Université de Rennes1 **Année 2011/2012**

Outils Mathématiques 3

Chapitre 5: Intégrales doubles

résumé

1 Préliminaires: fonctions et parties bornées du plan

Définition 1.1 *Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est bornée si elle est contenue dans un disque de la forme $D_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ pour R suffisamment grand.*

Une fonction $f : B \to \mathbb{R}$ est dite bornée (sur $B \subset \mathbb{R}^2$) s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B, |f(x, y)| < M$.

2 Intégrales doubles

2.1 Intégrale double sur un rectangle

Définition 2.1 *Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle et $f : R \to \mathbb{R}$ continue. On définit l'intégrale de f sur R comme étant*

$$\iint_R f(x, y)dxdy := \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

2.2 Intégrale double sur un domaine général

Définition 2.2 *On dira qu'un domaine A du plan est une union dénombrable de rectangles quasi-disjoints s'il existe une famille de rectangles $(R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]), n \in \mathbb{N}$ ne s'intersectant que sur leur bord et telle que*

$$A = \bigcup_n R_n$$

Théorème 2.3 *Tout ouvert U du plan est une union dénombrable de rectangles quasi-disjoint: $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$. De plus, si U est borné et $f : U \to \mathbb{R}$ est continue, la série numérique*

$$\sum_{n\geq 0} \iint_{R_n} f(x, y)dxdy$$

est **absolument convergente** *et on pose*

$$\iint_U f(x,y)dxdy := \sum_{n=0}^{+\infty} \iint_{R_n} f(x,y)dxdy.$$

On peut montrer par ailleurs que la valeur de $\iint_U f(x,y)dxdy$ ne dépend pas de la famille (R_n) considérée.

Plus généralement, lorsque $f : D \to \mathbb{R}$ est continue et bornée sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ de la forme $D = U \cup \mathcal{C}_1 \cup ... \cup \mathcal{C}_n$, où U est un ouvert borné et les $\mathcal{C}_i$ sont des courbes, on pose

$$\iint_D f(x,y)dxdy := \iint_U f(x,y)dxdy$$

Remarque 2.4 Calcul d'aire

L'aire de D est l'intégrale double sur D de la fonction constante 1 :

$$\boxed{\text{Aire de } D = \iint_D dxdy} \tag{1}$$

3 Propriétés et calculs pratiques

Propriétés des intégrales doubles:

1. $\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$ pour tout réel c.
2. $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$
3. Si $D = D_1 \cup D_2$ et l'aire de $D_1 \cap D_2$ est nulle, alors $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$
4. Si $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in D$ alors $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

Définition 3.1 *Un compact élémentaire est un domaine du plan de l'une des formes suivantes:*

1. $D_x = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases} \right\}$ *où φ_1 et φ_2 sont des fonctions continues.*
2. $D_y = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{cases} \right\}$ *où ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions continues.*

3.1 Calcul d'intégrales doubles à l'aide d'intégrales simples

Théorème 3.2 (Théorème de FUBINI) *Soit D un compact élémentaire du plan et $f(x,y)$ une fonction continue sur D.*

1. *si D est du type D_x alors*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

2. *si D est du type D_y alors*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Remarque 3.3 *Lorsque $D = [a,b] \times [c,d]$, on peut déduire des formules prcdentes que*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (2)$$

3.2 Calcul d'intégrales doubles à l'aide d'un changement de variables

Supposons que x et y soient des fonctions des deux variables u et v telles que les formules:

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v)$$

définissent un "changement de variables" c'est à dire une transformation qui à un point m de coordonnées u et v associe le point M de coordonnées x et y.

Nous appellerons **Jacobien du changement de variables** le déterminant:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

Alors, si le domaine D est transformé par ce changement de variables en D' on obtient la formule suivante:

$$\iint_{D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

3.3 Applications:

1. **Masse d'une plaque:** La masse d'une plaque homogène, de masse surfacique ρ et d'aire A est $M = A\rho$.

   Dans le cas non homogène, ρ est une fonction de x et y définie sur le domaine D qui correspond à la plaque. Alors la masse M est donnée par: $M = \iint_D \rho(x, y)dxdy$

2. **Centre de gravité d'une plaque:** le centre de gravité G de la plaque à le point de coordonnées $x_G = \frac{1}{M} \iint x\rho(x, y)dxdy$ et $y_G = \frac{1}{M} \iint y\rho(x, y)dxdy$

3. **Le moment d'inertie d'une plaque par rapport à un point:** le moment d'inertie I_0 de la plaque par rapport à l'origine 0 est l'intégrale: $I_0 = \iint (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy$

4 Formule de Green-Riemann

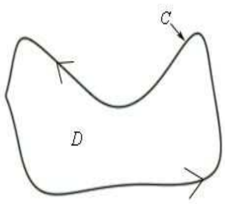
On a vu que si ω est une forme différentielle exacte alors, pour toute courbe fermée Γ, $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 0$.

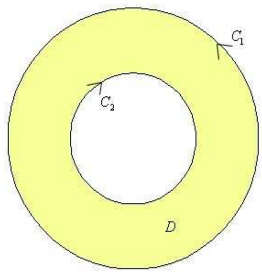
En général, l'intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe fermée qui borde un domaine s'écrit comme une intégrale double sur le domaine.

Définition 4.1 *Si D est un domaine borné du plan contenu dans un ouvert convexe U et tel que D ne rencontre pas le bord de $U (= \mathbb{R}^2$ généralement) et dont le bord est formé d'un nombre k de courbes fermées simples $C_1, \ldots, C_k$, on oriente son bord suivant la convention de la matière à gauche:*

" lorsque l'on parcourt n'importe qu'elle courbe C_i du bord on doit avoir le domaine D sur sa gauche".

On dit que le bord est orienté dans le sens direct.





Théorème 4.2 *Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle de classe C^1 définie sur U. Alors*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(Formule de Green-Riemann)

Application au calcul d'aires:

On peut appliquer la formule de Green-Riemann dans le cas où $\omega = -ydx + xdy$ on obtient alors

$\int_C -ydx + xdy = 2 \iint_D dxdy$ d'où

$$\boxed{Aire(D) = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy} \tag{3}$$

Exemple 4.3 *L'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *a pour équation paramétrique* $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$ *avec* $t \in [0, 2\pi]$

Alors, l'aire A *de l'ellipse est égale à:*

$$A = \frac{1}{2} \int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t)\right) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = ab\pi.$$