AG2, Éléments de correction de l'examen du 7 mai 2019

Exercice 1.

1) Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ deux possiblités :
   (a) On montre que F est non vide et stable pour les lois. A savoir : $0 \in F$; si u, v sont dans F, alors $u + v \in F$; si u est dans F et λ est un réel, alors $\lambda u \in F$.
   (b) On peut échelonner les équations donnant F, ce qui en donne une nouvelle description (avec deux paramètres). On obtient alors
   $$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z, t) = z(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1)\} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$
   avec $f_1 = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0)$ et $f_2 = (1, -1, 0, 1)$.

2) Une fois écrit
   $$F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$
   avec $f_1 = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0)$ et $f_2 = (1, -1, 0, 1)$, on déduit que (f_1, f_2) est une famille génératrice de F.
   Reste à montrer qu'elle est libre pour en déduire que c'est une base de F.

3) On sait qu'il est possible de compléter (f_1, f_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ en puisant parmi, par exemple, des éléments de la base canonique.
   Considérons la famille $B = (f_1, f_2, e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$.
   On peut montrer que B est une famille libre en utilisant la définiton. C'est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, donc une base de $\mathbb{R}^4$.
   On peut aussi considérer la matrice des coordonnées des 4 vecteurs et montrer, en l'échelonnant aisément, qu'elle est de rang 4.

Exercice 2.

(1) *Montrez que f est une application linéaire.*
Soient $u, v \in \mathbb{R}^4$ deux vecteurs de coordonnées $u = (x, y, z, t), v = (x', y', z', t')$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On développe $f(\lambda u + v)$ en fonction des coordonnées, et on montre (en détaillant les calculs, qui sont élémentaires) que c'est bien égal à $\lambda f(u) + f(v)$.

(2) *Déterminez le noyau de f.*
Les vecteurs $u = (x, y, z, t)$ dans le noyau sont précisemment ceux dont les coordonnées sont solutions du système linéaire suivant.
$$\left\{\begin{array}{rrrrl} & y & -z & -t & = 0 \\ x & -2y & +z & -2t & = 0 \\ -2x & +y & +z & +t & = 0 \end{array}\right.$$
On applique le pivot de Gauss par ligne, et après avoir détaillé les opérations sur les lignes, on obtient la forme échelonnée réduite suivante :
$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & & -z & & = 0 \\ & y & -z & +t & = 0 \end{array}\right.$$
On peut ainsi paramétrer les solutions par les deux variables surnuméraires z, t, $x = z$ et $y = z - t$. Donc
$$\ker(f) = \{(z, z - t, z, t) \,:\, (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}.$$

(3) *Déterminez l'image de f.*
La matrice de f est donnée par
$$Mat(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue cette fois une réduction par colonne de cette matrice (ce qui ne change pas l'image). On obtient (après un calcul détaillé des opérations sur les colonnes) la forme échelonnée (non réduite)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Im(f) = Vect((1,-2,1),(0,1,-2)).$$

(4) *Déterminez des équations cartésiennes de $Im(f)$.*

Il s'agit de trouver les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'il existe (x,y,z,t) avec $f(x,y,z,t) = (a,b,c)$, c'est à dire tels que le système d'inconnues (x,y,z,t)

$$\left\{\begin{array}{ccccl} & y & -z & -t & = a \\ x & -2y & +z & -2t & = b \\ -2x & +y & +z & +t & = c \end{array}\right. ,$$

ait une solution (et peu importe quelle est cette solution). On effectue comme à la question 2 une réduction par ligne, avec les mêmes opérations sur les lignes. On s'arrête à une forme échelonnée non réduite

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x & -2y & +z & -2t & = b \\ & y & -z & +t & = a \\ & & & 0 & = 3a+2b+c \end{array}\right.$$

Une condition nécessaire est suffisante pour que ce système d'inconnues (x,y,z,t) ait des solutions est donc que $3a+2b+c=0$, qui est une équation cartésienne de $Im(f)$.

Exercice 3.

(1) Si (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique, on a $f(e_1) = 3e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 2e_2 + 2e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + e_3$ d'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) En appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de A, on obtient une matrice échelonnée ayant ses trois lignes non nulles. Le rang de A est donc 3, et c'est aussi le rang de f.

(3) On vérifie en résolvant un système linéaire que la famille $\mathcal{B}' = (v_1,v_2,v_3)$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ car elle contient trois vecteurs.

(4) La matrice P contient les coefficients de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) La matrice P est inversible car c'est une matrice de passage, et un calcul d'inverse de matrice donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & -1/5 & 1/30 \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$B = P^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On pouvait aussi calculer l'image par f des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}'$, soit $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = -4v_3$.

Exercice 4.

(1) Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie alors $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(E)$.

(2) Raisonnons par l'absurde. Supposons donc l'existence d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. On en déduit alors $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.
$\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie, le théorème du rang (rappelé à la question précédente) s'écrit $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ soit $2 \dim(\operatorname{Im} f) = 3$. La dimension d'un sous-espace vectoriel étant un entier naturel, cette dernière égalité est impossible. On a donc bien montré (par l'absurde) qu'il est impossible de trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(3) On cherche en fait une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant à la fois $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f)$ c'est à dire (en utilisant le théorème du rang) telle que $f \circ f = 0$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$. C'est par exemple le cas de l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire de $f : (x, y) \longmapsto (y, 0)$ (noyau et image sont alors égaux à $\operatorname{Vect}\{(1, 0)\}$).