M1 Maths, Théorie des Groupes et Géométrie

Notations : K désigne un corps de commutatif, V un K e.v de dimension n, $\mathrm{Aut}((K)$ le groupe des automorphismes de K. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{l,k}(K)$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}((K)$, on note A^σ la matrice $\big(\sigma(a_{ij})\big)$.

1. Formes sesquilinéaires : Généralités

Définition 1.1. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}((K)$. On dit qu'une application $B : V \times V \to K$ est σ- *sesquilinéaire* si

(1) $\forall v \in V$, l'application $\begin{array}{ccc} V & \to & K \\ w & \to & B(w,v) \end{array}$ est linéaire.

(2) $\forall v \in V$, l'application $\begin{array}{ccc} V & \to & K \\ w & \to & B(v,w) \end{array}$ est σ- semi-linéaire.

Définition 1.2. Soit $B : V \times V \to K$ une forme σ-sesquilinéaire. On dira de plus que B est

(1) *Symétrique* si $B(w,v) = B(v,w)$ $\forall v, w \in V$.
(2) *Hermitienne* si $B(w,v) = \sigma\big(B(v,w)\big)$ $\forall v, w \in V$.
(3) *Anti-symétrique* si $B(w,v) = -B(v,w)$ $\forall v, w \in V$.
(4) *Alternée* si $B(v,v) = 0$ $\forall v \in V$.
(5) *Réflexive* si $\forall v, w \in V$, $B(w,v) = 0 \Longleftrightarrow B(v,w) = 0$.

Définition 1.3. Soient $B_i : V_i \times V_i \to K$, $i = 1, 2$ deux formes sesquilinéaires. On dira que $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ est une *isométrie* (relativement à B_1 et B_2) si $\forall v, w \in V_1$, $B_2\big(\varphi(v), \varphi(w)\big) = B_1(v,w)$.

On note $\mathcal{S}_{V,\sigma}$ le K-ev des formes σ-sesquilinéaires de $V \times V$ dans K.

Définition 1.4. Soient $B, B' \in \mathcal{S}_{V,\sigma}$. On dira que B et B' sont *équivalentes* si elles appartiennent à la même orbite pour l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathcal{B}_V$ définie par

$$\forall g \in \mathrm{GL}(V), \forall B \in \mathcal{S}_{V,\sigma}, (g.B)(v,w) := B\big(g^{-1}(v), g^{-1}(w)\big)$$

Le stabilisateur de B est appelé *groupe orthogonal* de B est noté $\mathrm{O}(B)$.

Définition 1.5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de V et $B \in \mathcal{S}_{V,\sigma}$. On appelle matrice de B dans $\mathcal{B}$ la matrice $M_{\mathcal{B}} = (m_{ij})$ définie par $m_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Proposition 1.6. Soit $B \in \mathcal{S}_{V,\sigma}$; alors

(1) $\forall v, w \in V$, $B(v,w) = {}^t v M_{\mathcal{B}} w^\sigma$.
(2) Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, on a $M_{\mathcal{B}'} = {}^t P M_{\mathcal{B}} P^\sigma$.

Remarque 1.7.

— $M_{\mathcal{B}'}$ peut aussi s'interpréter comme la matrice de $g^{-1}.B$ dans la base $\mathcal{B}$ où P est vue comme la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

— Le rang de $M_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle *rang* de B.

Définition 1.8. Soit $B \in \mathcal{S}_{V,\sigma}$ réflexive .

(1) On dit que $v, w \in V$ sont *orthogonaux* (relativement à B) si $B(v, w) = 0$.

(2) On dit que deux parties non vides $X, Y \subset V$ sont orthogonales si $x \in X$ et $y \in Y$ sont orthogonaux pour tous x, y.

(3) Si X est une partie non vide de V, on définit *l'orthogonal* de X, $X^\perp := \{y \in V | B(x, y) = 0, \forall x \in X\}$. C'est un s.e.v de V.
$V^\perp$ s'appelle le *radical* de B et est noté $\mathrm{rad}_B(V)$ (ou encore Ker B).

(4) On dit que B est *non dégénérée* si $\mathrm{rad}_B(V)$ est de rang maximal. Ceci revient à dire que B est de rang maximal.

