Analyse des séries divergentes

Frank Loray

Introduction

Les séries divergentes apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes mathématiques ou physiques. Un des exemples les plus vieux et les plus fameux est dû à L. Euler, en 1760. Considérons l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x^2 \cdot f'(x) = f(x) - x.$$

En $0 \in \mathbb{R}$, le théorème de Cauchy ne s'applique pas. Si l'on substitue formellement $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, il vient : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = n \cdot a_n$ pour $n \geq 1$ d'où $f(x) = \sum_{n \geq 0} n! x^{n+1}$. Cette solution diverge...

À commencer par L. EULER, de nombreux mathématiciens ont cherché à donner un sens à la valeur de telles séries en dehors de l'origine (bien qu'une majorité aient décidé qu'elles n'avaient aucun intérêt). Dans [9], une « petite histoire des séries divergentes » nous invite à redécouvrir quelques tentatives notamment de *sommation par moyennes* (Cesàro, É. Borel), de *sommation abélienne*[1] (Lindelöf, G.-M. Hardy) et de *sommation au plus petit terme* (G.-G. Stokes). Cette dernière, bien qu'étant la plus surprenante, était couramment utilisée dans d'autres domaines de la science comme le remarquait H. POINCARÉ[2] :

> « Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.
>
> Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques ; la seconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières.
>
> Les astronomes ne les connaissent pas toujours d'une façon bien précise, mais ils les franchissent rarement ; l'approximation dont ils se contentent les maintient d'ordinaire beaucoup en deçà ; d'ailleurs leur instinct les guide et, s'il les trompait, le contrôle de l'observation les avertirait promptement de leur erreur.
>
> Je crois néanmoins qu'il y a lieu d'apporter dans cette question un peu plus de précision, et c'est ce que je vais essayer de faire, bien que par sa nature même elle ne s'y prête pas beaucoup. »

1. En référence au théorème d'Abel : si $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, alors sa somme est donnée par $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
2. Extraits de *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* de H. Poincaré (1893).

La démarche de POINCARÉ fut à l'opposé des précédentes. Partant d'une fonction f analytique sur un ouvert U, on définit son développement de Taylor en un point x_0 du bord de U comme étant la limite (coefficient par coefficient, quand elle existe) des développements de Taylor aux points intérieurs $x \in U$ lorsque $x \to x_0$: ce sont les développements asymptotiques (voir 1.2.). Une adaptation due à Ritt du lemme de Borel[3] nous dit que toute série divergente peut s'obtenir de cette manière. Si la théorie classique qui s'en est développée a de nombreuses applications, elle ne permet ni de répondre à la question soulevée par POINCARÉ lui-même, ni de considérer la fonction f comme étant la somme de son développement asymptotique au bord. Ce dernier point provient de l'existence de fonctions analytiques asymptotiquement plates telles $\exp(-1/x)$ en 0^+. La théorie est finalement aussi "molle" que celle des fonctions de classe C^∞.

L'idée de T. CARLEMAN est de construire une classe intermédiaire de fonctions (coincée entre la classe des fonctions analytiques et celle des fonctions C^∞) telle que le développement de Taylor en un point arbitraire $x \in U$ détermine la fonction. Ce sont les classes de fonctions dites *quasi-analytiques*. Il y a de nombreuses façons de construire une telle classe qui donnent de nombreuses sommes possibles à une même série divergente. Il importe de choisir celle qui convient au problème.

La classe de fonctions que nous allons présenter convient parfaitement aux équations différentielles ordinaires. Ce sont les fonctions admettant un développement asymptotique de type Gevrey (voir 1.3.). La théorie a commencé au début du siècle avec des travaux de G.-N. WATSON, E. LEROY et F. NEVANLINNA sans connaître beaucoup de succès puis retrouvée et mise au propre à la fin des années soixante-dix par J.-P. RAMIS. Pour qui a déjà calculé formellement la solution d'une équation différentielle, il est clair que les relations de récurrence définissant les coefficients de la solution formelle leur imposent une croissance, au plus, de type Gevrey (voir 1.4.) : une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est dite Gevrey d'ordre $0 < k < \infty$ si les coefficients satisfont la condition de croissance $|a_n| \leq CM^n(n!)^{1/k}$ pour des constantes $C, M > 0$. Si une fonction f admet une série Gevrey d'ordre k comme développement asymptotique, il est raisonnable de lui imposer des conditions supplémentaires d'asymptoticité Gevrey d'ordre k : on demande que les dérivées successives $f^{(n)}$ de f satisfassent la condition de croissance $\|\frac{f^{(n)}}{n!}\|_U \leq CM^n(n!)^{1/k}$ pour des constantes $C, M > 0$. Par exemple, les fonctions Gevrey asymptotes à l'ordre k à la série nulle sont les fonctions à décroissance exponentielle d'ordre k.

La quasi-analyticité nécessite le passage au plan complexe. Le résultat fondamental de G.-N. Watson[4] est qu'une fonction holomorphe définie sur un secteur d'ouverture $\theta > \frac{\pi}{k}$ pointé à l'origine, $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z-d)| < \theta\ ,\ |z| < r\}$, ne peut être exponentiellement plate à l'ordre k en 0 que si elle est identiquement nulle (voir 1.5.). Par exemple, $\exp(-1/z)$ est, par définition, exponentiellement plate à l'ordre 1 en 0 sur tout secteur contenu dans le demi-plan à droite, $\{\Re(z) > 0\}$ mais explose à l'origine dès qu'on la regarde sur un secteur d'ouverture $> \pi$. Ainsi, d'après le lemme de Watson, si une fonction holomorphe f, définie sur un secteur d'ouverture $> \frac{\pi}{k}$, y admet une série $\hat{f}$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre k, alors f peut être considérée sans ambiguïté comme "la somme" de $\hat{f}$ sur ce secteur.

Toute série Gevrey d'ordre k n'admet pas une telle somme et on appelle k-sommable dans la direction d une série admettant une somme Gevrey d'ordre k sur un grand secteur bissecté par d et, tout simplement, k-sommable une série sommable dans toutes les directions

3. Toute série divergente est le développement de Taylor d'une fonction de classe C^∞ (voir 1.1.).
4. Ou plutôt, la version améliorée due à F. Nevanlinna.

sauf un nombre fini. Les directions le long desquelles la série n'est pas k-sommable sont appelées directions de Stokes. Entre deux directions de Stokes successives, les différentes sommes de la série se recollent pour former une k-somme maximale. Celles-ci forment alors un recouvrement d'un voisinage épointé de l'origine par des ouverts sectoriels que l'on appelle la k-somme de la série (voir 1.6.). Le long de chaque direction de Stokes les deux sommes, précédente et suivante, se chevauchent sur un ouvert sectoriel d'ouverture exactement $\frac{\pi}{k}$; leur différence y est exponentiellement plate à l'ordre k et la donnée de cette obstruction au recollement des différentes sommes maximales en chaque direction de Stokes mesure précisément l'obstruction de la série à converger.

Par exemple, la série d'Euler est 1-sommable de direction de Stokes $\mathbb{R}^+$. Sa somme est définie multiforme pour $\{-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < 2\pi + \frac{\pi}{2}\}$ et sa monodromie est donnée par la fonction $-2i\pi\exp(-1/z)$. Bien sûr, cette somme est solution de l'équation d'Euler. Au début du siècle, É. BOREL propose un algorithme de sommations de certaines séries divergentes, notamment la série d'Euler. Justifié par un procédé de sommation par moyennes (voir 2.1.), il divise brutalement les coefficients de la série par $n!$ (transformée de Borel, voir 2.2. et 2.3.) de sorte qu'elle converge, puis la prolonge analytiquement le long d'une direction d jusqu'à l'infini pour lui appliquer une transformée de Laplace (voir 2.4. et 2.5.). Lorsque cet algorithme est possible, on dit que la série est Borel-sommable dans la direction d et sa somme est la fonction que l'on récupère à la fin (voir 2.6.). Il se trouve qu'une série est 1-sommable si et seulement si elle est Borel-sommable et que les sommes coïncident ! Un analogue k-sommable de l'algorithme de Borel a été défini par E. Leroy et F. Nevanlinna peu de temps après. Ici, l'obstruction à la convergence de la série se visualise par l'obstruction au prolongement analytique de sa transformée de Borel le long de certaines directions. Nous verrons plus loin comment ce point de vue peut conduire à une analyse plus fine de la divergence de la série.

Une remarque due à B. MALGRANGE est que la méthode de sommation au plus petit terme, que POINCARÉ cherchait à justifier, s'avère efficace pour les séries k-sommables : elle donne une approximation de la vraie somme à un exponentiellement plat d'ordre k près (voir 1.4.).

On a longtemps cru que les solutions formelles des équations différentielles algébriques étaient toutes k-sommables pour un k convenable. Jusqu'à la fin des années quatre-vingts, tous les théorèmes allaient en ce sens. C'est à cette époque que RAMIS parle de multisommabilité comme généralisation nécessaire et suffisante de la k-sommabilité pour sommer toutes les solutions de telles équations différentielles. Cette nécessité est suggérée par le fait qu'une série formelle ne peut être k-sommable pour deux niveaux de sommation, $k = k_1, k_2$, distincts, excepté si elle converge (voir 2.6.) : si $\hat{f}_1$ désigne la série d'Euler et $\hat{f}_2$ sa ramifiée par $z \mapsto z^2$, $\hat{f}_2(z) := \hat{f}_1(z^2)$, alors $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont respectivement sommables à l'ordre 1 et 2 mais leur somme $\hat{f} := \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ n'est sommable à aucun ordre k et est pourtant solution d'une équation différentielle ordinaire algébrique de degré 3 (voir 2.7.). Ce premier exemple a été proposé par J.-P. RAMIS et Y. SIBUYA en 1984.

Dès lors, plusieurs auteurs proposent des algorithmes de sommation à plusieurs niveaux, à commencer par J. ÉCALLE en 1987, puis W. BALSER, W.-B. JURKAT, B. MALGRANGE, J. MARTINET, J.-P. RAMIS, J.-C. TOUGERON et, très récemment, M. LODAY-RICHAUD et G. POURCIN (voir 2.7.). Ils sont tous équivalents en ce sens que si deux de ces algorithmes sont capables[5] de sommer une série donnée, ils lui associent la même somme. Maintenant, citons un résultat qui justifie *a posteriori* tout cela :

5. Par exemple, l'accéléro-sommation d'Écalle possède un champ d'action bien plus vaste que bien d'autres algorithmes.

Théorème 1 *Soient $F(z, w_0, \ldots, w_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables (réelles ou complexes) et $\hat{f}$ une série formelle solution de l'équation différentielle :*

$$F(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)) = 0$$

Alors $\hat{f}$ est multisommable et ses multisommes sont des solutions analytiques de l'équation différentielle.

Les différents ordres de sommations sont les pentes positives du polygone de Newton associé à l'équation, ce qui rend leur calcul simple et algorithmique. La multisomme de $\hat{f}$ est encore solution de l'équation différentielle. Les méthodes de multisommabilité permettent un calcul très précis de ces solutions. L'implémentation sur machine a été faite par J. THOMANN.

Dans le cas linéaire, une première démonstration de ce théorème est due à J.-P. RAMIS. Puis il a proposé deux variantes : l'une en collaboration avec W. BALSER, B.-L.-J. BRAAKSMA et Y. SIBUYA ; l'autre en collaboration avec B. MALGRANGE. Dans le cas général, le résultat a été démontré par B.-L.-J. BRAAKSMA en utilisant une approche de J. ÉCALLE.

Nous n'aborderons pas du tout ce théorème durant notre exposé. Par contre, nous traiterons en détails la 1-sommabilité des solutions formelles aux équations (C), (A) et (D) de l'exemple suivant sous forme de problème (voir 1.7. et 1.8.).

Autour d'un exemple discret : l'équation fonctionnelle d'Abel

On considère, près de $0 \in \mathbb{R}$, les transformations

$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots$

$\psi(x) = x + x^2 + x^3$

D'un point de vue dynamique, elles ont même comportement près de 0 : il est possible de construire[6] un homéomorphisme $f : U \to V$ fixant 0, où U et V sont deux intervalles ouverts contenant 0 et $f^{\circ(-1)} : V \to U$ l'inverse de f, satisfaisant l'équation de conjugaison :

$$\text{(C)} \qquad \psi = f^{\circ(-1)} \circ \varphi \circ f$$

près de 0, de sorte que $\psi^{\circ n}(x) := \psi \circ \cdots \circ \psi(x)$ est donné par $\psi^{\circ n}(x) = f^{\circ(-1)} \circ \varphi^{\circ n} \circ f(x)$ avec $\varphi^{\circ n}(x) = \frac{x}{1-nx}$ pourvu que les points intermédiaires $x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{\circ n}(x)$ (resp. $x, \varphi^{\circ(-1)}(x), \ldots, \varphi^{\circ n}(x)$ si $n < 0$) restent tous dans le domaine de définition de f.

Maintenant, si l'on veut réaliser f analytiquement, on substitue $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et l'on trouve une infinité de solutions formelles (en fait, le coefficient a_2 est arbitraire et détermine tous les autres), mais toutes divergent[7]...

6. On construit f en remarquant que φ et ψ sont toutes deux convexes et tangentes à l'identité en 0 et donc contractent sans point fixe un petit intervalle à gauche de $0 \in \mathbb{R}$: on peut par exemple décider que f va envoyer affinement un domaine fondamental pour l'action de ψ à gauche de 0 sur un domaine fondamental pour l'action de φ, $f : [-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}] \to [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$; $x \mapsto \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$, où $-\frac{3}{8} = \psi(-\frac{1}{2})$ et $-\frac{1}{3} = \varphi(-\frac{1}{2})$, puis f est déterminée sur chaque intervalle $[\psi^{\circ n}(-\frac{1}{2}), \psi^{\circ n+1}(-\frac{1}{2})]$, $n \in \mathbb{N}$, par $f(\psi^{\circ n}(x)) = \varphi^{\circ n}(f(x))$; on obtient ainsi un homéomorphisme $f : [-\frac{1}{2}, 0] \to [-\frac{1}{2}, 0]$ fixant 0 et conjuguant ψ à φ par construction ; à droite de 0, on construit f de la même manière, à ceci près que ce sont les transformations inverses $\psi^{\circ(-1)}$ et $\varphi^{\circ(-1)}$ qui contractent.

