** à v_1.

Exemple 9.

(1) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = 1, \;\; f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = x^2, \;\; f_3(x) = x^3.$$

Alors la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque l'on a l'égalité

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$

(2) Dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. On peut écrire A naturellement sous la forme suivante d'une combinaison linéaire de matrices élémentaires (des zéros partout, sauf un 1) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. **Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.**

Théorème 2 (Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \qquad \text{pour tous } u, v \in F \quad \text{et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F.

Démonstration. Similaire au cas de $\mathbb{R}^n$. Pour les détails, voir le fichier du cours. $\square$

2.5. **Intersection de deux sous-espaces vectoriels.**
Cette notion est nouvelle.

Proposition 3 (Intersection de deux sous-espaces)**.** Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

On démontrerait de même que l'intersection $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n$ d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

— $0_E \in F$, $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E ; donc $0_E \in F \cap G$.
— Soient u et v deux vecteurs de $F \cap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$. De même $u, v \in G$ implique $u + v \in G$. Donc $u + v \in F \cap G$.
— Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda u \in F$. De même $u \in G$ implique $\lambda u \in G$. Donc $\lambda u \in F \cap G$.

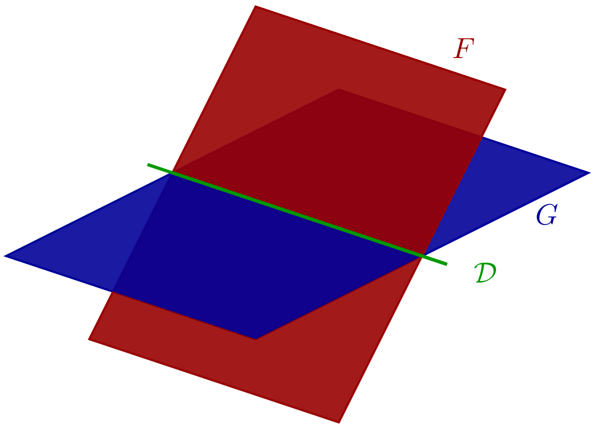
Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 10. Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y+z=0 \quad \text{et} \quad x-y+2z=0\right\}.$$

Est-ce que $\mathcal{D}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'intersection de F et G, les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y+z=0\right\}$$
$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\right\}$$



Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathcal{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est une droite vectorielle.

Remarque. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E ***n'****est* ***pas*** en général un sous-espace vectoriel de E.

Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$.

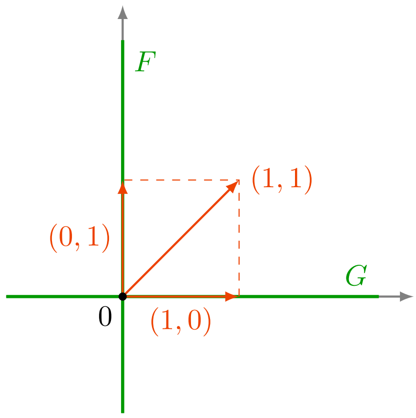
Considérons les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y) \mid x = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y) \mid y = 0\}.$$

Alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F \cup G$.



2.6. **Somme de deux sous-espaces vectoriels.**

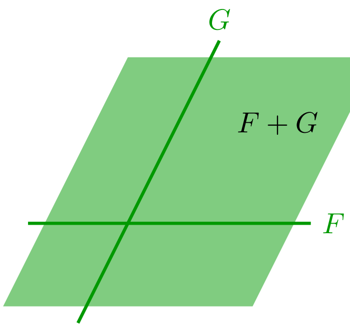
Cette notion aussi est nouvelle.

— La réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas en général un sous-espace vectoriel,

— il est utile de connaître les sous-espaces vectoriels qui contiennent à la fois les deux sous-espaces vectoriels F et G, et en particulier le plus petit d'entre eux (au sens de l'inclusion).

Définition 4 (Définition de la somme de deux sous-espaces)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u+v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé ***somme*** des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F+G$. On a donc

$$F+G=\{u+v \mid u \in F, v \in G\}.$$



Proposition 4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(1) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Démonstration.