(5) $v \in V$ est dit *isotrope* si $B(v, v) = 0$. L'ensemble $C(B)$ des vecteurs isotropes est appelé *cône isotrope* de B.

(6) Un s.e.v $W \subset V$ est dit *isotrope* si $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ et *totalement isotrope* si $W \subset W^\perp$.

2. Décomposition orthogonale

$B \in \mathcal{S}_{V,\sigma}$ sera supposée réflexive.

Définition 2.1. Soient U, W deus s.e.v de V. On dira que V est *somme directe orthogonale* de U et W si $V = U \oplus V$ et U, W sont orthogonaux.
On note $V = U \perp W$.

Théorème 2.2. On suppose B non dégénérée. Soit U un s.e.v de V, alors

(1) $\mathrm{Dim}(U) + \mathrm{Dim}(U^\perp) = n$; en particulier $V = U \perp U^\perp$ si U n'est pas isotrope.

(2) $U = (U^\perp)^\perp$.

Proposition 2.3. Soient U, W 2 s.e.v de V tels que $V = U \perp W$, $\mathcal{B}_U$ une base de U, $\mathcal{B}_W$ une base de W et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W)$ la base de V obtenue par conténation. Alors,

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} M_U & 0 \\ 0 & M_W \end{pmatrix}$$

où M_U (resp. M_W) est la matrice de $B_{|U \times U}$ (resp. de $B_{|W \times W}$) dans $\mathcal{B}_U$ (resp.dans $\mathcal{B}_W$).

3. Classification des formes sesquilinéaires

Théorème 3.1. (Birkhoff-Von Neumann) Soit $B \in \mathcal{S}_{V,\sigma}$ non dégénérée et réflexive. On suppose que Dim $V \geq 2$; alors on a l'alternative suivante :

(1) B est alternée.

(2) Il existe $\lambda \in K - \{0\}$ tel que λB soit hermitienne.

Définition 3.2. Si B est hermitienne, on appelle *forme quadratique hermitienne* l'application $Q : V \to K$ définie par $Q(x) = B(x,x)$. Lorsque B est symétrique, B est appelée *forme polaire* de Q et si car $K \neq 2$, on a

$$\forall v, w \in V, B(v,w) = \frac{1}{2}\big((Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\big).$$

On note $O(Q) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) | Q \circ \varphi = Q\}$ en remarquant que $O(Q) = O(B)$.

Définition 3.3. On suppose B hermitienne (c'est le cas si B est symétrique). On dira qu'une base $\mathcal{B}$ de V est orthogonale si $M_{\mathcal{B}}$ est diagonale.

Théorème 3.4. Soit B hermitienne. On suppose que car $K \neq 0$. Alors B admet une base orthogonale.

3.1. **Le cas des formes quadratiques.** On suppose que $B : V \times V \to K$ est symétrique et non dégénérée et car $K \neq 2$.. On veut décrire la classe d'équivalence de B (i.e l'orbite de B) sous l'action de $\mathrm{GL}(V)$ (ce qui revient à décrire l'orbite de Q sous cette action).
Définition 3.5. On appelle *discriminant* de Q, noté $D(Q)$, l'image de det $M_{\mathcal{B}}$ dans K^*/K^{*2}. $D(Q)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

Théorème 3.6. Si K est algébriquement clos, il y a une seule classe d'équivalence. i.e, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}_n$.

Théorème 3.7. (Théorème d'inertie de Sylvester.) Si $K = \mathbb{R}$, il existe $n+1$ classes d'équivalence correspondant au $n+1$ matrices

$$I_p = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{n-p} \end{pmatrix}, p \in \{0, ..., n\}$$

Le couple $(p, n-p)$ est appelée *signature* de B (ou Q). On remarque que B est un produit scalaire ssi $p = n$.