7. Ce dernier fait peut se montrer sans calcul en utilisant un peu de géométrie complexe sur la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Supposons qu'une des séries formelles solutions $f(x) = x + a_2 x^2 + \cdots$

Si l'on note $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ et $\tilde{f}$ nos transformations vues dans la variable $w = -\frac{1}{x}$, alors $\tilde{\varphi}$ est la translation $w \mapsto w + 1$, $\tilde{\psi}$ est une petite perturbation de la translation au voisinage de $w = \infty$ ($x = 0$), $w \mapsto w + 1 - \Delta(w)$ où Δ est analytique et s'annule au second ordre en $w = \infty$ en ce sens que $\Delta(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{x^2}{1+x+x^2} = x^2 + \cdots$ et $\tilde{f}$ satisfait l'équation fonctionnelle d'Abel :

$$\text{(A)} \qquad \tilde{f} \circ \tilde{\psi} = \tilde{f} + 1.$$

Si l'on cherche $\tilde{f}$ sous la forme $\tilde{f}(w) = w + F(w)$, alors l'équation (A) nous donne l'équation dite "aux différences" :

$$\text{(D)} \qquad F(\tilde{\psi}(w)) - F(w) = \Delta(w).$$

La solution formelle $f(x) = x + a_2 x^2 + \cdots$, si elle convergeait, nous donnerait une solution F à (D), analytique en $w = \infty$, satisfaisant $\lim_{w \to \infty} F(w) = a_2$. Maintenant, l'équation (D) nous donne, par exemple pour $w \gg 0$, $F(\tilde{\psi}^{\circ n+1}(w)) - F(w) = \sum_{k=0}^{n} \Delta(\psi^{\circ k}(w))$ pour $n \in \mathbb{N}$ et, en passant à la limite, $F(w) = a_2 - \sum_{n \geq 0} \Delta(\psi^{\circ n}(w))$.

Il se trouve que cette expression converge et définit une fonction analytique pour $w \gg 0$. En effet, on peut supposer $|\Delta(w)| < \frac{1}{2}$ uniformément sur un domaine $]M, +\infty[$, $M \gg 0$, de sorte que $\psi(w) > w + \frac{1}{2}$ et donc $\psi^{\circ n}(w) > w + \frac{n}{2}$; puisque Δ s'annule à l'ordre 2 en $w = \infty$, on a $|\Delta(w)| < \frac{C}{w^2}$, pour une constante $C > 0$, et la somme du second membre converge uniformément sur $]M, +\infty[$. On notera $F^+(w)$ la solution effective obtenue et on construit de façon similaire une solution $F^-(w)$ sur un domaine $]-\infty, -M[$. Les transformations f^+ et f^- que l'on récupère à gauche et à droite de $0 \in \mathbb{R}$ conjuguent par construction ψ à φ et sont, nous le verrons plus tard, toutes deux analytiques sur leur domaine et infiniment différentiables à l'origine ; leur série de Taylor y est précisément la solution formelle divergente $f(x) = x + a_2 x^2 + \cdots$ dont on est parti : à chaque solution formelle de notre problème correspond donc une solution effective analytique en dehors de l'origine et seulement infiniment différentiable à l'origine.

En 1975, après avoir résolu complètement par des approches géométriques plusieurs problèmes ouverts sur les difféomorphismes résonants (une classe de transformations un peu plus large que celle des transformations φ de l'exemple précédent), J. ÉCALLE se lance dans l'élaboration de la "théorie des fonctions résurgentes" et propose, dans un premier temps, une nouvelle approche du même résultat. Peut-être à cause de ceci, ses travaux n'ont pas connu un succès immédiat. En 1981, B. MALGRANGE découvre et fait découvrir à la communauté mathématique cette théorie, quelques applications et sa portée dont on ne pressent pas les limites. Nous allons tenter d'en faire sentir quelques idées de départ avec les moyens que nous avons mis à notre disposition lors de la construction de la k-sommabilité, bien que même les définitions précises soient au delà de la portée de notre article (voir 3).

Une première idée est que les solutions k-sommables des équations différentielles sont bien plus que k-sommables. Leur transformée de Borel ne trouve comme obstructions au

converge au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$. Alors elle se prolonge en un difféomorphisme holomorphe $f : U \to V$; $z \mapsto z + a_2 z^2 + \cdots$ fixant 0 où U et V sont deux voisinages ouverts de $0 \in \mathbb{C}$ et satisfait encore $\psi^{\circ n}(z) = f^{\circ(-1)} \circ \varphi^{\circ n} \circ f(z)$ près de $0 \in \mathbb{C}$.

Nous allons montrer que $f^{\circ(-1)}$, qui n'est *a priori* définie que sur V, se prolonge en fait holomorphiquement à la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$. Tout d'abord, la dynamique de φ, vue dans la coordonnée complexe $w = -\frac{1}{z}$ sur le domaine $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}$, est la translation $w \mapsto w + 1$. Étant donné $w_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ quelconque autre que 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $w_1 \in V$ tels que $w_0 = \varphi^{\circ n}(w_1)$; on pose $f^{\circ(-1)}(w_0) = f^{\circ(-1)} \circ \varphi^{\circ n}(w_1) := \psi^{\circ n} \circ f^{\circ(-1)}(w_1)$. Par construction, f est maintenant bien définie et holomorphe sur la sphère de Riemann et donc constante d'après le théorème de Liouville, ce qui contredit le fait que $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$.

prolongement analytique que des singularités isolées assez simples. En restant systématiquement sur le plan de Borel, on s'offre la possibilité d'une étude plus fine et, somme toute, plus classique de ces singularités. Pour cela, on parvient à faire passer l'équation différentielle à travers la transformée de Borel et on l'étudie sur le plan de Borel. Pour certains problèmes, une telle démarche permet de voir des phénomènes que la k-sommabilité ne voyait pas. Par ailleurs, on connaît aujourd'hui des problèmes mathématiques donnant naissance à des séries divergentes qui ne sont pas multisommables. Par exemple, la transformée de Borel peut être une fonction définie en dehors d'un réseau de points tels que $2\pi\mathbb{Z} + 2i\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la série n'est pas sommable au sens de la k-sommabilité mais peut être analysée sur le plan de Borel.

Les motivations de l'auteur à écrire ce texte. Il existe aujourd'hui plusieurs références élémentaires et agréables à lire, bref, très bien écrites sur le sujet. Nous en citons quelques-unes à la fin de l'article. Lorsque j'ai dû, pour mes recherches personnelles, apprendre un peu de cette théorie, ce n'était pas le cas. Essentiellement, il y avait le cours de DEA de J.-C. Tougeron dans lequel la plupart des calculs se trouvaient et quelques exposés plus “didactiques” ou “philosophiques” de J. Martinet et J.-P. Ramis avec quelques idées de démonstrations. La préhistoire de cet article, ce sont des notes que j'ai lentement rédigées en combinant les deux littératures que je viens de citer. Entre temps, sont apparues de bonnes références assez proches du texte que je présente ici. Je les ai parfois utilisées pour améliorer ma présentation. Ce qui caractérise le contenu du présent article, c'est le choix très personnel de mener toutes les démonstrations jusqu'à :

- la caractérisation des k-sommes comme recouvrements bornés dont le cocycle est un k-cocycle (voir corollaire 2),
- la 1-sommabilité des solutions des équations (A), (C) et (D) de l'exemple précédent (voir le problème à la fin du chapitre 1),
- la convergence des séries à la fois sommables à deux ordres distincts (voir le théorème 5),

tout en restant le plus naïf possible quant à la présentation des idées et en préservant le lecteur de tout prérequis autre qu'un cours très basique sur les fonctions holomorphes (essentiellement l'analyse de Cauchy). Je crois, sauf erreur de ma part, que ce texte en retire une petite originalité et qu'il ne sera pas de trop.

Je tiens à remercier particulièrement J.-C. TOUGERON, J.-P. RAMIS et J. ÉCALLE dont les textes, exposés et/ou discussions personnelles m'ont guidé du début à la fin de ces notes et les nombreuses personnes, dont les références de la fin donnent faible idée, qui ont contribué à rendre les idées très naturelles. Je remercie aussi F. FAUVET et D. SAUZIN qui m'ont bien aidé à faire mes premiers pas en calcul étranger.

Chapitre 1

La théorie asymptotique et les séries k-sommables

1.1. Rappels

On note $\mathbb{R}[[x]]$ l'anneau des séries formelles :

$$\mathbb{R}[[x]] = \Big\{\sum_{n\geq 0} a_n x^n \;\Big|\; a_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Si f est une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0, alors on lui associe sa série de Taylor $\hat{f} \in \mathbb{R}[[x]]$ en 0 :

$$C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]\,;\, f \longmapsto \hat{f}.$$

Lemme 1 (Borel) *La flèche précédente est surjective : toute série formelle (même divergente) est le développement de Taylor d'une fonction de classe C^∞.*

Preuve : On construit tout d'abord une fonction cloche C^∞-plate en posant :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &:= 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } e^{-1/x} \text{ si } x \geq 0,\\
\varphi_2(x) &:= \varphi_1(x)\cdot\varphi_1(1-x),\\
\varphi_3(x) &:= \int_{-\infty}^{x}\varphi_2(t)\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(t)\,dt\\
\theta(x) &:= \varphi_3(x+2) \text{ si } x \leq 0 \text{ et } \varphi_3(2-x) \text{ si } x \geq 0\,;
\end{aligned}$$

la fonction θ est de classe C^∞ et satisfait :

$$\theta(x) \equiv 1 \text{ pour } |x| \leq 1,\; 0 \leq \theta(x) \leq 1 \text{ pour } 1 \leq |x| \leq 2 \text{ et } \theta(x) \equiv 0 \text{ pour } 2 \leq |x|.$$

Maintenant, étant donnée une série $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$, on pose $\theta_\varepsilon(x) = \theta(\frac{x}{\varepsilon})$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \theta_{\varepsilon_n}(x)$ converge uniformément sur tout compact dès lors que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge suffisamment vite vers 0. La limite obtenue est une fonction de classe C^∞ dont le développement de Taylor en 0 est précisément $\hat{f}$. □

Remarque. La flèche $C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]$ n'est par contre pas injective. Ce sont d'ailleurs des fonctions plates non triviales qui nous ont permis de démontrer le lemme précédent : $\hat{\varphi}_1 = 0$ et φ_1 est dans le noyau.

On note C^ω la classe des fonctions analytiques, c'est-à-dire égales à leur série de Taylor au voisinage de chaque point.

Critère 1 (d'analyticité) *Soit I un intervalle; une fonction $f \in C^\infty(I)$ est analytique sur I si et seulement si pour tout $J \subset I$ compact, il existe des constantes $C_J, r_J > 0$ telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\; \sup_{x\in J}\Big|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Big| \leq C_J \cdot r_J^n.$$

La flèche $C^\omega(\mathbb{R}_{,0}) \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]$; $f \longmapsto \hat{f}$ est injective[8] mais non surjective. L'image est l'ensemble des séries convergentes :

$$\mathbb{R}\{x\} = \Big\{\sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]] \;\Big|\; \exists C, r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq C r^n\Big\}.$$

Dans la suite, les développements asymptotiques au sens de Poincaré joueront le rôle des fonctions C^∞ et les développements Gevrey (sur les grands secteurs), le rôle des fonctions analytiques.

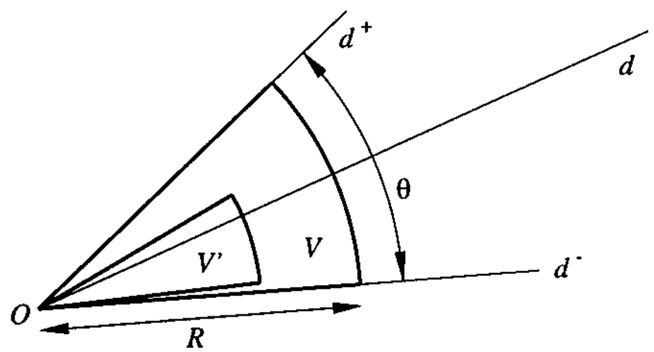
1.2. Développements asymptotiques classiques

Dans la suite, on appelle *secteur* pointé en 0, de *direction* (médiane) d, d'*ouverture* θ et de *rayon* R dans $\mathbb{C}$, et on note[9] $V(d, \theta, R)$ (ou tout simplement V) l'ouvert :

$$V(d,\theta,R) = \Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; -\frac{\theta}{2} < \arg(z) - d < \frac{\theta}{2} \text{ et } |z| < R\Big\}.$$

On parlera encore de secteur de *base* $]d_-, d_+[$ et de rayon R pour désigner le même objet ($d = \frac{d_- + d_+}{2}$ et $\theta = d_+ - d_-$) ; on notera alors $V = V(]d_-, d_+[, R)$:

$$V(]d_-, d_+[, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid d_- < \arg(z) < d_+ \text{ et } |z| < R\}.$$



Un secteur V' sera dit *sous-secteur* de V et on notera $V' \prec V$ si $V' \subset V$ avec $V = V(]d_-, d_+[, R)$, $V' = V(]d'_-, d'_+[, R')$, $d_- < d'_- < d'_+ < d_+$ et $R' < R$.
On note $\mathcal{O}(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur V et $\mathbb{C}[[z]]$ l'anneau des séries formelles :

$$\mathbb{C}[[z]] = \Big\{\sum_{n\geq 0} a_n z^n \;\Big|\; a_n \in \mathbb{C}\Big\}.$$

La définition suivante est due à H. Poincaré :

8. Par la notation $C^\omega(\mathbb{R}_{,0})$ il faut comprendre l'ensemble des fonctions définies chacune sur un certain intervalle contenant $0 \in \mathbb{R}$ et qui y sont analytiques étant sous entendu qu'une fonction et sa restriction à un plus petit domaine seront considérées comme le même objet. On parle souvent de *germe de fonction analytique en* 0 pour désigner un tel objet.

9. Selon le contexte, d sera un angle ou une demi-droite, θ sera toujours un angle et $R > 0$ pourra prendre la valeur $+\infty$. En fait, le rayon R n'aura pas vraiment d'importance dans le chapitre 1.

Définition 1 *Soit $f \in \mathcal{O}(V)$. On dit que f admet $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ comme développement asymptotique (à l'origine) si les restes $\varepsilon_n(z) \in \mathcal{O}(V)$ définis par : $f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p = z^{n-1}\varepsilon_n(z)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, satisfont : $\lim_{z\to 0} \varepsilon_n(z) = 0$ dans chaque sous-secteur $V' \prec V$.*
On note $\mathcal{A}(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U admettant un développement asymptotique à l'origine.

