Université de Rennes 1 2018-2019

AG2, Examen du 7 mai 2019 (durée 2h)

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Toutes les réponses devront être justifiées. La justesse et la clarté de la rédaction compteront pour une part importante dans l'évaluation. Un barème indicatif est donné pour chaque exercice.

Exercice 1. (*sur 5 points*)

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x + 2y - 3z + t = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z - 2t = 0.$$

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F.

(3) Compléter la famille $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. (*sur 5 points*)
Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y - z + t \\ x - 2y + z - 2t \\ -2x + y + z + t \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Déterminer le noyau de f.

(3) Déterminer l'image de f.

(4) Déterminer des équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3. (*sur 6 points*)
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2y - z \\ 3x - 2y \\ -2x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer le rang de f ?

(3) On pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4) Quelle est la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$?

(5) On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer B.

Exercice 4. (*sur 4 points*)

(1) Énoncer le théorème du rang.

(2) Démontrer qu'il est impossible de trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(3) Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.