Théorème 3.8. (Cas des corps finis) On suppose $K = \mathbb{F}_q$. Il y a alors deux classes d'équivalence correspondantes aux deux valeurs possibles de $D(Q) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Si $\alpha \in K^* - K^{*2}$, ceci correspond donc aux deux matrices

$$M_{\mathcal{B}} = Id_n \text{ ou } M_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & 0 \\ & Id_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

3.2. **Le cas des formes alternées.**
Théorème 3.9. Soit $B : V \times V \to K$ une forme alternée non dégénérée. Alors nécessairement Dim $V = 2p$ et de plus, il existe une base $\mathcal{B}$ de V dans laquelle la matrice de B s'écrit

$$M = \left(\begin{array}{c:c} 0_p & Id_p \\ \hdashline -Id_p & 0_p \end{array}\right)$$

Une telle base est dite *symplectique*.

4. Le groupe orthogonal euclidien

Dans cette section, V est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n, $q : V \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique définie positive dont la forme polaire B est donc un produit scalaire. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(q)$ est le *groupe orthogonal euclidien* (relativement à q). Il admet comme sous-groupe distingué le groupe *spécial orthogonal* $\mathrm{SO}(q) := \{u \in \mathrm{O}(q) | \det\, u = 1\}$.

On rappelle que :

- Il existe des bases orthonormées.
- $\mathrm{O}(q)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées.
- Si $u \in \mathrm{O}(q)$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de V, l'application $u \to M_{\mathcal{B}}(u)$ établit un isomorphisme entre $\mathrm{O}(q)$ (resp.$\mathrm{SO}(q)$) et $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ (resp.$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$) où

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) |^t MM = \mathrm{Id}\}$$

et

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})) = \{M \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) | \det\, M = 1.$$

Définition 4.1. On dit que $u \in \mathrm{O}(q)$ est une *symétrie* si $u^2 = \mathrm{Id}$. On peut alors vérifier que $V = V^+(u) \perp V^-(u)$ où $V^+(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $V^-(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.

On dira de plus que u est

(1) *une réflexion orthogonale* si $V^+(u)$ est un hyperplan.

(2) *un renversement* si $V^+(u)$ est de dimension $n - 2$.

Théorème 4.2.

(1) Le centre de $\mathrm{O}(q)$ est $Z = \{\pm \mathrm{Id}\}$.

(2) Le centre de $\mathrm{SO}(q)$ est $Z \cap \mathrm{SO}(q)$

Théorème 4.3. (Cartan-Dieudonné) Pour $n \geq 2$, $\mathrm{O}(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales. De plus tout élément de $\mathrm{O}(q)$ s'écrit comme produit de n rélexions orthogonales

Théorème 4.4. Pour $n \geq 3$, $\mathrm{O}(q)$ est engendré par les renversements.

Théorème 4.5. $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ est simple.

5. Liste d'exercices

Sauf mention explicite du contraire, K désignera un corps de caractéristique $\neq 2$.

5.1. **Formes sesquilinéaires : Généralités.**

Exercice 5.1. (factorisation d'une forme sesquilinéaire).

Soit $B : V \times V \to K$ une forme σ- sesquilinéaire réflexive. Soit $\pi : V \to V/\mathrm{Rad}_B(V)$ la projection canonique.

Montrer qu'il existe une unique forme σ-sesquilinéaire réflexive

$$b : V/\mathrm{Rad}_B(V) \times V/\mathrm{Rad}_B(V) \to K$$

tel que $\forall x, y \in V$, $b(\pi(x), \pi(y)) = B(x, y)$ et que b est non dégénérée.

Exercice 5.2. Soit $B : V \times V \to K$ une forme sesquilinéaire réflexive et non dégénérée. Soit $W \subset V$ un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale (cette dimension, notée ν, s'appelle *l'indice de* B).

(1) Montrer que $\nu \leq [\frac{n}{2}]$ ($n = \dim V$).
(2) On suppose de plus que B est bilinéaire symétrique et que K est algébriquement clos. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité

Exercice 5.3. (CC 2015)

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ la conjugaison complexe ($\sigma(z) = \overline{z}$). Pour $z \in \mathbb{C}$ on note respectivement $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ la partie réelle et imaginaire de z. On considère une forme σ-hermitienne $B : V \times V \to \mathbb{C}$ et on note $\mathfrak{Re}(B)$ et $\mathfrak{Im}(B)$ les applications $V \times V \to \mathbb{R}$ définies par $\mathfrak{Re}(B)(x, y) = \mathfrak{Re}(B(x, y))$ et $\mathfrak{Im}(B)(x, y) = \mathfrak{Im}(B(x, y))$.