Proposition 1 *Si $f \in \mathcal{A}(V)$ admet $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ comme développement asymptotique à l'origine, alors $f' \in \mathcal{A}(V)$ et admet $\sum_{n>0} n a_n z^{n-1}$ comme développement asymptotique.*

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{z\to 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = a_n$ dans chaque sous-secteur et le développement asymptotique de $f \in \mathcal{A}(V)$ est unique : on le note $\hat{f}$.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p + z^{n-1}\varepsilon_n(z)$ d'où :

$$f'(z) = \sum_{p=1}^{n-1} p a_p z^{p-1} + z^{n-2}[(n-1)\varepsilon_n(z) + z\varepsilon'_n(z)].$$

Il s'agit de montrer que, sur un sous-secteur arbitraire $V' \prec V$, le crochet se comporte "comme un $\varepsilon(z)$". Pour cela, on choisit[10] un secteur intermédiaire $V' \prec V'' \prec V$ et $\lambda > 0$ tels que, pour tout point $z_0 \in V'$, la boule fermée B_0 centrée en z_0 et de rayon $\lambda|z_0|$ est contenue dans le secteur intermédiaire V'' :

$$\forall z_0 \in V',\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \lambda |z_0|\} \subset V''.$$

Sur V'', $\varepsilon_n(z)$ tend vers 0. D'après les inégalités de Cauchy, on a :

$$|\varepsilon'_n(z_0)| \leq \frac{1}{\lambda|z_0|}\|\varepsilon_n\|_{B_0}$$

pour tout $z_0 \in V'$; ainsi, $|z\varepsilon'_n(z)| \to 0$ et $[(n-1)\varepsilon_n(z) + z\varepsilon'_n(z)] \to 0$ quand $z \to 0$ dans V'. □

Réciproquement, on a le :

Critère 2 *Soit $f \in \mathcal{O}(V)$. Alors f admet un développement asymptotique, $f \in \mathcal{A}(V)$, si et seulement si, sur chaque sous-secteur, la limite $\lim_{z\to 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ existe (et est finie) pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve : Considérons, dans un sous-secteur arbitraire V', la formule de Taylor appliquée à f en z_0 :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^p}{p!} f^{(p)}(z_0) + \frac{(z-z_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tz + (1-t)z_0)\, dt.$$

Quand $z_0 \to 0$ dans V', z étant fixé, il vient :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p + \frac{z^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tz)\, dt$$

10. Si $V' = V(]d'_-, d'_+[, R')$ et $V'' = V(]d''_-, d''_+[, R'')$, alors il suffit de prendre pour λ le plus petit des trois réels : $\frac{R''-R'}{R'}$, $\sin(d''_- - d'_-)$ et $\sin(d'_+ - d''_+)$.

et $|f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| \leq \frac{|z|^n}{n!} \|f^{(n)}\|_{V'}$. □

Finalement, l'ensemble $\mathcal{A}(V)$ des fonctions holomorphes sur V admettant un développement asymptotique à l'origine forme une algèbre[11] stable par dérivation et on a les formules :

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}, \qquad \widehat{f \cdot g} = \hat{f} \cdot \hat{g}, \qquad \widehat{(f')} = (\hat{f})'.$$

La flèche : $\mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$; $f \longmapsto \hat{f}$ est un morphisme d'anneaux. Une fonction $f \in \mathcal{A}(V)$ sera dite *plate* si elle est dans le noyau que l'on notera $\mathcal{A}^0(V)$.

Exemple. La fonction $\exp(-\lambda/z^k)$ est plate sur $V(0, \pi/k, \infty)$ pour tous $\lambda, k > 0$.
À l'aide des fonctions plates, on montre le :

Lemme 2 (Borel–Ritt[12]) *La flèche précédente est surjective : toute série formelle (même divergente) peut être réalisée comme développement asymptotique d'une fonction holomorphe sur un secteur arbitraire*[13] $V = V(d, \theta, R)$.

Preuve : On se ramène par rotation au cas $d = 0$. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$.
Nous allons chercher à réaliser cette série sur $V = V(0, \theta, \infty)$ par une fonction holomorphe du type $\sum_{n\geq 0} a_n e_n(z) z^n$ avec $e_n(z) = 1 - \exp(-\lambda_n/z^k)$, $k = \pi/\theta$ et $\lambda_n > 0$; il est clair que les e_n admettent 1 comme développement asymptotique sur V.
On vérifie que la fonction $z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}$ envoie $i\mathbb{R}$ ainsi que le demi-plan à gauche dans le disque unité : $|\frac{e^{iy}-1}{iy}| = \frac{|e^{iy}-1|}{|y|} \leq 1$ et $\Re(z) < 0 \Rightarrow |1 - e^z| < |z|$.
On en déduit que $|e_n(z)| < \lambda_n/|z|^k$ pour $z \in V$ et que la série $\sum_{n\geq 1} a_n e_n(z) z^n$ est majorée en module par la série $\sum_{n\geq 1} \lambda_n |a_n| \cdot |z|^{n-k}$.
Si l'on choisit les λ_n décroissant suffisamment rapidement vers 0, cette série converge uniformément sur V vers une fonction admettant visiblement le développement asymptotique désiré. □

1.3. Développements asymptotiques de type Gevrey

Définition 2[14] *Soit $f \in \mathcal{O}(V)$. On dit que f admet $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre $k > 0$ si, pour chaque sous-secteur $V' \prec V$, il existe des constantes $C, M > 0$ telles que les restes $\varepsilon_n \in \mathcal{O}(V)$ définis par : $f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p = z^{n-1}\varepsilon_n(z)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, satisfont*[15] : $|\varepsilon_n(z)| \leq CM^n (n!)^{1/k} |z|$ *sur V'.*

11. Exercice laissé au lecteur.
12. C'est une adaptation due à Ritt du lemme de Borel précédemment rappelé.
13. Dans la suite, on aura besoin de travailler avec des secteurs d'ouverture $\theta > 2\pi$ et il est important de voir que tout ce que l'on dit gardera un sens dans ce contexte. Dans ce cas, les éléments de $\mathcal{O}(V)$ sont en général multiformes, c'est-à-dire qu'ils sont définis sur le revêtement universel de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Précisons cela une fois pour toutes. Lorsque $\theta > 2\pi$, par $V = V(]d_-, d_+[, R)$ on comprendra le projeté de la bande $\tilde{V} =]-\infty, \ln R[\times]d_-, d_+[\subset \mathbb{C}$ par l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^*$ et par un élément f de $\mathcal{O}(V)$ on pensera un élément $\tilde{f}$ de $\mathcal{O}(\tilde{V})$ bien qu'en pratique on travaillera et calculera avec les déterminations correspondantes de $f = \tilde{f} \circ \ln$.
14. Due à G.-N. Watson 1911 et F. Nevanlinna 1918.
15. D'après Stirling, $\Gamma(1+x) \sim (\frac{x}{e})^x \sqrt{2\pi x}$, on peut remplacer la majoration $CM^n(n!)^{1/k}|z|$ par une majoration du type $CM^n(\frac{n}{e})^{n/k}|z|$ ou $CM^n(\frac{n}{ke})^{n/k}|z|$ ou encore $CM^n\Gamma(1+\frac{n}{k})|z|$ (les constantes $C, M > 0$ n étant évidemment pas les mêmes).

En particulier, sur tout sous-secteur V', on a $\lim_{z\to 0} \varepsilon_n(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f admet $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ comme développement asymptotique (classique) à l'origine. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des fonctions (admettant un développement asymptotique) Gevrey d'ordre k sur V. Pour $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$, on a[16] :

$$\mathcal{O}(V) \supset \mathcal{A}(V) \supset \mathcal{G}_{k_1}(V) \supset \mathcal{G}_{k_2}(V) \supset \mathcal{G}_\infty(V).$$

L'ensemble $\mathcal{G}_k(V)$ des fonctions holomorphes sur V admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre k à l'origine forme une algèbre stable par dérivation[17]. La flèche : $\mathcal{G}_k(V) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$; $f \longmapsto \hat{f}$ est un morphisme d'anneaux. Une fonction $f \in \mathcal{G}_k(V)$ sera dite *k-plate* si elle est dans le noyau que l'on notera $\mathcal{G}_k^0(V)$.

Exemple. La fonction $\exp(-\lambda/z^k)$ est k-plate sur $V(0, \pi/k, \infty)$ pour tous $\lambda > 0$.
Nous pouvons être un peu plus précis quant aux fonctions k-plates :

Lemme 3 *Soit $f \in \mathcal{O}(V)$. Alors f est k-plate, $f \in \mathcal{G}_k^0(V)$, si et seulement si, sur chaque sous-secteur $V' \prec V$, il existe des constantes $C, M > 0$ telles que : $|f(z)| \leq C\exp(-M/|z|^k)$ sur V'.*

Autrement dit, les fonctions k-plates sur V sont précisément les fonctions *à décroissance exponentielle d'ordre k*.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{O}(V)$ une fonction à décroissance exponentielle d'ordre k. Sur $V' \prec V$, on a : $|\frac{f(z)}{z^n}| \leq Cr^{-n}\exp(-M/r^k)$ où $r = |z|$ et $C, M > 0$.
Le maximum du membre de droite, lorsque r varie, est égal à $(\frac{n}{Mke})^{n/k}$ d'où : $|f(z)| \leq C(M^{-1/k})^n(\frac{n}{ke})^{n/k}|z|^n$ et on conclut par Stirling.
Réciproquement, si $f \in \mathcal{G}_k(V)$ est k-plate, on a d'après Stirling

$$|f(z)| \leq CM^n \left(\frac{n}{ke}\right)^{n/k} |z|^n$$

sur $V' \prec V$ avec $C, M > 0$.
Pour $|z| = r$ fixé, la fonction $\nu \mapsto (Mr)^\nu (\frac{\nu}{ke})^{\nu/k}$ atteint son minimum pour $\nu_0 = \frac{k}{(Mr)^k}$ et vaut, pour $n = \nu_0(1+\varepsilon)$ entier :

$$\exp\left[(1+\varepsilon)(\ln(1+\varepsilon) - 1)\frac{1}{(Mr)^k}\right] = \exp(-M'/r^k),$$

$M' > 0$. □

Critère 3 *Une fonction $f \in \mathcal{O}(V)$ admet $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre k si et seulement si, sur chaque sous-secteur $V' \prec V$, on a :*

1. $\lim_{z\to 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = a_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(i. e.* $f \in \mathcal{A}(V)$ *et* $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$*),*
2. *il existe des constantes $C, M > 0$ telles que :* $\|\frac{f^{(n)}}{n!}\|_{V'} \leq CM^n(n!)^{1/k}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

16. Dans le cas extrême où $k = \infty$, $\mathcal{G}_\infty(V)$ est par définition l'ensemble des fonction de $\mathcal{O}(V)$ se prolongeant holomorphiquement au voisinage de l'origine. Attention, il n'est pas vrai que $\mathcal{G}_\infty(V)$ est l'intersection des $\mathcal{G}_k(V)$ ou encore que $\mathcal{A}(V)$ en est la réunion.
17. Exercice laissé au lecteur ; pour la stabilité par dérivation, la preuve des développements classiques s'adapte immédiatement au cas Gevrey.

Preuve : *L'implication.* Pour chaque sous-secteur $V' \prec V$, on choisit un secteur intermédiaire $V' \prec V'' \prec V$ sur lequel on a les estimations : $|f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| \leq C(M|z|)^n (n!)^{1/k}$ puis $\lambda > 0$ tel que, pour tout point $z_0 \in V'$, la boule fermée B_0 centrée en z_0 et de rayon $\lambda|z_0|$ soit contenue dans V''. Les inégalités de Cauchy nous donnent alors :

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{C(M|z|(1+\lambda))^n (n!)^{1/k}}{(\lambda|z|)^n} = C\left(M\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^n (n!)^{1/k}$$

sur V'.

La réciproque. Pour tout sous-secteur $V' \prec V$, on applique la formule de Taylor en $z_0 \in V'$; en faisant tendre z_0 vers 0, il vient :

$$\left|f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p\right| \leq \frac{|z|^n}{n!} \|f^{(n)}\|_{V'} \leq C(M|z|)^n (n!)^{1/k}.$$

□

En particulier, la série $\hat{f}$ vérifie des estimations du type : $|a_n| \leq CM^n (n!)^{1/k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la flèche $\mathcal{G}_k(V) \to \mathbb{C}[[z]]$; $f \mapsto \hat{f}$ n'est visiblement pas surjective.
Ceci motive la définition suivante.

1.4. Séries Gevrey

Définition 3 *Une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ sera dite Gevrey d'ordre $k > 0$ si ses coefficients satisfont : $|a_n| \leq CM^n (n!)^{1/k}$ pour des constantes $C, M > 0$.*

On note $\mathbb{C}[[z]]_k$ l'algèbre associée et on a, pour $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$:

$$\mathbb{C}[[z]] = \mathbb{C}[[z]]_0 \supset \mathbb{C}[[z]]_{k_1} \supset \mathbb{C}[[z]]_{k_2} \supset \mathbb{C}[[z]]_\infty = \mathbb{C}\{z\}.$$

On hérite d'une flèche : $\mathcal{G}_k(V) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_k$; $f \longmapsto \hat{f}$.

Remarque. Une fonction peut admettre une série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ Gevrey d'ordre k comme développement asymptotique classique sans pour autant que ce développement soit Gevrey d'ordre k. Pour qu'une fonction soit Gevrey, il faut qu'elle soit "très tangente" à son développement asymptotique comme le suggère la proposition suivante.

Proposition 2 *Soient $f \in \mathcal{G}_k(V)$ et $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Sur tout sous-secteur $V' \prec V$, il existe des constantes $L, C, M > 0$ telles que la fonction : $\hat{f}_L : z \longmapsto \sum_{p<L/|z|^k} a_p z^p$, "holomorphe par morceaux" sur V', satisfasse : $|f(z) - \hat{f}_L(z)| \leq C\exp(-M/|z|^k)$ sur V'.*

Preuve : On adapte la deuxième partie de la démonstration du lemme 3 au cas où $f \in \mathcal{G}_k(V)$ n'est pas plate. Sur $V' \prec V$, on a :

$$\left|f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p\right| \leq CM^n \left(\frac{n}{ke}\right)^{n/k} |z|^n$$

avec $C, M > 0$.