(1) Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel.
- $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
- Soient w et w' des éléments de $F + G$.
  - Comme w est dans $F + G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$.
  - Comme w' est dans $F + G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u' + v'$.
  - Alors
  $$w + w' = (u + v) + (u' + v') = (u + u') + (v + v') \in F + G$$
  car $u + u' \in F$ et $v + v' \in G$.
- Soit w un élément de $F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$. Alors $\lambda w = \lambda(u + v) = (\lambda u) + (\lambda v) \in F + G$, car $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$.

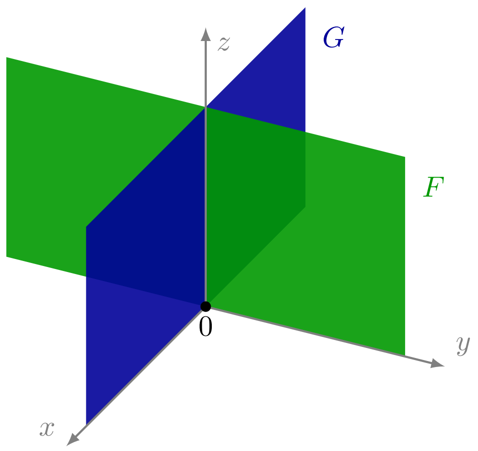
(2) — L'ensemble $F+G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u+0$ avec u appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F+G$. De même pour un élément de G.

— Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G, alors montrons que $F+G \subset H$. C'est clair : si $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u+v \in H$.

$\square$

Exemple 11. Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\right\}.$$



Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$.

— Par définition de $F + G$, tout élément de $F + G$ est dans $\mathbb{R}^3$.
— Réciproquement, si $w = (x,y,z)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $w = (x,y,z) = (0,y,z) + (x,0,0)$, avec $(0,y,z) \in F$ et $(x,0,0) \in G$, donc w appartient à $F + G$.

Attention : un élément de $\mathbb{R}^3$ ne s'écrit pas forcément de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Par exemple

$$(1,2,3) = (0,2,3) + (1,0,0) = (0,2,0) + (1,0,3).$$

2.7. **Sous-espaces vectoriels supplémentaires.**

Définition 5 (Définition de la somme directe de deux sous-espaces)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en ***somme directe*** dans E si

— $F + G = E$,
— $F \cap G = \{0_E\}$.

On note alors $F \oplus G = E$.

Si F et G sont en somme directe, on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** dans E.

Proposition 5. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière ***unique*** comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Remarque. L'existence d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel sera prouvée dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration.

- Supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $u \in E$ se décompose de manière unique.
  - Soient donc $u = v + w$ et $u = v' + w'$ avec $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$.
  - On a alors $v + w = v' + w'$, donc $v - v' = w' - w$.
  - Comme F est un sous-espace vectoriel alors $v - v' \in F$, de même $w' - w \in G$.
  - Conclusion : $v - v' = w' - w \in F \cap G$.
  - Mais par définition d'espaces supplémentaires $F \cap G = \{0_E\}$, donc $v - v' = 0_E$ et aussi $w' - w = 0_E$.

  On en déduit $v = v'$ et $w = w'$, ce qu'il fallait démontrer.
- Supposons que tout $u \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.
  - Montrons $F \cap G = \{0_E\}$. Si $u \in F \cap G$, il peut s'écrire des deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

    $$u = 0_E + u \qquad \text{et} \qquad u = u + 0_E.$$

    Par l'unicité de la décomposition, $u = 0_E$.
  - Montrons $F + G = E$. Il n'y rien à prouver, car par hypothèse tout élément u se décompose en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

□

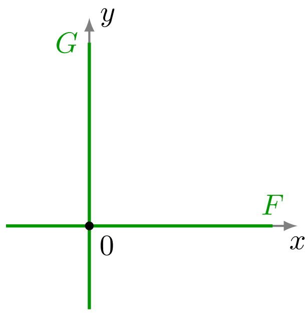
Exemple 12.

(1) Soient $F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

— Une première façon de le voir est que l'on a clairement $F \cap G = \{(0,0)\}$ et que, comme $(x,y) = (x,0) + (0,y)$, alors $F + G = \mathbb{R}^2$.

— Une autre façon de le voir est d'utiliser la proposition 5, car la décomposition $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ est unique.