(1) Montrer que $\mathfrak{Re}(B)$ est une forme symétrique et que $\mathfrak{Im}(B)$ est une forme alternée (V est ici vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $2n$).
(2) Montrer que B est non dégénérée si et seulement si $\mathfrak{Re}(B)$ et $\mathfrak{Im}(B)$ sont non dégénérées.

5.2. **Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.**

Exercice 5.4. (Exemple d'une forme bilinéaire symétrique non diagonalisable).

Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur un corps K de caractéristique 2.

Trouver une forme bilinéaire symétrique $f : V \times V \to K$ qui n'admet aucune base orthogonale.

Exercice 5.5. (Classification des formes quadratiques sur les corps finis) Soit V un K espace vectoriel de dimension fini $n > 0$ et Q une forme quadratique non dégénérée sur V.

Soit $\mathcal{B}$ une base de V et $M_{\mathcal{B}}$ la matrice de Q relativement à $\mathcal{B}$. On appelle *discriminant de* Q, noté $D(Q)$, l'image de $\det(M)$ dans le groupe multiplicatif $\frac{K^*}{K^{*2}}$ (K^{*2} désigne le groupe multiplicatif des carrés de K^*).

Montrer que $D(Q)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

On suppose dorénavanr que K est fini de cardinal q.

(1) Quel est le nombre de carrés dans K ?

(2) Soit $a, b \in K^*$. Montrer que l'équation $ax^2+by^2 = 1$ a au moins une solution $(x, y) \in K \times K$.

(3) Soit α un élément de K qui n'est pas un carré. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de V dans laquelle

$$M_{\mathcal{B}} = Id_n \text{ ou } M_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & 0 \\ & Id_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

(4) Quel est le nombre de classe d'équivalence des formes quadratiques non dégénérées sur V.

Exercice 5.6. (Biréglage d'une quadrique).

Sur $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Soit Q la surface d'équation $\{q = 1\}$.

(1) Dessiner l'allure de Q.

(2) Soit $p \in Q$. Montrer que la restriction de q à $p^\perp$ est non dégénérée et calculer sa signature.

(3) Montrer que le groupe $O(q)$ agit transitivement sur Q.

(4) Montrer que par chaque point de Q passent exactement deux droites contenues dans Q (on pourra d'abord le vérifier pour $(1, 0, 0)$).

Exercice 5.7. (Diagonalisation simultanée des formes quadratiques, petits mouvements autour d'une position d'équilibre).

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ (appelée *potentiel* dans le cadre de cet exercice).

On considère le système différentiel

$$(E) : \ \ddot{X} = -\nabla V$$

ou

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ (Gradient de } V\text{).}$$

Soit $X = X(t)$ une solution de (E) où t appartient à un intervalle I.

(1) Montrer que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x_i}^2 + V$$

est indépendant de t (principe de conservation de l'énergie).

(2) On suppose que V est une forme quadratique. Montrer qu'il existe $u \in O(n,\mathbb{R})$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ telle que $Y(t) = u^{-1}(X(t))$ est solution du systéme

$$\begin{cases} \ddot{y_1} = -\lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \ddot{y_n} = -\lambda_n y_n \end{cases}$$

Exercice 5.8. Soit V un espace vectoriel de dimension ≥ 2 sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. Soient q et q' 2 formes quadratiques *non dégénérées* ayant même cône isotrope : $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$ où $\mathcal{C}(q) = \{q = 0\}$. On suppose de plus que $\mathcal{C}(q) \neq \{0\}$. On note B et B' les formes polaires respectives de q et q'.

On veut montrer qu'il existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tel que $q' = \lambda q$.

(1) Soit $x_0 \in \mathcal{C}(q)$, $x_0 \neq 0$. Pour $x \in V$, on définit $A_x = \{\alpha \in K | \alpha x_0 + x \in \mathcal{C}(q)\}$. Montrer que A_x est réduit à un élément ssi $x \notin {x_0}^{\perp}$.