Pour $|z| = r$ fixé, la fonction $\nu \mapsto (Mr)^\nu (\frac{\nu}{ke})^{\nu/k}$ atteint son minimum pour $\nu_0 = \frac{k}{(Mr)^k}$ et vaut, pour $n = \nu_0(1+\varepsilon)$ entier :

$$\exp\left[(1+\varepsilon)(\ln(1+\varepsilon) - 1)\frac{1}{(Mr)^k}\right] = \exp(-M'/r^k),$$

$M' > 0$. On choisit $L = k/M^k$. □

Remarque. Lorsque la série Gevrey $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est telle que ses coefficients croissent en module comme $CM^n (n!)^{1/k}$, alors, à $|z|$ fixé, son terme général $a_n z^n$ décroît en module pour $n < L/|z|^k$ puis croît indéfiniment. Dans ce cas, la fonction $\hat{f}_L$ est précisément construite en tronquant $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ au plus petit terme. Cette proposition semble dire que la méthode de "sommation au plus petit terme" est efficace, ce qui donne d'ores et déjà une réponse partielle au problème soulevé par Poincaré (voir l'introduction).

1.5. Quasi-analyticité et séries k-sommables

Nous allons voir que la situation est très différentes sur les *petits secteurs* ($\theta \leq \frac{\pi}{k}$) et sur les *grands secteurs* ($\theta > \frac{\pi}{k}$).

Lemme 4 (Borel-Ritt-Ramis) *Si le secteur V est d'ouverture $\theta \leq \frac{\pi}{k}$, alors la flèche $\mathcal{G}_k(V) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_k$ est surjective.*

Preuve : elle utilise l'isomorphisme Borel–Laplace ; elle est renvoyée au 2.4.
Rappelons que dans cette situation, on a des exemples explicites de fonctions k-plates et la flèche n'est pas injective. La théorie est, dans ce cas, aussi molle que celle des développements asymptotiques classiques.

Lemme 5 (Watson) *Si le secteur V est d'ouverture $\theta > \frac{\pi}{k}$, alors il n'existe pas de fonction holomorphe à décroissance exponentielle d'ordre k autre que la fonction nulle sur V : $\mathcal{G}_k^0(V) = \{0\}$.*

Preuve : Elle utilise l'isomorphisme Borel–Laplace ; elle est reportée au 2.5.

Corollaire 1 *Si le secteur V est d'ouverture $\theta > \frac{\pi}{k}$, alors la flèche $\mathcal{G}_k(V) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_k$ est injective.*

Autrement dit le développement asymptotique détermine la fonction sur les grands secteurs. On parle alors de *quasi-analyticité. A contrario*, il n'y a pas de lemme de Borel et nous vérifierons plus loin[18] que la flèche n'est plus surjective. Ceci nous suggère la définition suivante.

Définition 4 *Une série Gevrey d'ordre k, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]_k$, sera dite* k-sommable *dans la direction d si elle est développement asymptotique Gevrey d'ordre k d'une fonction sur un grand secteur de direction d : $f \in \mathcal{G}_k(V)$, $V = V(d,\theta,R)$, $\theta > \frac{\pi}{k}$ et $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.*

18. Voir 2.6., remarque 2.

Dans ce cas, sa k-somme *dans la direction* d, f, *est bien définie modulo la taille du domaine de définition*[19] *(ici,* $\theta > \frac{\pi}{k}$ *et* $R > 0$*).*
La même série sera dite k-sommable *si elle l'est dans toutes les directions sauf un nombre fini. On note* $\mathbb{C}\{z\}_k$ *l'ensemble des séries* k*-sommables :*

$$\mathbb{C}\{z\}_k = \left\{\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]_k \;\middle|\; \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ est } k\text{-sommable}\right\}.$$

Étudions de plus près ce que peut être la somme d'une série k-sommable.

1.6. k-sommes et k-cocycles

Considérons $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}_k$ une série k-sommable et notons $0 \leq d_0 < d_1 < \cdots < d_{\nu-1} < 2\pi$ les directions dans lesquelles elle n'est pas k-sommable. Ce sont les *directions de Stokes* de la série.
Par définition, il existe dans chaque direction $d_0 < d < d_1$ un grand secteur $V_d = V(d, \theta_d, R_d)$, $\theta_d > \frac{\pi}{k}$, et une fonction $f_d \in \mathcal{G}_k(V_d)$ Gevrey d'ordre k sur V_d admettant notre série comme développement asymptotique : $\widehat{f}_d = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Il n'est pas difficile de voir (principe de quasi-analyticité) que les différentes k-sommes f_d, pour d décrivant l'intervalle $]d_0, d_1[$, coïncident sur l'intersection de leur domaine ; en les recollant, on obtient une fonction définie non plus sur un secteur mais sur un "ouvert sectoriel" :

Définition 5 *On appelle* ouvert sectoriel *pointé en* 0, *de base* $]d^-, d^+[$ *tout ouvert* U *satisfaisant :*

1. *U est contenu dans un secteur de base* $]d^-, d^+[\, : U \subset V(]d^-, d^+[, \infty)$,
2. *U contient des secteurs de base arbitrairement proche de* $]d^-, d^+[$ *:*

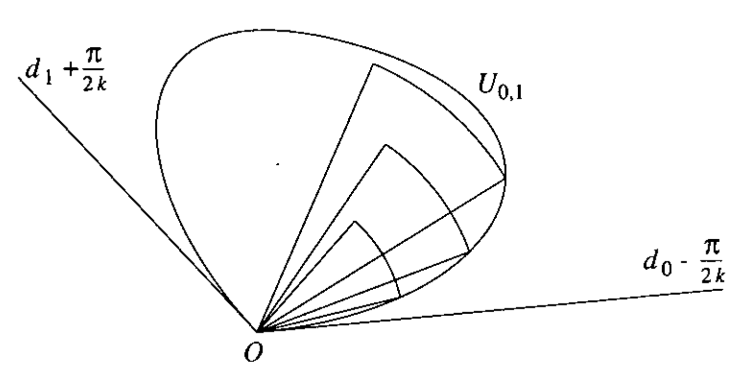
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists R_\varepsilon > 0, \ V(]d^- + \varepsilon, d^+ - \varepsilon[, R_\varepsilon) \subset U.$$

La réunion des différents secteurs de sommation V_d, $U_{0,1} := \bigcup_d V_d$, est un ouvert sectoriel de base[20] $]d_0 - \frac{\pi}{2k}, d_1 + \frac{\pi}{2k}[$. La fonction $f_{0,1}$ construite en recollant les k-sommes respectives f_d admet[21] encore la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre k sur U_0.
Bien sûr, on peut répéter cette construction sur chaque intervalle $]d_i, d_{i+1}[$:

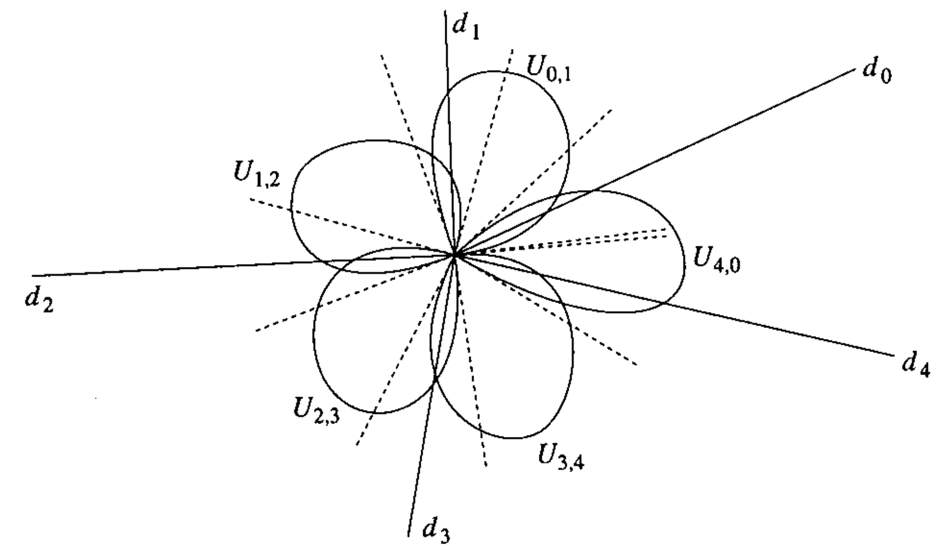
Définition 6 *On appelle* k-somme *d'une série* k*-sommable* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}_k$, *et on note* $(d_i, U_{i,i+1}, f_{i,i+1})_{i=0,\ldots,\nu-1}$ *ou tout simplement* $(d_i, f_{i,i+1})_{i=0,\ldots,\nu-1}$, *la donnée :*

1. *des directions de Stokes* d_i, $0 \leq d_0 < \cdots < d_{\nu-1} < 2\pi$,
2. *et, pour chaque* $i = 0, \ldots, \nu - 1$, *de l'unique fonction*[22] $f_{i,i+1}$, *définie sur un ouvert*

19. Comme c'est le cas pour la somme d'une série convergente.
20. Sa base ne peut excéder cet intervalle puisque la série n'est pas sommable dans les directions d_0 et d_1.
21. Les définitions de développements asymptotiques se généralisent de façon évidente aux ouverts sectoriels : $f_{0,1} \in \mathcal{G}_k(U_{0,1})$ si, pour chaque sous-secteur $V \prec U$, etc.
22. Nous faisons désormais l'abus de langage qui consiste à identifier deux telles fonctions définies sur des ouverts respectifs $U_{i,i+1}$ et $U'_{i,i+1}$ puisque sur l'intersection $U_{i,i+1} \cap U'_{i,i+1}$, qui est visiblement aussi un ouvert sectoriel de base $]d_i - \frac{\pi}{2k}, d_{i+1} + \frac{\pi}{2k}[$, ces deux fonctions coïncideront d'après le principe de quasi-analyticité. C'est exactement le même abus de langage que l'on fait lorsque l'on parle de *la* somme d'une série convergente.



sectoriel de base[23] $]d_i - \frac{\pi}{2k}, d_{i+1} + \frac{\pi}{2k}[$, *admettant* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *comme développement asymptotique Gevrey d'ordre* k *:* $f_{i,i+1} \in \mathcal{G}_k(U_{i,i+1})$ *et* $\widehat{f_{i,i+1}} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.



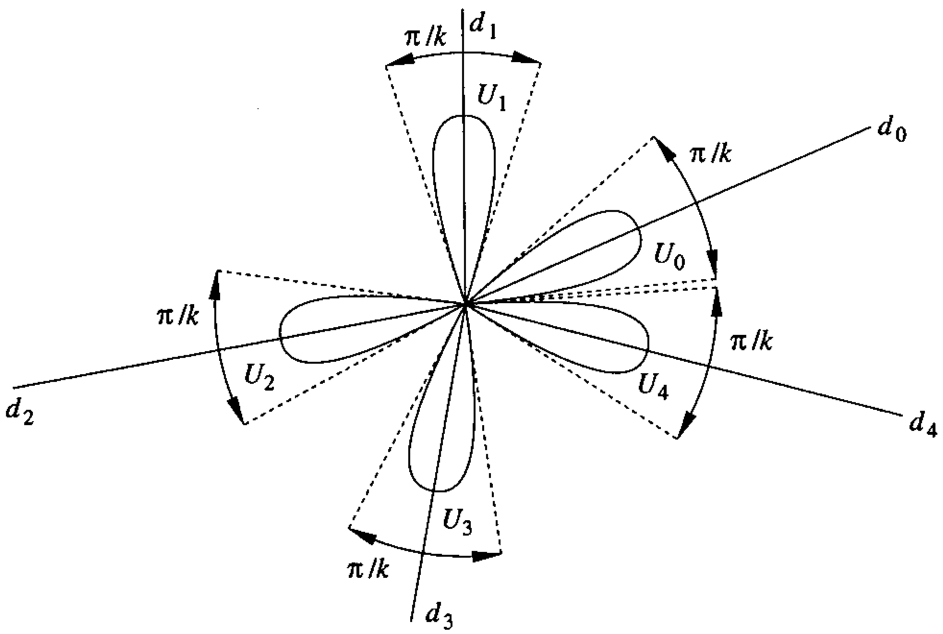
Si une série k-sommable $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}_k$ est k-sommable dans toutes les directions, c'est-à-dire si elle n'a pas de direction de Stokes, alors[24] elle converge et sa k-somme est sa somme au sens usuel. Il apparaît donc que la divergence d'une série k-sommable provient de l'existence de directions de Stokes, c'est-à-dire du défaut de recollement des différentes k-sommes sectorielles $(f_{i,i+1})_{i=0,\ldots,\nu-1}$. Nous allons maintenant creuser cette idée.
Le défaut de recollement de $f_{\nu-1,0}$ avec $f_{0,1}$ au voisinage de la direction d_0, très souvent appelé *phénomène de Stokes*, est décrit par la différence $f_{0,1} - f_{\nu-1,0}$ qui définit une fonction h_0 Gevrey d'ordre k sur l'ouvert sectoriel $U_0 := U_{\nu-1,0} \cap U_{0,1}$ dont le développement asymptotique est nul.

23. Avec la convention $d_\nu = d_0 + 2\pi$.
24. En effet, sa k-somme consiste, dans ce cas, en une fonction f holomorphe sur un voisinage épointé $U^* = U \setminus \{0\}$ de l'origine admettant notre série comme développement asymptotique Gevrey d'ordre k ; en particulier, f est bornée et se prolonge à l'origine d'après Riemann et comme nous l'avons déjà vu, son développement asymptotique $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ coïncide alors avec son développement de Taylor usuel : il converge.

Ainsi, étant donnée une série k-sommable $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}_k$ de k-somme $(d_i, U_{i,i+1}, f_{i,i+1})_{i=0,\dots,\nu-1}$, on lui associe naturellement son "k-cocycle" $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$ où $U_i := U_{i-1,i} \cap U_{i,i+1}$ et $h_i := f_{i,i+1} - f_{i-1,i}$:

Définition 7 *On appelle* k-cocycle, *et on note* $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$ *ou tout simplement* $(d_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$, *la donnée :*

1. *d'un nombre fini de directions* $0 \leq d_0 < \cdots < d_{\nu-1} < 2\pi$,
2. *et, pour chaque* $i = 0, \dots, \nu - 1$, *d'une fonction non identiquement nulle* h_i *à décroissance exponentielle d'ordre* k *sur un ouvert sectoriel*[25] U_i *de direction* d_i *et d'ouverture* $\frac{\pi}{k}$: $h_i \in \mathcal{G}_k^0(U_i)$ *avec* $h_i \not\equiv 0$.