(2) Gardons $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ et notons $G' = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que l'on a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$:

(a) Montrons $F \cap G' = \{(0, 0)\}$. Si $(x, y) \in F \cap G'$ alors d'une part $(x, y) \in F$ donc $y = 0$, et aussi $(x, y) \in G'$ donc $x = y$. Ainsi $(x, y) = (0, 0)$.

(b) Montrons $F + G' = \mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons $v \in F$ et $w \in G'$ tels que $u = v + w$. Comme $v = (x_1, y_1) \in F$ alors $y_1 = 0$, et comme $w = (x_2, y_2) \in G'$ alors $x_2 = y_2$. Il s'agit donc de trouver x_1 et x_2 tels que

$$(x, y) = (x_1, 0) + (x_2, x_2).$$

Donc $(x, y) = (x_1 + x_2, x_2)$. Ainsi $x = x_1 + x_2$ et $y = x_2$, d'où $x_1 = x - y$ et $x_2 = y$. On trouve bien

$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y),$$

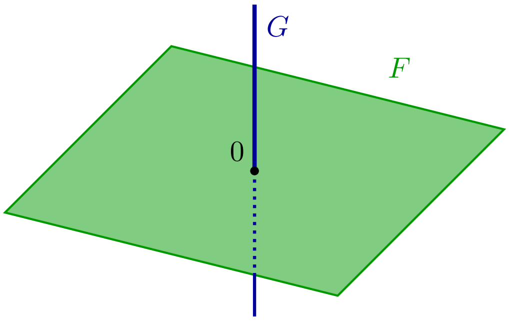
qui prouve que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G'.

Remarque. De façon plus générale, deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces supplémentaires.

Exemple 13. Est-ce que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?



(1) Il est facile de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. En effet si l'élément $u = (x,y,z)$ appartient à l'intersection de F et de G, alors les coordonnées de u vérifient : $x - y - z = 0$ (car u appartient à F), et $y = z = 0$ (car u appartient à G), donc $u = (0,0,0)$.

(2) Il reste à démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Soit donc $u = (x,y,z)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$; il faut déterminer des éléments v de F et w de G tels que $u = v + w$. L'élément v doit être de la forme $v = (y_1 + z_1, y_1, z_1)$ et l'élément w de la forme $w = (x_2, 0, 0)$. On a $u = v + w$ si et seulement si $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x - y - z$. On a donc

$$(x,y,z) = (y+z,y,z) + (x-y-z,0,0)$$

avec $v = (y+z,y,z)$ dans F et $w = (x-y-z,0,0)$ dans G.

Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exemple 14. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel des fonctions paires $\mathcal{P}$ et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires $\mathcal{I}$. Alors $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On trouvera les détails dans le fichier du cours.

2.8. Sous-espace engendré.

Théorème 3 (Théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)**.**
Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :
- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé ***sous-espace engendré par*** $v_1, \ldots, v_n$ et est noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. On a donc

$$\boxed{u \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \iff \text{il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \text{tels que} \quad u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n}$$

La démonstration du théorème se fait exactement comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 15. Soient E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f_0, f_1, f_2 les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = 1, \;\; f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2.$$

Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{f_0, f_1, f_2\}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes f de degré inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Mini-exercice.

(1) Trouver des sous-espaces vectoriels distincts F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que

  (a) $F+G=\mathbb{R}^3$ et $F\cap G\neq\{0\}$;

  (b) $F+G\neq\mathbb{R}^3$ et $F\cap G=\{0\}$;

  (c) $F+G=\mathbb{R}^3$ et $F\cap G=\{0\}$;

  (d) $F+G\neq\mathbb{R}^3$ et $F\cap G\neq\{0\}$.

(2) Soient $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$ et $G=\operatorname{Vect}\big\{(1,1,1)\big\}\subset\mathbb{R}^3$.

  (a) Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u,v tels que $F=\operatorname{Vect}(u,v)$.

  (b) Calculer $F\cap G$ et montrer que $F+G=\mathbb{R}^3$. Que conclure ?

(3) Soient $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $C=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $D=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$.

  (a) Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Idem avec G engendré par C et D.

  (b) Calculer $F\cap G$. Montrer que $F+G=M_2(\mathbb{R})$. Conclure.

