AG2, Contrôle du 27 février 2019 (durée 4h)

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

NOM Prénom : Groupe de TD :

QCM :
Questions de cours : Note :
Exercice 1 :
Exercice 2 :
Exercice 3 :
Exercice 4 :

Le sujet est composé d'un questionnaire à choix multiples, de questions de cours et de quatre exercices. Les éventuels points négatifs obtenus au QCM ne seront pas comptabilisés dans la note finale. Un barème provisoire est indiqué pour chaque exercice.
Pour les quatre derniers exercices, toutes les réponses devront être justifiées. La justesse et la clarté de la rédaction compteront pour une part importante dans l'évaluation.

QCM : dans chacune des questions ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes. Attention, dans certaines questions, plusieurs affirmations sont correctes.

Barème :
— 1 point par affirmation exacte entourée ;
— -1 point par affirmation fausse entourée ;
— 0 point en l'absence de réponse.

(1) Dans l'espace muni d'un repère, préciser l'ensemble défini par le système des trois équations suivantes :
$$\begin{cases} x+y+z-1 &= 0 \\ -2x-2y-2z+2 &= 0 \\ 3x+3y+3z-3 &= 0 \end{cases}$$
a) Un plan b) L'ensemble vide
c) Un ensemble réduit à un point d) Une droite.

(2) Soit λ un paramètre réel. Le système suivant :
$$\begin{cases} 1564x & +358y & -220z & = & -6542\lambda+542 \\ & 56y & -7643z & = & 560\lambda-34 \\ & & 457z & = & -7\lambda+451 \end{cases}$$
possède une solution unique pour :
a) Aucune valeur de λ b) Une seule valeur de λ
c) Deux valeurs de λ d) Toutes les valeurs de λ.

(3) Parmi les matrices à deux lignes et deux colonnes suivantes indiquer celles qui sont inversibles.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes, X et Y des vecteurs colonnes à n lignes. On suppose que A est inversible.
a) Il existe un vecteur Y tel que $AX = Y$ n'admet aucune solution X.
b) Il existe un vecteur Y tel que $AX = Y$ admet une infinité de solutions X.
c) Il existe un vecteur Y tel que $AX = Y$ admet une solution unique X.
d) Pour tout vecteur Y, l'équation $AX = Y$ admet une solution unique X.

(5) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ élevée à la puissance 5 est égale à

$a)\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad b)\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad c)\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad d)\begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) matrice(s) B a-t-on $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

$a)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b) B = A$ $\quad c)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad e)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(7) Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est égal à

$a)$ 1 $\quad b)$2 $\quad c)$3 $\quad d)$4 $\quad e)$5

Questions de cours (*sur 6 points*) :

(1) Démontrer que le produit de deux matrices inversibles est inversible.

(2) Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(3) Donner la définition d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. (*sur 8 points*)

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les points A et B de coordonnées $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe des plans vérifiant les conditions énoncées, et les déterminer tous (quand il en existe) :

(1) Plans passant par A et B et par le point C de coordonnées $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) Plans passant par A et B et contenant la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x & = -3 + t \\ y & = 1 + 2t \\ z & = 2 + 3t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}\,.$$

(3) Plans passant par A et B et parallèles au plan d'équation cartésienne $z = 0$.

Exercice 2. (*sur 10 points*)

(1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -3x & +y & +z & +t & = 1 \\ x & -3y & +z & +t & = 2 \\ x & +y & -3z & +t & = 3 \\ x & +y & +z & -3t & = 4 \end{cases}$$

(2) Soit λ un paramètre réel. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (1+\lambda)x & +y & +z & +t & =1 \\ x & +(1+\lambda)y & +z & +t & =2 \\ x & +y & +(1+\lambda)z & +t & =3 \\ x & +y & +z & +(1+\lambda)t & =4 \end{array}\right.$$

(a) Pour quelles valeurs de λ ce système admet-il une unique solution ?

(b) Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle ce système est incompatible ?

(3) Déterminer le rang de la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} (1+\lambda) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (1+\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1+\lambda) \end{pmatrix}.$$

On discutera suivant les valeurs du paramètre réel λ.

Exercice 3. (*sur 8 points*)
Soit λ un nombre réel et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2 et A^3.

(2) Montrer que $A^3 + A^2 - A - \lambda I = 0$.

(3) Est-ce que A est inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4. (*sur 8 points*)

(1) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$E_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 = 1\}$$

$$E_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$$

$$E_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \cos(x + y) = 1\}$$

$$E_4 = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

(2) Démontrer que $E_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

FIN