L'ensemble des k-cocycles, habituellement[26] noté $H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1)$, est naturellement doté d'une loi de groupe qui fait de la flèche :

$$\mathbb{C}\{z\}_k \longrightarrow H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1) \; ; \; \sum_{n\geq 0} a_n z^n \longmapsto (d_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$$

un morphisme de groupes additifs. Le plus simple est de reconsidérer un k-cocycle $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$ comme la donnée $(h_d)_{d\in\mathbb{S}^1}$, pour chaque direction $d \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2i\pi\mathbb{Z}$, d'une fonction h_d à décroissance exponentielle d'ordre k sur un ouvert sectoriel de direction d et d'ouverture $\frac{\pi}{k}$, ces fonctions étant toutes identiquement nulles sauf un nombre fini (en l'occurrence $d_0 < \cdots < d_{\nu-1}$). La somme de deux k-cocycles $(h_d)_{d\in\mathbb{S}^1}$ et $(h'_d)_{d\in\mathbb{S}^1}$ est, par définition, le k-cocycle[27] $(h_d + h'_d)_{d\in\mathbb{S}^1}$, l'élément neutre est le k-cocycle trivial $(h_d \equiv 0)_{d\in\mathbb{S}^1}$ et l'opposé de $(h_d)_{d\in\mathbb{S}^1}$, $(-h_d)_{d\in\mathbb{S}^1}$.

Une série va être dans le noyau de la flèche $\mathbb{C}\{z\}_k \to H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1)$ si et seulement si elle n'a pas de direction de Stokes (*i. e.* de direction d pour laquelle $f_d \not\equiv 0$) ce qui signifie,

25. De nouveau, seuls la direction et l'ouverture de l'ouvert, qui sont imposés par la définition, nous importe et on identifiera deux k-cocycles qui ne diffèrent que par la taille de ces ouverts de définition.

26. Il y a derrière cette notation un formalisme moderne assez courant que nous avons souhaité éviter au lecteur.

27. La fonction $h_d + h'_d$ est définie, par exemple, sur l'intersection des ouverts de définition que l'on choisira pour h_d et h'_d.

comme nous l'avons déjà remarqué, que cette série est convergente. Le noyau est donc l'ensemble $\mathbb{C}\{z\}$ des séries convergentes.

Théorème 2 *La flèche* $\mathbb{C}\{z\}_k \longrightarrow H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1)$ *est surjective.*

Ainsi, le groupe quotient $\mathbb{C}\{z\}_k/\mathbb{C}\{z\}$ s'identifie au groupe $H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1)$ qui décrit donc les divergences possibles des séries k-sommables :

$$\mathbb{C}\{z\}_k/\mathbb{C}\{z\} \simeq H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1).$$

Preuve : Le groupe $H^1(\mathcal{G}_k^0, \mathbb{S}^1)$ est engendré par les k-cocycles simples (d, U, h) où d est une direction, U un ouvert sectoriel d'ouverture $\frac{\pi}{k}$ dans cette direction et h une fonction à décroissance exponentielle d'ordre k sur U. Il suffit donc de montrer que tout k-cocycle simple est en fait associé à une série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}_k$.

Plus précisément, étant donnée $h \in \mathcal{G}_k^0(V)$ avec[28] $V = V(d, \frac{\pi}{k}, R)$, nous allons construire, pour chaque $0 < r < R$, une fonction $f \in \mathcal{G}_k^0(\tilde{V})$ avec $\tilde{V} = V(]d - \frac{\pi}{2k}, d + 2\pi + \frac{\pi}{2k}[, r)$ telle que la différence[29] $f(e^{2i\pi}z) - f(z)$ sur $V(d, \frac{\pi}{k}, r)$ coïncide avec h ; alors $(d, \tilde{V}, f)$ sera la k-somme d'une série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}_k$ dont le k-cocycle sera visiblement (d, V, h).

Supposons qu'une telle fonction f existe ; bien sûr, elle n'est définie qu'à addition près d'une fonction holomorphe sur le disque de rayon r ; alors la formule intégrale de Cauchy appliquée au contour du secteur $V(]d, d + 2\pi[, r)$ est bien définie[30] et nous donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_\delta \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

où γ est l'arc de cercle paramétré par $[0, 1] \to \gamma ; t \mapsto re^{id+2i\pi t}$ et δ, le rayon paramétré par $[0, 1] \to \delta ; t \mapsto rte^{id}$.

La première intégrale définit une fonction g holomorphe sur le disque de rayon r ; la seconde, appelée *transformée de Cauchy–Heine* de h dans la direction d et notée $\mathcal{C}_d h$, n'est définie que pour $z \in V(]d, d + 2\pi[, r)$.

La fonction $f := f - g$ est encore solution de notre problème et donnée par :

$$f(z) := \mathcal{C}_d h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{re^{id}} \frac{h(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

sur $V(]d, d + 2\pi[, r)$.

On prolonge f à $\tilde{V} = V(]d - \frac{\pi}{2k}, d + 2\pi + \frac{\pi}{2k}[, r)$ de la façon suivante. Pour toute direction $d' \in]d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}[$, par exemple $d < d' < d + \frac{\pi}{2k}$, la transformée $\mathcal{C}_{d'} h$ définit une fonction sur $V(]d', d' + 2i\pi[, r)$. Sur le secteur commun $V(]d', d + 2i\pi[, r)$, les transformées $\mathcal{C}_{d'} h$ et $\mathcal{C}_d h$ diffèrent d'une fonction qui est en fait holomorphe sur le disque de rayon r :

$$\mathcal{C}_{d'} h(z) - \mathcal{C}_d h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{h(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

28. Nous nous contentons de considérer des cocycles définis sur des secteurs alors qu'il faudrait le faire pour des ouverts sectoriels ; ce cas général ne présente pas de difficulté supplémentaire et est laissé en exercice au lecteur.

29. Par cette notation, on comprendra la différence entre les deux déterminations de f.

30. Exercice : plus généralement, si $f \in \mathcal{A}(V)$ pour un secteur quelconque V et si $V' \prec V$, alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ est bien définie et égale à $f(z)$ pour tout $z \in V'$.

où γ est l'arc de cercle paramétré par $[0,1] \to \gamma\,;\, t \mapsto re^{i(1-t)d+itd'}$.
On prolonge f à $V(]d,d'+2i\pi[,r)$ (et donc, de proche en proche, à $\tilde{V}$) en posant $f = \mathcal{C}_d h = \mathcal{C}_{d'}h - (\mathcal{C}_{d'}h - \mathcal{C}_d h)$.
Vérifions à présent que la fonction f construite[31] sur $\tilde{V} = V(]d - \frac{\pi}{2k}, d + 2\pi + \frac{\pi}{2k}[, r)$ et qui, par construction, satisfait $f(e^{2i\pi}z) - f(z) = h(z)$ sur $V(d, \frac{\pi}{k}, r)$ est bien Gevrey d'ordre k sur $\tilde{V}$. En fait, il suffit[32] de vérifier que $\mathcal{C}_{d'}h \in \mathcal{G}_k(V(]d', d' + 2\pi[, r))$ pour chaque direction $d' \in]d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}[$. On décompose :

$$\frac{h(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{p=0}^{n-1}\left(-\frac{h(\zeta)}{\zeta^{p+1}}\right)z^p + \frac{h(\zeta)/\zeta^n}{z-\zeta}z^n,$$

ce qui donne :

$$\mathcal{C}_{d'}h(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p = z^n \frac{1}{2i\pi}\int_0^{re^{id'}} \frac{h(\zeta)/\zeta^n}{z-\zeta}\,d\zeta$$

avec $a_p := -\frac{1}{2i\pi}\int_0^{re^{id'}} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{p+1}} d\zeta$.
La platitude de h nous garantit l'intégrabilité de $\frac{h(\zeta)/\zeta^n}{z-\zeta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; le second membre est alors bien défini et, sur chaque sous-secteur $V' \prec V(]d', d' + 2\pi[, r)$:

$$\left|\mathcal{C}_{d'}h(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p\right| \le C \left\|\frac{h(z)}{z^n}\right\|_{V'} \cdot |z|^n$$

pour une constante $C > 0$. Maintenant, puisque h est k-plate, elle vérifie sur V' des estimations du type $\|\frac{h(z)}{z^n}\|_{V'} \le CM^n(n!)^{1/k}$. □

Remarque. En fait, nous avons démontré l'énoncé suivant.
Si h est une fonction holomorphe sur un secteur $V = V(]d, d'[, R)$ intégrable en 0, alors toute transformée de Cauchy–Heine de h : $f(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\zeta_0} \frac{h(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta$, $\zeta_0 \in V$, définit une fonction f holomorphe sur $\tilde{V} = V(]d, d' + 2i\pi[, r), r = |\zeta_0|$, satisfaisant $f(e^{2i\pi}z) - f(z) = h(z)$ pour tout $z \in V$; de plus, si $h \in \mathcal{A}^0(V)$ (resp. $h \in \mathcal{G}_k^0(V)$), alors $f \in \mathcal{A}(\tilde{V})$ (resp. $f \in \mathcal{G}_k(\tilde{V})$) et $\hat{f} = \sum_{n\ge0} a_n z^n$ est donné par : $a_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_0^{\zeta_0} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$.

Exemple. Considérons le 1-cocycle $(\mathbb{R}^+, h)$, $h \in \mathcal{G}_1^0(V(\mathbb{R}^+, \pi, \infty))$, défini par :

$$h(z) = -2i\pi \exp(-1/z).$$

Une k-somme correspondante $(\mathbb{R}^+, f)$ est donnée, pour $R > 0$, par :

$$f(z) = -\int_0^R \frac{\exp(-1/\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta,$$

et la série k-sommable $\hat{f} = \sum_{n\ge0} a_n z^n$ associée, par :

$$a_n = \int_0^R \frac{\exp(-1/\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta,$$

31. Nous n'avons pour l'instant utilisé que l'intégrabilité de h à l'origine.
32. Exercice laissé au lecteur.

pour $n \ge 0$.
Pour $R = \infty$, les expressions intégrales de f et a_0 divergent ; par contre, si l'on remplace $f(z)$ par $f(z) - a_0$, il vient pour $R = \infty$:

$$\begin{aligned} f(z) &= -z\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-1/\zeta)}{z-\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}, \\ a_n &= \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-1/\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \quad \text{pour } n > 0, \end{aligned}$$

et $a_0 = 0$. Le changement de variable $t := 1/\zeta$ nous donne :

$$a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}\,dt = \Gamma(n) \quad \text{pour } n > 0,$$

et $\hat{f} = \sum_{n\ge0} n! z^{n+1}$. Ainsi, la série d'Euler est 1-sommable dans toutes les directions sauf $\mathbb{R}^+$. Sa 1-somme est donnée par ($\frac{t}{z} := \frac{1}{\zeta}$) :

$$f(z) = \int_d e^{-t/z}\frac{1}{1-t}\,dt$$

où d est la demi-droite $z\mathbb{R}^+$. En fait, la fonction $t \mapsto e^{-t/z}\frac{1}{1-t}$ est bornée à l'origine et à décroissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini sur le secteur $V(d, \pi, \infty)$, ce qui permet de faire pivoter la demi-droite d'intégration d à z fixé sans changer la valeur $f(z)$ de l'intégrale. Autrement dit, la 1-somme f de la série d'Euler, définie sur le secteur $V(]-\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}[, \infty)$, est donnée sur chaque secteur $V(d, \pi, \infty)$, pour d décrivant les demi-droites issues de l'origine autre que $\mathbb{R}^+$, par la "transformée de Laplace" de la fonction $g(t) = \frac{1}{1-t}$ dans la direction d :

$$f(z) = \mathcal{L}_d g(z) := \int_d e^{-t/z} g(t)\,dt.$$

La 1-somme f de la série d'Euler est aussi solution de l'équation d'Euler :

$$f(z) - z^2 f'(z) = \int_d e^{-t/z}\,dt = z.$$

D'ailleurs, la différence h entre les deux déterminations de f au-dessus du secteur $V(\mathbb{R}^+, \pi, \infty)$ est solution de l'équation sans second membre :

$$h(z) - z^2 h'(z) = 0.$$

Finalement, la solution formelle $\hat{f}$ de l'équation d'Euler nous a permis de récupérer une solution effective f de la même équation, à savoir sa 1-somme.
De la même manière, on montre que la série $\sum_{n\ge1} \Gamma(n/k)(z/\lambda)^n$ est k-sommable dans toutes les directions excepté $\mathbb{R}^+$ et que le cocycle associé est donné par $(\mathbb{R}^+, h)$ avec $h(z) = -2i\pi k \exp(-\lambda^k/z^k)$.

Corollaire 2 *Supposons donnée une collection* $(d_i, U_{i,i+1}, f_{i,i+1})_{i=0,\dots,\nu-1}$:

1. *de directions* $0 \le d_0 < \cdots < d_{\nu-1} < 2\pi$,
2. *et, pour chaque* $i = 0, \dots, \nu - 1$, *d'une fonction* $f_{i,i+1}$ *holomorphe sur un ouvert sectoriel* $U_{i,i+1}$ *de base* $]d_i - \frac{\pi}{2k}, d_{i+1} + \frac{\pi}{2k}[$.

Si le "cocycle" $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$ donné par : $U_i := U_{i-1,i} \cap U_{i,i+1}$ et $h_i := f_{i,i+1} - f_{i-1,i}$ sur U_i pour $i = 0, \dots, \nu-1$ est un k-cocycle, c'est-à-dire si les h_i sont toutes à décroissance exponentielle d'ordre k, et si, de plus, chaque $f_{i,i+1}$ est bornée à l'origine, alors les $f_{i,i+1}$ sont en fait Gevrey d'ordre k et $(d_i, U_{i,i+1}, f_{i,i+1})_{i=0,\dots,\nu-1}$ est la k-somme d'une série k-sommable $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Preuve : Le théorème précédent nous dit que $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\dots,\nu-1}$ est le k-cocycle d'une série k-sommable $\hat{g} = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de k-somme[33] $(d_i, U_{i,i+1}, g_{i,i+1})_{i=0,\dots,\nu-1}$. On définit sur le voisinage épointé de l'origine $U^* = U \setminus \{0\}$ donné par : $U^* := \bigcup_{i=0,\dots,\nu-1} U_{i,i+1}$ une fonction holomorphe h par : $h(z) := f_{i,i+1}(z) - g_{i,i+1}(z)$ pour $z \in U_{i,i+1}$.
Cette fonction est, par hypothèse, bornée à l'origine ; d'après Riemann, elle s'étend holomorphiquement en 0. On en déduit que les fonctions $f_{i,i+1} = g_{i,i+1} + h$ sont toutes Gevrey d'ordre k et ont pour développement asymptotique commun $\hat{f}_{i,i+1} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n := \sum_{n\geq 0} b_n z^n + \hat{h}$. C'est la définition d'une k-somme. □

Exemple. Reprenons l'exemple de l'introduction. On considère, près de $0 \in \mathbb{C}$, une transformation biholomorphe générale du type :

$$\psi(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{n\geq 4} \psi_n z^n$$

et, en particulier, notre modèle :

$$\varphi(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \sum_{n\geq 4} z^n.$$

On cherche à conjuguer φ à ψ par une transformation holomorphe f près de 0, c'est-à-dire à résoudre l'équation de conjugaison :

$$\text{(C)} \qquad f \circ \psi = \varphi \circ f$$

En substituant $f(z) = \frac{z}{1+zF(z)}$, on se ramène à l'équation aux différences :

$$\text{(D)} \qquad F(\psi(z)) - F(z) = \delta(z)$$

où δ est holomorphe, s'annulant à l'ordre 2 à l'origine. On peut montrer, par un calcul formel direct, que l'équation générale (D) admet une unique solution formelle sans terme constant $\hat{F} = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$. Les autres solutions formelles s'en déduisent en ajoutant un terme constant arbitraire. Le but du problème suivant est de montrer que $\hat{F}$ est 1-sommable de directions de Stokes $i\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^-$ en construisant sa 1-somme. En fait, on construit deux solutions sectorielles de l'équation (C), puis on montre qu'elles satisfont les hypothèses du corollaire précédent. C'est, à notre connaissance, le moyen le plus direct de montrer la 1-sommabilité des solutions formelles de (D) et de (C) sans passer par Borel–Laplace.