3. Application linéaire

3.1. Définition.

Définition 6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une ***application linéaire*** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$;

(2) $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.

Vocabulaire :

— Une application linéaire de E dans F est aussi appelée ***morphisme*** ou ***homomorphisme*** d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

— Une application linéaire de E dans E est appelée ***endomorphisme*** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

3.2. **Exemples.**

(1) Pour une matrice fixée $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(X) = AX$$

est une application linéaire.

(2) L' ***application nulle***, notée $0_{\mathcal{L}(E,F)}$:

$$f : E \longrightarrow F \qquad f(u) = 0_F \qquad \text{pour tout } u \in E.$$

(3) L' ***application identité***, notée id_E :

$$f : E \longrightarrow E \qquad f(u) = u \qquad \text{pour tout } u \in E.$$

3.3. **Premières propriétés.**

Proposition 6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :
— $f(0_E) = 0_F$,
— $f(-u) = -f(u)$, pour tout $u \in E$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition de la linéarité avec $\lambda = 0$, puis avec $\lambda = -1$. $\square$

Proposition 7 (Caractérisation d'une application linéaire)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$,

$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).}$$

Démonstration.

— Si f est linéaire, pour $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on obtient

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

— Réciproque : d'une part

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

(en considérant le cas particulier où $\lambda = \mu = 1$), et d'autre part

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

(cas particulier où $\mu = 0$).

$\square$

Remarque. Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires : pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et tous $v_1, \ldots, v_n \in E$, on a

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

Mini-exercice. Montrer que les applications suivantes $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont linéaires.

(1) $f_1(x,y) = (-x,-y)$;

(2) $f_2(x,y) = (3x,3y)$;

(3) $f_3(x,y) = (x,-y)$;

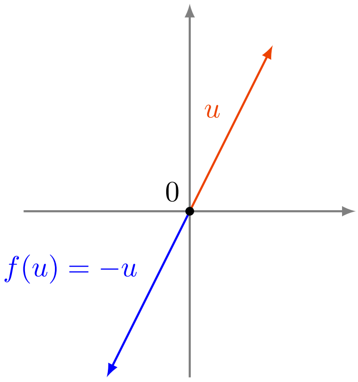
(4) $f_4(x,y) = (-x,y)$;

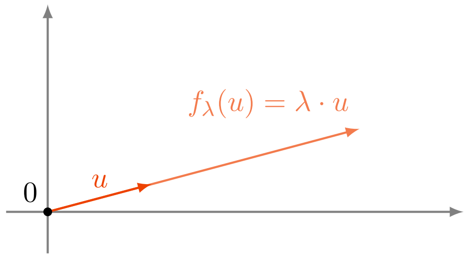
3.4. **Exemples géométriques. Symétrie centrale.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & u & \mapsto & -u \end{array}$$

f est linéaire et s'appelle la ***symétrie centrale*** par rapport à l'origine 0_E.





Homothétie.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'application f_λ par :

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda : E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

f_λ est linéaire. f_λ est appelée ***homothétie*** de rapport λ.

C'est bien une application linéaire :

$$f_\lambda(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \alpha f_\lambda(u) + \beta f_\lambda(v).$$

Cas particuliers notables :

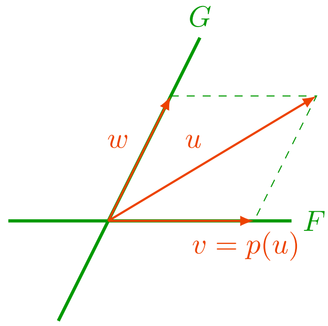
- $\lambda = 1$, f_λ est l'application identité ;
- $\lambda = 0$, f_λ est l'application nulle ;
- $\lambda = -1$, on retrouve la symétrie centrale.

Projection.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

La ***projection*** sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie par $p(u) = v$.



On va vérifier que :

- Une projection est une application linéaire.
- Une projection p vérifie l'égalité $p \circ p = p$.

