AG2, Éléments de correction du contrôle du 27 février 2019

QCM : sur 11 points.

(1) a) Un plan.
Les équations sont deux à deux proportionnelles.

(2) d) Toutes les valeurs de λ.
Le système est échelonné.

(3) b) et d).

(4) c) et d).

(5) c).

(6) a), b) et e).

(7) 2b). Les deux dernières lignes sont proportionnelles.

Questions de cours (*sur 6 points*) :

(1) Il fallait penser à vérifier l'inversibilité à droite et à gauche.

(2) Voir le cours.

(3) Voir le cours.

Exercice 1.

(1) Soit $ax + by + cz + d = 0$ l'équation cartésienne d'un plan. Les points A, B, C sont sur ce plan si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\left\{\begin{array}{lllll} a & & +c & +d & = 0 \\ & 2b & +c & +d & = 0 \\ a & +b & +c & +d & = 0 \end{array}\right.$$

La résolution du système donne $a = b = 0$ et $c + d = 0$. Il existe donc un unique plan solution, dont une équation cartésienne est $z = 1$.

Remarque : Par trois points de l'espace passe un unique plan... à condition que les trois points ne soient pas alignés.

(2) Un plan contient une droite si et seulement s'il contient deux points distincts de cette droite. En choisissant deux points C et D de cette droite, et en argumentant comme pour la question 1), on arrive à un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues dont l'unique solution est la solution nulle. On en déduit qu'il n'existe pas de tel plan.

Remarque : La démarche générale revient à supposer qu'il existe un plan répondant à la question, puis à déterminer des plans candidats possibles, et enfin à vérifier si ces candidats conviennent. L'oubli de cette dernière étape a mené à de nombreuses erreurs.

(3) Les plans parallèles au plan d'équation cartésienne $z = 0$ sont les plans d'équation cartésienne $z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$. Un tel plan contient A et B si et seulement si $d = -1$. Ainsi il existe un unique plan répondant à la question, c'est celui qui admet comme équation cartésienne $z = 1$.

Exercice 2.

1) On peut bien sûr utiliser la méthode du pivot de Gauss. On effectue donc des opérations élémentaires donnant des systèmes équivalents. Comme il est toujours plus simple de travailler avec un pivot égal à 1, on commence par échanger la première et la dernière (par exemple) équation.

$$L_1 \leftrightarrow L_4 \left\{\begin{array}{rl} x+\ y+\ z-3t & =4 \\ x-3y+\ z+\ t & =2 \\ x+\ y-3z+\ t & =3 \\ -3x+\ y+\ z+\ t & =1 \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+3L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rl} x+\ y+\ z-3t & =4 \\ -4y\qquad +4t & =-2 \\ -4z+4t & =-1 \\ 4y+4z-8t & =13 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rl} x+\ y+\ z-3t & =4 \\ -4y\qquad +4t & =-2 \\ -4z+4t & =-1 \\ 4z-4t & =11 \end{array}\right. \quad \text{et enfin} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \div 4 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rl} x+\ y+\ z-3t & =4 \\ y\qquad -t & =\frac{1}{2} \\ -4z+4t & =-1 \\ 0 & =10 \end{array}\right.$$

La dernière équation montre alors que le système est incompatible : il n'a pas de solution.

Remarques :

• On s'est astreint ici à ne faire, à chaque étape, que des opérations utilisant uniquement la ligne du pivot. Mélanger les opérations peut être dangereux (se souvenir du QCM)...

• Les (trop) nombreuses erreurs de calcul constatées prouvent qu'il est important de procéder avec méthode et sans cumuler les opérations.

• On aurait aussi pu remarquer que, si (x, y, z, t) est une solution, en ajoutant toutes les équations on aurait $0 = 10$, ce qui est absurde.

2) On applique la même méthode du pivot de Gauss pour obtenir des systèmes équivalents :

$$L_1 \leftrightarrow L_4 \left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y+ & z+ & (1+\lambda)t & =4 \\ x+ & (1+\lambda)y+ & z+ & t & =2 \\ x+ & y+ & (1+\lambda)z+ & t & =3 \\ (1+\lambda)x+ & y+ & z+ & t & =1 \end{array}\right.$$

$$\text{puis} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-(1+\lambda)L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rl} x+\ y+\ z\ +\ (1+\lambda)t & =\ 4 \\ \lambda y\qquad -\ \lambda t & =-2 \\ \lambda z-\ \lambda t & =-1 \\ -\lambda y-\lambda z-\lambda(\lambda+2)t & =-3-4\lambda \end{array}\right.$$

$$\text{et enfin} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_2+L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rl} x+\ y+\ z+(1+\lambda)t & =\ 4 \\ \lambda y\qquad -\lambda t & =-2 \\ \lambda z\ -\lambda t & =-1 \\ -\lambda(\lambda+4)t & =-6-4\lambda \end{array}\right.$$

Ce dernier système est sous forme échelonnée. Il a une unique solution (que l'on peut obtenir en remontant le système mais c'est ici inutile) si et seulement si $\lambda(\lambda + 4) \neq 0$ soit $\lambda \notin \{0, 4\}$.

Remarque : Les racines du polynôme $\lambda^2 + 4\lambda$ sont évidentes et il serait bien maladroit de les chercher en passant par le calcul du discriminant...

Le système est incompatible pour $\lambda = -4$ (c'est alors le système de la première question) mais aussi pour $\lambda = 0$ (la dernière équation s'écrivant alors $0 = -6$).