(2) Montrer que l'hyperplan orthogonal à x_0 est le même pour q et q'. On notera H cet hyperplan.

(3) Établir qu'il existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tel que, $\forall x \in V$, on ait

$$B'(x, x_0) = \lambda B(x, x_0).$$

(4) Montrer que pour tout $x \notin H$, on a $q'(x) = \lambda q(x)$.

(5) Conclure (on pourra montrer qu'une forme quadratique sur V nulle en dehors d'un hyperplan est identiquement nulle).

Exercice 5.9. (Quadriques, caractérisation géométrique des similitudes).

Soit $q : V \to K$ (char $K \neq 0$) une forme quadratique non dégénérée. On suppose que $\mathcal{C}(q) \neq \{0\}$.

(1) On considère la projection canonique $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$. Montrer que $\pi(\mathcal{C}(q)\setminus\{0\})$ (quadrique projective associée à V) détermine q à une constante multiplicative près.

(2) On appelle similitude de q toute transformation linéaire $u \in GL(V)$ ayant la propriété suivante : Il existe $\mu \in K \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in V$on ait $q(u(x)) = \mu q(x)$. Montrer que $u \in GL(V)$ est une similitude ssi $u(\mathcal{C}(q)) = \mathcal{C}(q)$.

Exercice 5.10. Soit K un corps de caractérique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension finie, $B : V \times V \to K$ une forme *bilinéaire symétrique* non dégénérée et $\sigma \in O(B)$ une isométrie.

Montrer que

(1) $\mathrm{Ker}(\sigma - Id) = \big(\mathrm{im}(\sigma - Id)\big)^{\perp}$

(2) $(\sigma - Id)^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{im}(\sigma - Id)$ est totalement isotrope

(3) Pour $v \in V \setminus \{0\}$, le vecteur $(\sigma - Id)(v)$ est isotrope si et seulement si $(\sigma - Id)(v)$ et v sont othogonaux.

5.3. **Formes alternées.**

Exercice 5.11. (Classification des formes alternées, base symplectique).
Soit $B : V \times V \to K$ une forme alternée où V est un K e.v de dimension n. On suppose que B est non dégénérée.

(1) Montrer que n est nécessairement pair.
(2) Soient $x, y \in V$ tels que $B(x, y) \neq 0$. et W le sous-espace vectoriel engendré par x et y. Montrer que $V = W \perp W^{\perp}$.
(3) En déduire qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de B s'écrit

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0_p & Id_p \\ \hline -Id_p & 0_p \end{array}\right)$$

avec $n = 2p$ (une telle base est appelé *base symplectique*).

Exercice 5.12. (Action transitive du groupe symplectique).
Soit $B : V \times V \to K$ une forme alternée non dégénérée.
On dit qu'un couple $(v_1, v_2) \in V \times V$ est *hyperbolique* si $B(v_1, v_2) = 1$.
Montrer que le groupe symplectique $O(B)$ agit transitivement sur l'ensemble des couples hyperboliques et en déduire que l'action de $O(B)$ sur $V \setminus \{0\}$ est transitive.

Exercice 5.13. (Transvections symplectiques)
Soit B une forme alternée non dégénérée sur un K-espace vectoriel V.

(1) Montrer qu'un transvection de $GL(n, K)$ appartient à $O(B)$ si et seulement si elle est de la forme

$$t(v) = v + \alpha B(v, u)u$$

avec $\alpha \in K^*$ et $u \in V \setminus \{0\}$.

(Indication : on pourra remarquer que toute transvection dans $GL(V)$ s'écrit sous la forme $\varphi(v) = v + l(v)u$ où l est une forme linéaire non triviale et u un vecteur non nul de Ker l).
(2) On suppose que dim $V = 2$. Montrer que toute transvection appartient à $O(B)$. En déduire que $O(B)$ contient $SL(2, V)$.
(3) On suppose que $V = U \perp W$ et que $t_U : U \to U$ est une transvection appartenant à $O(B_{|U \times U})$. Vérifier qu'il existe une unique transvection $t \in O(B)$ telle que $t_{|U} = t_U$.

Une transvection t comme ci-dessus est appelée *transvection symplectique*. On note $\mathcal{T}$ le groupe engendré par les transvections symplectiques.