33. Quitte à diminuer la taille des $U_{i,i+1}$, on peut supposer que ce sont les mêmes pour les $f_{i,i+1}$ et les $g_{i,i+1}$.

1.7. Problème

Soit $\psi(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{n\geq 4} \psi_n z^n$ holomorphe au voisinage de l'origine.

1. Remarquer que $\psi(z) = \frac{z}{1-z-z^3\Delta(z)}$ où Δ est holomorphe au voisinage de l'origine. En travaillant préalablement avec la variable $w := -1/z$, construire un ouvert sectoriel U^+ de base $]0, 2\pi[$ stable pour ψ : $\psi(U^+) \subset U^+$.
2. Montrer qu'il existe, pour tout compact $K \subset U^+$, une constante $C > 0$ telle que : $\|\psi^{\circ n}\|_K \leq \frac{C}{n}$. On considère l'équation aux différences :

$$\text{(D)} \qquad F(\psi(z)) - F(z) = \delta(z).$$

où δ est une fonction, holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, s'annulant à l'ordre 2 ou plus à l'origine : $\delta(0) = \delta'(0) = 0$. En déduire que la série $-\sum_{n\geq 0} \delta(\psi^{\circ n}(z))$ converge sur U^+ vers une solution holomorphe F^+ de l'équation (D) : $F^+ \in \mathcal{O}(U^+)$ et $F^+(\psi(z)) - F^+(z) = \delta(z)$.
3. Montrer qu'il existe, pour tout sous-secteur $V \prec U^+$, une constante $C > 0$ telle que : $|\psi^{\circ n}(z)| \leq C\frac{|z|}{1+n|z|}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in V$. En déduire que, sur V, on a $|F^+(z)| \leq C|z|$ pour une constante $C > 0$.
4. Montrer, plus généralement, que si δ s'annule à l'ordre $n+1$ à l'origine, $n > 0$, alors F^+ s'annule à l'ordre n sur tout sous-secteur de U^+. Montrer qu'il existe une unique solution formelle $\hat{F} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ de l'équation (D) sans terme constant ($a_0 = 0$). Montrer que $F^+(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p$ est solution d'une équation de type (D) avec un second membre s'annulant à l'ordre $n+1$ à l'origine. En déduire que F^+ admet $\hat{F}$ comme développement asymptotique à l'origine.
5. On considère maintenant l'équation de conjugaison :

$$\text{(C)} \qquad f \circ \psi = \varphi \circ f$$

où $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$. Montrer, en substituant $f(z) = \frac{z}{1+zF(z)}$, qu'il existe, sur U^+, une solution holomorphe f^+ à (C) satisfaisant $f^+ = z + o(|z|)$ sur tout sous-secteur $V \prec U^+$. Remarquer que l'on a, en fait, obtenu f^+ par convergence sur U^+ de $\varphi^{\circ(-n)} \circ \psi^{\circ n}$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire que f^+ est injective sur U^+ et que $f^+(U^+)$ est aussi un ouvert sectoriel de base $]0, 2\pi[$ stable par φ.
6. On s'intéresse aux *intégrales premières* de ψ, c'est-à-dire aux solutions de l'équation d'invariance :

$$\text{(I)} \qquad H(\psi(z)) - H(z) = 0$$

qui n'est autre que l'équation (D) avec $\delta \equiv 0$ (la solution construite dans la question 2. est alors identiquement nulle). Montrer que la fonction H^+ définie sur U^+ par $H^+ := \exp(-2i\pi/f^+(z))$ est une *intégrale première forte* de ψ : deux points $z, z' \in U^+$ sont échangés par ψ ($\exists n \in \mathbb{Z}$, $\psi^{\circ n}(z) = z'$) si et seulement si $H^+(z) = H^+(z')$. En déduire deux intégrales premières fortes H_i et H_{-i} de ψ à décroissance exponentielle d'ordre 1 sur des ouverts sectoriels U_i et U_{-i} d'ouverture π et de direction respective $i\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^-$. Montrer que les solutions de (I) sur l'ouvert sectoriel U_i (resp. U_{-i}), s'annulant à l'origine sur tout sous-secteur, sont précisément les fonctions de la forme $h_i = g \circ H_i$ (resp. $h_{-i} = g \circ H_{-i}$) avec g holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, $g(0) = 0$, et sont toutes à décroissance exponentielle d'ordre 1.

7. Montrer qu'il existe un ouvert sectoriel U^- de base $]\pi, 3\pi[$ et une fonction holomorphe F^-, holomorphe sur U^-, satisfaisant (D) et, sur tout sous-secteur $V \prec U^-$, $|F^-(z)| \leq C|z|$ pour une constante $C > 0$. Montrer, en utilisant le corollaire précédent, que le couple (F^+, F^-) est la 1-somme d'une solution formelle qui n'est autre que $\hat{F}$. En particulier, on retrouve ici, indépendamment de la question 4., le fait que F^+ admet un développement asymptotique.
8. Le 1-cocycle (h_i, h_{-i}) associé à (F^+, F^-), où $h_{\pm i} = \pm(F^+ - F^-) = g_{\pm i} \circ H_{\pm i}$ sur $U_{\pm i}$, est déterminé par la paire $(g_i, g_{-i}) \in (\mathbb{C}\{z\})^2$. Réciproquement, montrer que pour tout couple (g_i, g_{-i}) de séries convergentes sans terme constant, il existe une fonction δ holomorphe au voisinage de l'origine, s'annulant à l'ordre 2 ou plus, telle que les solutions formelles de l'équation (D) correspondante soient 1-sommables de 1-cocycle (h_i, h_{-i}) avec $h_{\pm i} = g_{\pm i} \circ H_{\pm i}$.
9. Montrer que toute solution formelle de (C) est 1-sommable de directions de Stokes $i\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^-$ et qu'elles se déduisent l'une de l'autre en composant à gauche par une itérée complexe $\varphi_t(z) := \frac{z}{1-tz}$, $t \in \mathbb{C}$, de φ.

1.8. Solution du problème

1. La transformation $\tilde{\psi}(w) := -1/\psi(-1/w)$ est définie au voisinage de l'infini dans $\mathbb{C}$, à savoir sur le complémentaire $\tilde{U}$ d'un disque fermé de rayon $R_0 > 0$. Elle s'écrit alors $\tilde{\psi}(w) = w + 1 + \frac{1}{w^2}\Delta(-1/w)$, où $\Delta(-1/w)$ est holomorphe et uniformément bornée en module par une constante $C > 0$ sur $\tilde{U}$. En dehors d'un disque de rayon $R > R_0$, on a $|\frac{1}{w^2}\Delta(-1/w)| \leq \frac{C}{R^2}$ et l'orbite positive d'un point w, lorsqu'elle est bien définie, est contenue dans le secteur pointé en w, de direction horizontale et d'ouverture 2α avec $\sin\alpha = \frac{C}{R^2}$:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \tilde{\psi}^{\circ n}(w_0) \in \{w \mid |\arg(w - w_0)| \leq \arcsin(C/R^2)\}.$$
Pour $R > R_0$, l'ouvert U_R^+, défini dans la variable w par :
$$U_R^+ = \{w \mid \arg(w - R^3/C) < \pi - \arcsin(C/R^2)\},$$
est stable par ψ et sectoriel de direction $\mathbb{R}^-$ et d'ouverture $\pi - \arcsin(C/R^2)$ dans la variable z. On peut prendre pour U^+ la réunion des U_R^+ pour $R > R_0$.
2. On a $\|\psi^{\circ n}\|_{U_R^+} \leq R + nC/R^2 \leq \frac{C_R}{n}$ pour une constante $C_R > 0$; puisque K est compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts U_R^+ et on prend pour C le maximum des C_R. La somme $-\sum_{n\geq 0}\delta(\psi^{\circ n}(w))$ converge donc uniformément sur tout compact. Elle holomorphe d'après Weierstrass. On vérifie qu'elle est solution de (D).
3. Dans la variable w, le secteur s'écrit $V = \{w \mid |w| > R, |\arg(w)| < \pi - \theta\}$. Il suffit de montrer l'estimation pour $R \gg 0$ de sorte que $|\frac{1}{w^2}\Delta(-1/w)| \leq \varepsilon$ avec ε petit, notamment $\sin\varepsilon < \theta$. À $|w|$ fixé, on minimise $|\frac{\tilde{\psi}^{\circ n}(w)}{(|w|+n)}|$ lorsque $|\arg(w)|$ est maximal et on obtient :
$$\left|\frac{\tilde{\psi}^{\circ n}(w)}{(|w|+n)}\right| \geq \left|\sqrt{1 - 2(1+\cos\theta)\frac{n|w|}{(|w|+n)^2}} - \varepsilon\frac{n}{|w|+n}\right| \geq \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} - \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir R de sorte que $\varepsilon < \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$. Maintenant, on a :
$$|F^+(z)| \leq \sum_{n\geq 0}\frac{C}{(|1/z|+n)^2} \sim C\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(|1/z|+t)^2} = C|z|,$$
pour $z \in V$.

4. De même, si $|\delta(z)| \leq \frac{C}{|z|^{n+1}}$ sur $V \prec U^+$, on a :
$$|F^+(z)| \leq C\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(|1/z|+t)^{n+1}} = \frac{C}{n}|z|^n,$$
pour $z \in V$. Par ailleurs, si $\delta(z) = \delta_{n+1}z^{n+1} + \sum_{p>n+1}\delta_p z^p$, alors $\tilde{F}(z) := F(z) - \frac{\delta_{n+1}}{n}z^n$ est solution de $\tilde{F}(\psi(z)) - \tilde{F}(z) = \tilde{\delta}(z)$ où $\tilde{\delta}$ est holomorphe et s'annule à l'ordre $n+2$ à l'origine. De proche en proche, on construit ainsi une unique solution formelle $\hat{F} = \sum_{n\geq 1}a_n z^n$. Par construction, $\tilde{F}^+(z) := F^+(z) - \sum_{p=1}^{n-1}a_p z^p$ est solution de $\tilde{F}^+(\psi(z)) - \tilde{F}^+(z) = \tilde{\delta}(z)$ où $\tilde{\delta}$ est holomorphe et s'annule à l'ordre $n+1$ à l'origine d'où :
$$|\tilde{F}^+(z)| = \left|F^+(z) - \sum_{p=1}^{n-1}a_p z^p\right| \leq C|z|^n$$
sur tout sous-secteur $V \prec U^+$, ce qui montre que $\hat{F}$ est le développement asymptotique de F^+.
5. Vérifications immédiates.
6. Le fait que H^+ soit une intégrale première forte résulte directement du fait que $w = -1/f^+(z)$ conjugue ψ à la translation $w \mapsto w+1$ et que $\exp(2i\pi w)$ est une intégrale première forte sur $-1/f^+(U^+)$. Maintenant,
$$H^+(z) = \exp(-\frac{2i\pi}{z} - 2i\pi z F^+(z))$$
et on vérifie immédiatement, compte tenu des estimations de la question 3., que $1/H^+$ (resp. H^+) est à décroissance exponentielle d'ordre 1 sur la partie imaginaire supérieure U_i (resp. inférieure U_{-i}) de l'ouvert $U^+ \cap U^-$. Toute intégrale première h_i de ψ sur U_i se factorise dans l'intégrale première forte H_i, $h_i = g \circ H_i$, et g est holomorphe sur $H_i(U_i)$ qui est visiblement un voisinage épointé de l'origine ; puisque h_i s'annule à l'origine, g aussi et g se prolonge holomorphiquement en $0 \in \mathbb{C}$. On en déduit que $|g(z)| \leq C|z|^k$ pour une constante $C > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et donc que h_i est aussi à décroissance exponentielle d'ordre 1.
7. La transformation ψ est inversible et $-\psi^{\circ(-1)}(-z) = z + z^2 + z^3 + \cdots$; en appliquant la question 1. à $-\psi^{\circ(-1)}(-z)$, on trouve U^- et F^- est donnée par la somme $\sum_{n\geq 0}\delta(\psi^{\circ -(n)}(z))$. Sur chacun des ouverts U_i et U_{-i}, la différence $F^+ - F^-$ est une intégrale première s'annulant à l'origine : elle est, d'après la question 6., à décroissance exponentielle d'ordre 1. Les fonctions $F^\pm$ sont bornées, toujours d'après la question 3. Le corollaire s'applique.
8. Étant donnés $g_{\pm i} \in \mathbb{C}\{z\}$, $g_{\pm i}(0) = 0$, les fonctions $h_{\pm i} = g_{\pm i} \circ H_{\pm i}$, définies sur les ouverts sectoriels $U_{\pm i}$, sont à décroissance exponentielle d'ordre 1 et invariantes par ψ. D'après le théorème, il existe des fonctions $F^\pm$, Gevrey d'ordre 1 sur les

ouverts $U^{\pm}$, de cocycle $h_{\pm i}$. Maintenant, les fonctions $\delta^{\pm}$ définies par $\delta^{\pm}(z) := F^{\pm}(\psi(z)) - F^{\pm}(z)$ se recollent en une fonction holomorphe δ au voisinage de l'origine puisque, d'une part, elles sont bornées et, d'autre part, leur différence satisfait $\delta^{+}(z) - \delta^{-}(z) = h_{\pm i}(\psi(z)) - h_{\pm i}(z) = 0$.