3) Le rang de la matrice M est égal au nombre de lignes non nulles dans sa forme réduite échelonnée. On cherche donc cette forme en effectuant (encore une fois !) les mêmes opérations élémentaires :

$$\begin{array}{c} L_4 \\ L_2-L_4 \\ L_3-L_4 \\ L_1-(1+\lambda)L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda & -\lambda(\lambda+2) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_2+L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 0$, la forme réduite échelonnée suivant les lignes de M est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et le rang de M est donc 1.
- Si $\lambda \neq 0$, on poursuit les opérations :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \div \lambda \\ L_3 \leftarrow L_3 \div \lambda \\ L_4 \leftarrow L_4 \div \lambda \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+4) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3+\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

  $\star$ Si $\lambda = -4$, la forme réduite échelonnée suivant les lignes de M est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3+\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et le rang de M est donc 3

  $\star$ Si $\lambda \notin \{0, 4\}$, les opérations $L_4 \leftarrow -L_4 \div (\lambda+4)$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - (3+\lambda)L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$, montrent que la forme réduite échelonnée suivant les lignes de M est la matrice identité d'ordre 4 et le rang de M est donc 4.
  Remarque : Dans ce dernier cas, la matrice M est donc inversible.

Remarque générale :
Il est important d'annoncer la démarche que l'on va suivre et indispensable de laisser la trace des opérations effectuées...

Exercice 3.

1) et 2) Les calculs donnent

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 2-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

puis $A^3 + A^2 - A - \lambda I = 0$.

3) On peut réécrire l'égalité précédente en

$$A(A^2 + A - I) = (A^2 + A - I)A = \lambda I.$$

Ou encore, lorsque $\lambda \neq 0$, en

$$A \times \frac{A^2 + A - I}{\lambda} = \frac{A^2 + A - I}{\lambda} \times A = I.$$

Dans ce cas ($\lambda \neq 0$), A est inversible et on a

$$A^{-1} = \frac{A^2 + A - I}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\lambda} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, lorsque $\lambda = 0$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

possède une ligne de zéros donc n'est pas inversible.

Avertissements

— On ne peut pas diviser par λ si λ est nul!

Plus généralement, lorsqu'on manipule une expression avec un paramètre, il faut s'interroger pour quelles valeurs du paramètre elle est bien définie.

— Dire que A est inversible si $\lambda \neq 0$ ne permet pas de conclure que A n'est pas inversible si $\lambda = 0$.

Exercice 4.

1.a) Comme $0+0^2 = 0 \neq 1$, l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_1, qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

1.b) Comme $0+0+2*0 = 0$, on a bien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$.

Soient u, v deux vecteurs de E_2. Notons (x, y, z) et (x', y', z') leurs coordonnées respectives. Comme $u+v = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$, calculons

$$(x+x') + (y+y') + 2(z+z') = (x+y+2z) + (x'+y'+2z') = 0+0 = 0,$$

car u, v appartiennent à E_2. Ainsi $u+v \in E_2$.

Soient u un vecteur de E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Notons encore x, y, z les coordonnées de u dans la base canonique. Ainsi $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$. Calculons

$$\lambda x + \lambda y + 2\lambda z = \lambda(x+y+2z) = \lambda * 0 = 0,$$

car $u \in E_2$. Donc $\lambda u \in E_2$.

Donc E_2 est non vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1.c) Remarquons que $u = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à E_3 ; en effet, $\cos(2\pi) = 1$. Mais comme $\cos(\pi) = -1 \neq 1$, le vecteur $u/2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans E_3. L'ensemble E_3 n'est donc pas stable par multiplication par le scalaire $1/2$, ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Attention, cet ensemble contenait bien le vecteur nul, et était bien stable par addition !

1.d) L'ensemble E_4 consiste en toutes les combinaisons linéaires des deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est à dire

$$E_4 = \mathrm{Vect}(u, v).$$

Or on sait d'après el cours qu'un tel ensemble est un sous-espace vectoriel, ce qui conclut.

2) On peut procéder par double inclusion. Une autre façon de faire est la suivante.

Traduisons l'appartenance d'un vecteur u de coordonnées x, y, z au sous-espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ par des équations cartésiennes. Par définition, le vecteur u est dans $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ si et seulement si il existe deux réels λ, μ tels que $u = \lambda v_1 + \mu v_2$, autrement dit, si le système d'inconnues (λ, μ) :

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2\lambda & +\mu & = & x \\ 4\lambda & -\mu & = & y \\ -3\lambda & & = & z \end{array}\right.$$

a une solution. Appliquons la méthode du pivot de Gauss (*Attention, ici λ, μ sont les variables et x, y, z des données du problème).* On obtient après pivot la forme échelonnée (non réduite)

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2\lambda & +\mu & = & x \\ & -3\mu & = & y - 2x \\ & 0 & = & x/2 + y/2 + z \end{array}\right.$$

Notons bien que **le but n'est pas de résoudre le système**, mais de trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions (l'unicité des solutions n'est pas pertinente non plus). Comme cette forme est échelonnée, elle a (au moins) une solution (λ, μ) ssi $x/2+y/2+z = 0$; de manière équivalente, $u \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ ssi $x+y+2z = 0$. On a donc prouvé que $E_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Remarque : Il n'est pas suffisant de ne retenir du calcul ci-dessus que la dernière ligne $x+y+2z = 0$; en effet, dire que si $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, alors $x+y+2z = 0$, ne montre guère que l'inclusion $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subset E_2$. C'est de remarquer que inversement, cette dernière ligne suffit à résoudre le système, qui montre l'égalité des deux ensembles.