Exercice 5.14. (Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques).

(1) Soit $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un élément τ de $\mathcal{T}$ tel que $\tau(v_1) = v_2$ (on pourra distinguer les cas $v_2 \notin {v_1}^{\perp}$ et $v_2 \in {v_1}^{\perp}$).
(2) Soient $u, v, w \in V$ tels que $B(u, v) = B(u, w) = 1$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{T}$ telle que $f(u) = u$ et $f(v) = w$ (on pourra caractériser les transvections symplectique qui fixent u).

(3) Montrer que $\mathcal{T}$ agit transitivement sur l'ensemble des couples hyperboliques.

(4) En raisonnant par récurrence sur la dimension de V, montrer que $\mathcal{T} = O(B)$ et en déduire que $O(B)$ est un sous-groupe de $SL(V)$. Que peut-on dire dans le cas $n = 2$?

5.4. **Groupe orthogonal euclidien.**

Exercice 5.15. (CC 2015)

Soit (V, q) un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ Soit $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* pour le produit scalaire associé à q. Pour $u \in O(q)$, on note $M(u)$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On rappelle que la correspondance $u \to M(u)$ permet d'identifier $O(q)$ et le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^t M = Id\}$.

On se propose de décrire les morphismes σ de $O(n, \mathbb{R})$ dans le groupe à deux éléments $G_2 = \{-1, 1\}$.

(1) Donner un exemple non trivial d'un tel σ.

(2) Soit $J \in O(n, \mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; soit $M \in O(n, \mathbb{R})$ une matrice de réflexion orthogonale.

Montrer que M et J sont conjuguées dans $O(n, \mathbb{R})$.

(3) Soit σ un morphisme non trivial de $O(n, \mathbb{R})$ dan G_2.

(a) Montrer que $\sigma(M) = \sigma(J)$.

(b) En utilisant la génération de $O(n, \mathbb{R})$ par les matrices de réflexions orthogonales, montrer que $\sigma(J) = -1$. En déduire que σ coïncide avec le morphisme *det* qui à une matrice associe son déterminant.

Exercice 5.16. Soit (V, q) un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et soit B le produit scalaire associée à la forme quadratique q (i.e la forme polaire de q). Soit $\mathcal{B}$ une base *orthonormée*. Pour $u \in O(B)$, on note $M(u)$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On rappelle que la correspondance $u \to M(u)$ établit un isomorphisme de groupes entre $O(B)$ et $O(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | MM^t = Id\}$. On note $SO(n, \mathbb{R})$ le sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant égal à 1.

(1) Soit W un s.e.v de V de dimension p. On considère le sous-groupe $O^+(B)_W = \{u \in O^+(B) | u_{|W} = Id_W\}$.

Montrer que $O^+(B)_W$ est isomorphe à $SO(n-p, \mathbb{R})$

(2) Soit G un sous-groupe *distingué* de $O^+(B)$. Soit W un s.e.v de V de dimension $n-3$. On note $G_W = G \cap O^+(B)_W$. Montrer que si $G_W \neq \{Id\}$, alors $G = O^+(B)$ (on rappelle que $SO(3, \mathbb{R})$ est simple et que pour tout $n \geq 3$, $SO(n, \mathbb{R})$ est engendré par les renversements).

(3) Pour tout $a \in V \setminus \{0\}$, on note τ_a la réflexion orthogonale d'hyperplan $\{a\}^\perp$.

Soient $a, b \in V \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un s.e.v $W \subset V$ de dimension $n-2$ tel que la restriction de l'isométrie $s = \tau_a \tau_b$ à W soit l'identité.

(4) Pour $u, v \in O^+(B)$, on désigne par $[u, v]$ le commutateur $uvu^{-1}v^{-1}$.

Vérifier que, si $v = \tau_b \tau_a$, alors $[u, v] = \tau_{u(b)} \tau_{u(a)} \tau_a \tau_b$.

(5) Soit G un sous-groupe *distingué* de $O^+(B)$. On suppose que G contient un élément $u \neq Id$ ayant 1 comme valeur propre.

Déduire de ce qui précède que $G = O^+(B)$.