9. Les solutions sectorielles $f^{\pm}$ construites à l'aide de la 1-somme $F^{\pm}$ dans la question 5. sont visiblement bornées et satisfont :

$$|f^{+}(z) - f^{-}(z)| = -\frac{z^2(F^{+}(z) - F^{-}(z))}{(1 + zF^{+}(z))(1 + zF^{-}(z))}.$$

Puisque $F^{+} - F^{-}$ est 1-plate sur les ouverts $U_{\pm i}$, il en va de même de la différence $f^{+} - f^{-}$. Le couple (f^{+}, f^{-}) est donc la 1-somme d'une solution formelle 1-sommable $\hat{f}$ de (C). En remarquant que φ_t commute à φ pour la composition, on déduit que la série $\hat{f}_t := \hat{\varphi}_t \circ \hat{f} = z + tz^2 + \cdots$ est aussi solution de (C) et 1-sommable de 1-somme $f_t^{\pm} := \varphi_t \circ f^{\pm}$. Maintenant, si une série formelle $\hat{g}$ est solution de (C), on vérifie aisément qu'elle commence nécessairement par $\hat{g} = z + tz^2 + \cdots$ pour un $t \in \mathbb{C}$. La série $\hat{h} := \hat{g} \circ \hat{f}_t^{\circ(-1)}$ commute alors à φ et est ou bien l'identité, ou bien de la forme $\hat{h} = z + cz^k + \cdots$ avec $k > 2$ et $c \neq 0$. On vérifie encore que, dans le second cas, $\hat{h}$ ne peut commuter à φ. Ainsi, $\hat{g} \circ \hat{f}_t$ et toute solution formelle de (C) est de la forme $\hat{f}_t$.

Chapitre 2
La transformée de Borel et la multisommabilité

2.1. Introduction

L'idée d'Émile BOREL peut se raconter de la manière suivante.

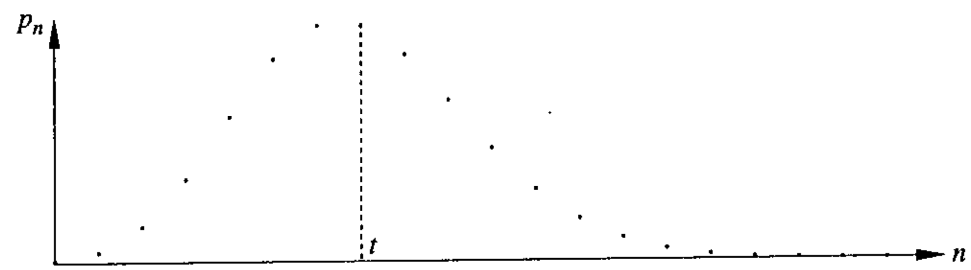
Étant donnée une suite de poids $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $p_n \in \mathbb{R}^+$ pour $n \in \mathbb{N}$, on associe à toute suite de scalaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moyennes pondérées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$v_n := \frac{p_0u_0 + \cdots + p_{n-1}u_{n-1}}{p_0 + \cdots + p_{n-1}}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Par exemple, si $p_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la moyenne de Cesàro de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La seconde converge plus facilement que la première, et, lorsqu'elles convergent toutes les deux, les limites coïncident.

Maintenant, si l'on pose $p_n := \frac{t^n}{n!}$, $t > 0$, le poids total est fini, $\sum_{n\geq 0} p_n = e^t$, et la répartition ressemble à celle d'une fonction cloche donnant plus d'importance aux coefficients dont l'indice n est proche de t.



Le gain de convergence est ici autrement plus spectaculaire que celui fourni par la moyenne de Cesàro mais la limite obtenue ne rendra essentiellement compte, elle aussi, que des coefficients u_n pour lesquels $n \sim t$. L'idée de Borel consiste à retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en faisant tendre t vers l'infini ; la *limite généralisée de Borel*, pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} u_n.$$

Bien sûr, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro, alors elle converge aussi au sens de Borel et les limites coïncident[34].

34. Exercice laissé au lecteur.

Pour une série convergente $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$, le procédé précédent définit la somme de $\hat{f}$ comme limite, lorsque t tend vers l'infini, des :

$$S_t(z) := e^{-t}\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{p=0}^{n} a_p z^p.$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial t}S_t(z) = e^{-t}\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}a_{n+1}z^{n+1}$, il vient :

$$S_t(z) = a_0 + \int_0^t e^{-\tau}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{a_{n+1}\tau^n z^n}{n!}\Big)\,d\tau$$

et on obtient, après le changement de variable $\zeta := \tau z$, la *somme généralisée de Borel* de $\hat{f}$:

$$\mathcal{S}(\hat{f})(z) := a_0 + \int_d e^{-\zeta/z}\Big(\sum_{n\geq 0} a_{n+1}\frac{\zeta^n}{n!}\Big)\,d\zeta$$

où l'on intègre suivant la demi-droite d issue de 0 dans la direction de z.

2.2. La transformée de Borel formelle

Le procédé de sommation $\hat{f} \mapsto \mathcal{S}(\hat{f})$ que nous venons de décrire se décompose en une transformation formelle :

$$\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1} \longmapsto \hat{\mathcal{B}}(\hat{f}) := \sum_{n\geq 0} a_n\frac{\zeta^n}{n!}$$

appelée *transformée de Borel formelle* de $\hat{f}$, qui, dans la suite, aura pour but de faire converger brutalement la série $\hat{f}$ de départ, suivie de la *transformée de Laplace dans la direction* d : $g \longmapsto \int_d e^{-\zeta/z}g(\zeta)\,d\zeta$.
La proposition suivante va justifier les calculs de l'introduction.

Proposition 3 *Soit* $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1} \in \mathbb{C}[[z]]$ *une série formelle sans terme constant. Alors* $\hat{f}$ *converge si et seulement si sa transformée de Borel formelle* $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f}) = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}\zeta^n$ *est une fonction entière satisfaisant, pour des constantes* $C, M > 0$: $|\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})(\zeta)| \leq C\exp(M|\zeta|)$ *pour tout* $\zeta \in \mathbb{C}$ *c'est-à-dire* $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$ *est entière à croissance au plus exponentielle d'ordre* 1 *à l'infini. Plus précisément, la série* $\hat{f}$ *converge sur un disque de rayon* $R > 0$ *si et seulement si la constante* $M > 0$ *peut être choisie arbitrairement dans l'intervalle* $]\frac{1}{R}, +\infty[$.

Ainsi, le procédé de sommation de Borel est bien défini pour les séries convergentes puisque, dans chaque direction d, l'intégrale de Laplace va converger au moins pour les valeurs petites de z dans cette même direction. Elle coïncide, par construction, avec la somme usuelle.

Preuve : *L'implication.* Fixons $M > 1/R$. D'après les inégalités de Cauchy appliquées à $\hat{f}$, il existe une constante $C > 0$ telle que : $|a_n| \leq CM^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, quitte à modifier C et pour $r > 0$ arbitraire, on a, d'après Stirling : $\frac{|a_n|}{n!}r^n \leq C(\frac{Mre}{n})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le maximum de la flèche $t \mapsto (\frac{Mre}{t})^t$ est atteint pour $t = Mr$ et vaut $\exp(Mr)$: $\frac{|a_n|}{n!}r^n \leq C\exp(Mr)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a :

$$|\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})(\zeta)| \leq \sum_{n\geq 0}\frac{|a_n|}{n!}|\zeta|^n \leq C\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\Big)\exp(M(1+\varepsilon)|\zeta|)$$

c'est-à-dire :

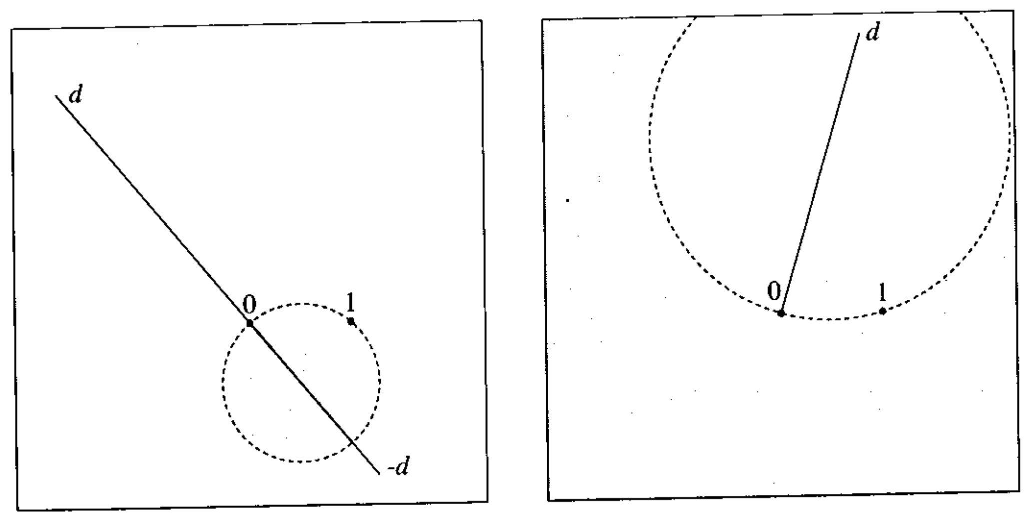
$$|\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})(\zeta)| \leq C\Big(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\Big)\exp(M(1+\varepsilon)|\zeta|).$$

La réciproque. D'après les inégalités de Cauchy appliquées à $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$, on a, pour $r > 0$ arbitraire : $\frac{|a_n|}{n!} \leq C\frac{\exp(Mr)}{r^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La flèche $r \mapsto \frac{\exp(Mr)}{r^n}$ atteint son maximum pour $r = \frac{n}{M}$ et vaut $(\frac{Me}{n})^n$ d'où : $\frac{|a_n|}{n!} \leq CM^n(\frac{n}{e})^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après Stirling, quitte à modifier la constante $C > 0$, il vient : $|a_n| \leq CM^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\hat{f}$ converge sur le disque de rayon $1/M$. $\square$

Exemple 1. Si $\hat{f} = \frac{z}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^{n+1}$, alors $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n\geq 0}\frac{\zeta^n}{n!} = \exp(\zeta)$. La tranformée de Laplace dans la direction d de $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$, $\mathcal{L}_d(e^\zeta)(z) = \int_d \exp(-\zeta/(\frac{z}{1-z}))\,d\zeta$, converge et définit une fonction holomorphe de z sur l'ouvert défini par :

$$\Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \arg\Big(\frac{z}{1-z}\Big) \in \Big]d - \frac{\pi}{2}, d + \frac{\pi}{2}\Big[\Big\}.$$

Lorsque d est contenue dans le demi-plan à gauche, là où $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$ décroît, $\mathcal{S}_d(\hat{f}) = \mathcal{L}_d\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$ nous donne la somme de $\hat{f}$ sur le complémentaire, dans $\mathbb{C}$, du disque fermé passant par 0 et 1 et de diamètre $-d$. Lorsque d est vertical, $\mathcal{S}_d(\hat{f})$ est définie sur le demi-plan imaginaire contenant d. Enfin, lorsque d est à droite, $\mathcal{S}_d(\hat{f})$ ne nous donne la somme de $\hat{f}$ que sur le disque passant par 0 et 1 et de diamètre d.



Pour les séries convergentes, le procédé de sommation apparaît déjà comme un outil très puissant pour le prolongement analytique puisque notre série $\hat{f}$ qui ne convergeait que sur le disque de centre 0 et de rayon 1 est à présent sommée sur son domaine maximal $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Exemple 2. Rappelons que la série d'Euler $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} n!z^{n+1}$ est 1-sommable de direction de Stokes $\mathbb{R}^+$. Nous avons vu que sa somme pouvait s'écrire : $f(z) = \int_d e^{-\zeta/z}\frac{1}{1-\zeta}\,d\zeta$.

Nous reconnaissons le procédé de resommation de Borel puisque la fonction $g(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n\geq 0} \zeta^n$ n'est autre que la transformée de Borel formelle de $\hat{f}$.

Par définition, une série formelle $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$ va être Gevrey d'ordre 1 si et seulement si sa transformée de Borel est convergente :

$$\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_1 \iff \hat{\mathcal{B}}(\hat{f}) \in \mathbb{C}\{\zeta\}.$$

On ne pourra donc pas de sommer n'importe quelle série Gevrey d'ordre 1 avec le procédé de Borel. Nous allons étudier le cas des séries 1-sommables et, pour cela, commencer par redéfinir la transformée de Borel pour une fonction définie sur un "grand secteur".

2.3. La transformée de Borel

Nous commençons par la définir sur un exemple. Remarquons tout d'abord que $\frac{\zeta^n}{n!}$ est le résidu en 0 de la forme $\frac{e^{\zeta z}}{z^{n+1}}\,dz$: $\frac{\zeta^n}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|z|=r\}} \frac{e^{\zeta z}}{z^{n+1}}\,dz$ où $r > 0$. En passant à l'infini par le changement de coordonnée $z := \frac{1}{z}$, il vient : $\frac{\zeta^n}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|z|=r\}} e^{\zeta/z} z^{n+1} \frac{dz}{z^2}$ où $r > 0$. Maintenant, si f est une fonction holomorphe définie au delà d'un disque de rayon $r > 0$, en posant :

$$\mathcal{B}f(\zeta) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|z|=r\}} e^{\zeta/z} f(z)\,\frac{dz}{z^2},$$

on récupère bien une fonction entière de ζ dont le développement de Taylor à l'origine est précisément[35] $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$. C'est la *transformée de Borel* de f.

Remarque. À ζ fixé, la fonction $z \mapsto e^{\zeta/z}\frac{f(z)}{z^2}$ est holomorphe disons sur un disque épointé de rayon $> r > 0$, avec une singularité essentielle à l'origine, et est plate sur le secteur $V(-d, \pi, r)$, où d est la direction donnée par ζ. On ne change donc pas la valeur de l'intégrale si, au lieu d'intégrer le long du cercle $\{|z| = r\}$, on intègre le long du contour d'un des secteurs $V(d, \pi + \vartheta, r)$, $0 < \vartheta \leq \pi$. Ceci nous conduit à la définition sectorielle de la transformée de Borel.