— Une projection est une application linéaire. En effet, soient $u, u' \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On décompose u et u' en utilisant que $E = F \oplus G$:

$$u = v + w, \quad u' = v' + w'$$

avec $v, v' \in F$, $w, w' \in G$. Alors

$$\lambda u + \mu u' = \lambda(v + w) + \mu(v' + w') = (\lambda v + \mu v') + (\lambda w + \mu w').$$

Or $\lambda v + \mu v' \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda v + \mu v' \in F$. De même $\lambda w + \mu w' \in G$. Ainsi :

$$p(\lambda u + \mu u') = \lambda v + \mu v' = \lambda p(u) + \mu p(u').$$

— Une projection p vérifie l'égalité $p \circ p = p$.

Il s'agit juste de remarquer que si $v \in F$ alors $p(v) = v$ (car $v = v + 0$, avec $v \in F$ et $0 \in G$).

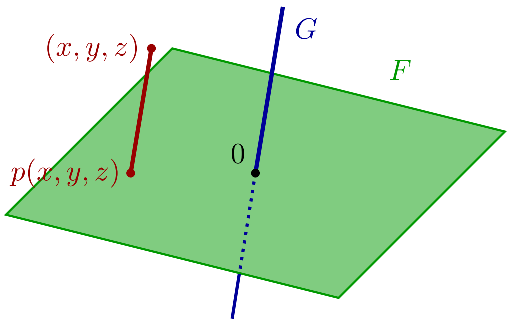
Exemple 16. Les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (cf. exemple 13). Nous avions vu que la décomposition s'écrivait :

$$(x,y,z) = (y+z,y,z) + (x-y-z,0,0).$$

Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors on a $p(x,y,z) = (y+z,y,z)$.



Exemple 17. Nous avons vu dans l'exemple 14 que l'ensemble des fonctions paires $\mathcal{P}$ et l'ensemble des fonctions impaires $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Notons p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$. Si f est un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $p(f) = g$ où

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}. \end{array}$$

3.5. **Autres exemples d'applications linéaires.**

(1) La **dérivation**. Soient $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec f' continue et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues. Soit

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Alors d est une application linéaire, car

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

et donc

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda d(f) + \mu d(g).$$

(2) L'**intégration**. Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit

$$\begin{array}{rcl} I : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f(x) & \longmapsto & \int_0^x f(t)\, dt \end{array}$$

L'application I est linéaire car

$$\int_0^x \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int_0^x f(t)\, dt + \mu \int_0^x g(t)\, dt$$

pour toutes fonctions f et g, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3) Avec les **polynômes**.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Soit $F = \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et soit

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & P(X) & \longmapsto & XP(X) \end{array}$$

Autrement dit, si $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, alors $f(P(X)) = a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$.

C'est une application linéaire :

$$f(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda X P(X) + \mu X Q(X) = \lambda f(P(X)) + \mu f(Q(X)).$$

(4) La **transposition**.

Considérons l'application T de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ donnée par la transposition :

$$\begin{array}{rcl} T : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

T est linéaire, car on sait que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$${}^t(\lambda A + \mu B) = {}^t(\lambda A) + {}^t(\mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB.$$

(5) La **trace**.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tr} : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \operatorname{tr} A \end{array}$$

est une application linéaire car $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B$.

Mini-exercice.
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

(1) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 3x-2$

(2) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(1)$

(3) $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \longmapsto f'+f$

(4) $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 |f(t)|\,dt$

(5) $\mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], \quad P(X) \longmapsto P(X+1)-P(0)$

4. Image et noyau

4.1. **Image d'une application linéaire.**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle ***image*** de l'application linéaire f, noté $\operatorname{Im} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\} \subset F.$$

Plus généralement, si $E' \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E, on ***note*** $f(E')$ l'ensemble

$$f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\} \subset F$$

des images des éléments de E' par f.

Proposition 8. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque. En particulier $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. — $0_F = f(0_E) \in f(E')$

— Soient (y_1, y_2) des éléments de $f(E')$ et λ, μ des scalaires. Il existe $x_1 \in E'$ et $x_2 \in E'$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Alors

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Or $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de E', car E' est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est bien un élément de $f(E')$.

$\square$

4.2. **Noyau d'une application linéaire.**

Définition 7. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le ***noyau*** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}}$$

Proposition 9. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. — $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.

— Soient $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$.

— On a, en utilisant la linéarité de f et le fait que x_1 et x_2 sont des éléments de $\mathrm{Ker}(f)$:

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \lambda 0_F + \mu 0_F = 0_F.$$

□

Exemple 18. Soit f l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

— Calculons le noyau $\operatorname{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) & \iff f(x,y,z) = (0,0) \\ & \iff (-2x, y+3z) = (0,0) \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & 0 \\ y+3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff (x,y,z) = (0,-3z,z), \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(f) = \big\{(0,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\big\} = \operatorname{Vect}\big\{(0,-3,1)\big\}$$

— Calculons l'image de f. Fixons $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x',y') = f(x,y,z) & \iff (-2x, y+3z) = (x',y') \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & x' \\ y+3z & = & y' \end{array} \right. \end{aligned}$$

Pour tout couple (x',y') ce système admet une solution, donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exemple 19. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. Alors

— $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0\}$ est l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^p$ solutions du système linéaire homogène $AX = 0$.

— On verra plus tard que $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace engendré par les colonnes de la matrice A.

Le noyau fournit une nouvelle façon d'obtenir des sous-espaces vectoriels.

Exemple 20. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine, d'équation $ax + by + cz = 0$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

En effet, soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

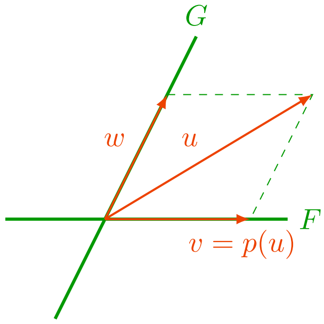
$$f(x, y, z) = ax + by + cz.$$

Il est facile de vérifier que f est linéaire, de sorte que

$$\mathrm{Ker}\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} = \mathcal{P}$$

est un sous-espace vectoriel.

Exemple 21. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires : $E = F \oplus G$. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminons le noyau et l'image de p.



Un vecteur u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ et par définition $p(u) = v$.

Alors

$$\operatorname{Ker}(p) = G \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(p) = F.$$

Théorème 4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$\boxed{f \text{ injective} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Démonstration.

— Supposons f injective.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. Alors

$$f(x) = 0_F = f(0_E)$$

Par injectivité de f, on déduit $x = 0_E$, donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

— Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. On a donc

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F$$

c'est-à-dire $x - y$ est un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc $x - y = 0_E$, soit $x = y$.

□

4.3. **L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ peut être muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, définies de la façon suivante :
f, g étant deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$, et λ étant un élément de $\mathbb{K}$, pour tout vecteur u de E,

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

et

$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u).$$

Proposition 10. L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, muni des deux lois définies précédemment, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Voir le fichier du cours. $\square$

4.4. **Composition et inverse d'applications linéaires.**

Proposition 11. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs de E, et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g\left(f(\alpha u + \beta v)\right) && \text{(définition de } g \circ f\text{)} \\
&= g\left(\alpha f(u) + \beta f(v)\right) && \text{(linéarité de } f\text{)} \\
&= \alpha g\left(f(u)\right) + \beta g\left(f(v)\right) && \text{(linéarité de } g\text{)} \\
&= \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v) && \text{(définition de } g \circ f\text{)}
\end{aligned}$$

□

La composition des applications linéaires se comporte bien :

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

$$(\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda (g \circ f)$$

Vocabulaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— Une application linéaire ***bijective*** de E sur F est appelée ***isomorphisme*** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits ***isomorphes***.
— Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé ***automorphisme*** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Proposition 12. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Démonstration. La démonstration est similaire au cas de $\mathbb{R}^n$, et est détaillée dans le fichier du cours. $\square$

Mini-exercice.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x, y+z, 2z)$. Montrer que f est une application linéaire. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f admet-elle un inverse ? Même question avec $f(x,y,z) = (x-y, x+y, y)$.

(2) Soient E un espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$. Chaque $u \in E$ se décompose de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$, $w \in G$. La ***symétrie*** par rapport à F parallèlement à G est l'application $s : E \to E$ définie par $s(u) = v - w$. Faire un dessin. Montrer que s est une application linéaire. Montrer que $s^2 = \mathrm{id}_E$. Calculer $\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$. s admet-elle un inverse ?

(3) Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P(X) \mapsto P''(X)$ (où P'' désigne la dérivée seconde). Montrer que f est une application linéaire. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f admet-elle un inverse ?