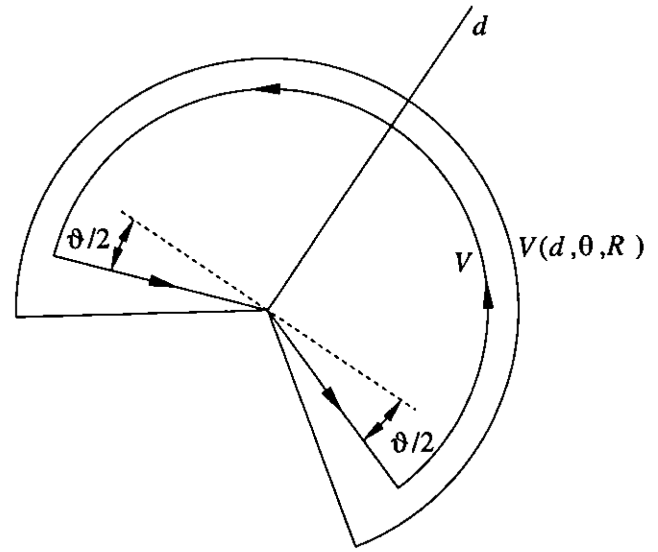
Définition 8 *Soit f une fonction holomorphe sur un secteur $V(d, \theta, R)$ d'ouverture $\theta > \pi$ et bornée à l'origine sur tout sous-secteur. On appelle* transformée de Borel de f *dans la* direction d *et on note $\mathcal{B}_d f$ la fonction complexe de ζ définie sur la demi-droite de direction d par :*

$$\mathcal{B}_d f(\zeta) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} e^{\zeta/z} f(z)\,\frac{dz}{z^2}$$

où l'intégration se fait le long du contour (orienté) ∂V d'un sous-secteur $V = V(d, \pi+\vartheta, r) \prec V(d, \theta, R)$ de même direction et d'ouverture encore $> \pi$ ($0 < \vartheta < \theta - \pi$ et $0 < r < R$).

Proposition 4 *1. Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert sectoriel U de base $]d^- - \frac{\pi}{2}, d^+ + \frac{\pi}{2}[$, $d^- < d^+$, bornée à l'origine sur tout sous-secteur, alors ses transformées de Borel $\mathcal{B}_d f$ dans les différentes directions $d \in\,]d^-, d^+[$ définissent une fonction holomorphe sur le secteur infini $V = V(]d^-, d^+[, \infty)$, appelée transformée de Borel de f et notée $\mathcal{B}f$: $\mathcal{B}f \in \mathcal{O}(V)$ où $\mathcal{B}f(\zeta) := \mathcal{B}_d f(\zeta)$ avec $d = \arg(\zeta)$.*

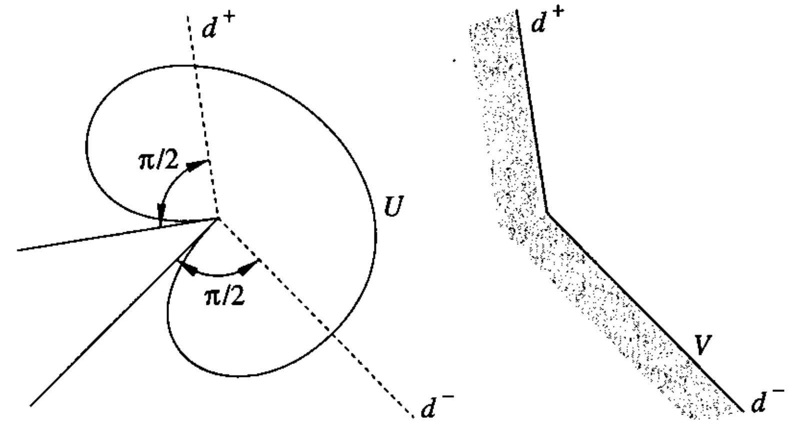
35. Exercice.



2. Sur tout sous-secteur infini $V' \prec V$ ($V' = V(d, \theta, \infty)$ avec $d^- < d - \theta < d + \theta < d^+$), la transformée de Borel $\mathcal{B}f$ est au plus à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini, i. e. *il existe des constantes $C, M > 0$ telles que : $|\mathcal{B}f(\zeta)| \leq C\exp(M|\zeta|)$ pour tout $\zeta \in V'$ suffisamment grand.*

3. Si f s'annule à l'ordre $n+1$ à l'origine sur tout sous-secteur de U, $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{B}f$ s'annule à l'ordre n à l'origine sur tout sous-secteur de V. Ainsi, si f admet $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$ comme développement asymptotique à l'origine sur U, alors $\mathcal{B}f$ admet $\hat{\mathcal{B}}\hat{f} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}\zeta^n$ comme développement asymptotique à l'origine sur V.

4. Si f est Gevrey d'ordre k à l'origine sur U, $0 < k < 1$, alors $\mathcal{B}f$ est Gevrey d'ordre $\frac{k}{1-k}$ à l'origine sur V. En particulier, si f est Gevrey d'ordre 1 alors $\mathcal{B}f$ se prolonge analytiquement sur un voisinage de l'origine.



Preuve :

1. Est laissé en exercice. Pour montrer les estimations de 2., 3. et 4., il suffit de se donner, pour chaque $d \in\,]d^-, d^+[$, un secteur $V := V(d, \pi + \vartheta, R) \prec U$, $\vartheta > 0$, sur lequel f vérifie par hypothèse certaines estimations, et d'en déduire les estimations escomptées pour $\mathcal{B}f$ sur $V(d, \frac{\vartheta}{2}, \infty)$. En effet, tout sous-secteur de $V(]d^-, d^+[, \infty)$

sera recouvert par un nombre fini de secteurs du type $V(d, \frac{\vartheta}{2}, \infty)$. Remarquons que, pour $\zeta \in V(d, \frac{\vartheta}{2}, \infty)$, $\mathcal{B}f(\zeta)$ est défini par : $\mathcal{B}f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}$. On découpera systématiquement l'intégrale de Borel en : $\int_{\partial V} = \int_0^{Re^{i\theta^-}} + \int_{Re^{i\theta^-}}^{Re^{i\theta^+}} + \int_{Re^{i\theta^+}}^0$, où $\theta^\pm := d \pm \frac{\pi+\vartheta}{2}$, étant sous-entendu que l'intégrale du milieu se fait le long de l'arc $\{|z| = R\}$ et les deux autres le long des segments $\{\arg(z) = \theta^\pm\}$.

2. Supposons f bornée par une constante $C > 0$ le long de ∂V. Il vient :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{Re^{i\theta^-}}^{Re^{i\theta^+}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le \frac{C}{2\pi R}\int_{\theta^-}^{\theta^+} |\exp(\zeta/Re^{i\theta})|\,d\theta \le \frac{C}{R}\exp(|\zeta|/R)$$

pour l'intégrale circulaire[36] et, par exemple, pour la première intégrale radiale :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{Re^{i\theta^-}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le \frac{C}{2\pi}\int_0^R |\exp(\zeta/re^{i\theta^-})|\frac{dr}{r^2}$$

et, pour $\zeta \in V(d, \frac{\vartheta}{2}, \infty)$, on a $\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{4} < \arg(\zeta/re^{i\theta^-}) < \frac{\pi}{2} + 3\frac{\vartheta}{4}$, d'où, en posant $\varepsilon := -\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{4}) = \sin(\frac{\vartheta}{4}) > 0$,

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{Re^{i\theta^-}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le \frac{C}{2\pi}\int_0^R \exp(-\varepsilon|\zeta|/r)\frac{dr}{r^2} \le \frac{C}{2\pi\varepsilon|\zeta|}.$$

Les intégrales radiales sont bornées lorsque $\zeta \to \infty$ mais nous montrent que $\mathcal{B}f$ n'est, en général, pas bornée à l'origine.

3. Supposons maintenant que f s'annule à l'ordre $n+1$ à l'origine, $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C, M > 0$ telles que : $|f(z)| \le C|z|^{n+1}$ pour tout $z \in V$. La transformée de Borel étant linéaire, on se contentera des calculs avec $C = M = 1$. Il vient d'une part :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{Re^{i\theta^-}}^{Re^{i\theta^+}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le \frac{R^n}{2\pi}\int_{\theta^-}^{\theta^+} |\exp(\zeta/Re^{i\theta})|\,d\theta \le R^n\exp(|\zeta|/R)$$

et d'autre part :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{Re^{i\theta^-}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le \frac{R^{n+1}}{2\pi}\int_0^R \exp(-\varepsilon|\zeta|/r)r^{n-1}\,dr \le \frac{R^{n+1}}{2\pi\varepsilon|\zeta|}.$$

Pour $|\zeta|$ suffisamment petit, on peut choisir $R = |\zeta|$ de sorte que l'on ait : $|\mathcal{B}f(\zeta)| \le C'|\zeta|^n$ pour tout $\zeta \in V$ proche de l'origine, où $C' := e + \frac{\varepsilon^n}{\pi} > 0$. La partie développement asymptotique découle alors de la linéarité de la transformée de Borel et est laissée en exercice.

4. Les mêmes estimations montrent que pour $|\zeta|$ suffisamment petit, mais cette fois en choisissant $R = \frac{|\zeta|}{n}$, on a d'une part :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{Re^{i\theta^-}}^{Re^{i\theta^+}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le |\zeta|^n\left(\frac{n}{e}\right)^{-n}$$

et d'autre part :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{Re^{i\theta^-}} f(z)e^{\zeta/z}\frac{dz}{z^2}\right| \le \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{en^{1/n}}\right)^n|\zeta|^n\left(\frac{n}{e}\right)^{-n}.$$

D'après Stirling, il existe des constantes $C', M' > 0$ telles que : $|\mathcal{B}f(\zeta)| \le C'(M')^n|\zeta|^n(n!)^{-1}$ pour tous $\zeta \in V$ et $n \in \mathbb{N}$. La suite est un exercice. □

36. Ceci permet de retrouver la croissance au plus exponentielle de la fonction entière $\mathcal{B}f$ lorsque f est, en fait, holomorphe au voisinage de l'origine.

2.4. La transformée de Laplace

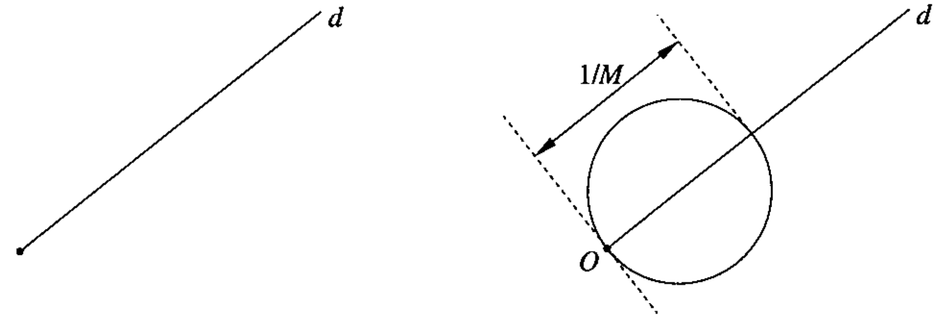
Définition 9 *Soit g une fonction complexe, disons continue, définie le long d'une demi-droite d, bornée à l'origine et à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini : $|g(\zeta)| \le C\exp(M|\zeta|)$ pour tout $\zeta \in d$, $C, M > 0$.*
On appelle transformée de Laplace *de g dans la direction d et on note $\mathcal{L}_d g$ la fonction de z définie par :*

$$\mathcal{L}_d g(z) := \int_d e^{-\zeta/z}g(\zeta)\,dz.$$

Elle est définie holomorphe sur l'ouvert sectoriel de direction d et d'ouverture π :

$$U = U(d, \pi) := \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(\arg(z) - d) > M|z|\}$$

qui n'est autre que le disque bordé par le cercle de diamètre $[0, \frac{e^{id}}{M}]$ communément appelé disque de Borel.



Proposition 5 *1. Si g est une fonction holomorphe sur un secteur infini $V = V(]d^-, d^+[, \infty)$, $d^- < d^+$, et si, sur tout sous-secteur infini $V' \prec V$, g est bornée en 0 et à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini : $|g(\zeta)| \le C\exp(M|\zeta|)$ pour tout $\zeta \in V'$, $C, M > 0$ alors ses transformées de Laplace $\mathcal{L}_d g$ dans les différentes directions $d \in]d^-, d^+[$ définissent une fonction holomorphe sur un ouvert sectoriel U de base $]d^- - \frac{\pi}{2}, d^+ + \frac{\pi}{2}[$, appelée transformée de Laplace de g et notée $\mathcal{L}g$.*

2. Si, sur tout sous-secteur de V, g s'annule à l'ordre n à l'origine, $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{L}g$ s'annule à l'ordre $n+1$ à l'origine sur tout sous-secteur de U. Ainsi, si g admet $\hat{g} = \sum_{n\ge0}\frac{a_n}{n!}\zeta^n$ comme développement asymptotique à l'origine sur V, alors $\mathcal{L}g$ admet $\hat{\mathcal{L}}\hat{g} := \sum_{n\ge0}a_n z^{n+1}$ comme développement asymptotique à l'origine sur U.

3. Si g est Gevrey d'ordre k à l'origine sur V, $k > 0$, alors $\mathcal{L}g$ est Gevrey d'ordre $\frac{k}{1+k}$ à l'origine sur U. En particulier, si g se prolonge analytiquement au voisinage de l'origine, alors $\mathcal{L}g$ est Gevrey d'ordre 1 à l'origine.

Preuve : 1. Est laissé en exercice. Il suffit de montrer les estimations de 2. et 3. pour chaque transformée de Laplace directionnelle $\mathcal{L}_d g$, $d \in]d^-, d^+[$. Découpons-la en deux : $\int_d = \int_0^{re^{id}} + \int_{re^{id}}^{\infty e^{id}}$, pour une constante $r > 0$, et commençons par estimer la deuxième partie. Par hypothèse, il existe des constantes $C, M > 0$ telles que $|g(\zeta)| \le C\exp(M|\zeta|)$ le long de d :

$$\left|\int_{re^{id}}^{\infty e^{id}} g(\zeta)e^{-\zeta/z}\,d\zeta\right| \le C\int_r^\infty \exp\Big[\Big(M - \frac{\cos(\arg(z) - d)}{|z|}\Big)t\Big]\,dt$$

et sur chaque sous-secteur de U défini par $\cos(\arg(z)-d) > \varepsilon$ et $|z| < \frac{\varepsilon}{M}$, $\varepsilon > 0$, il vient :

$$\left|\int_{re^{id}}^{\infty e^{id}} g(\zeta)e^{-\zeta/z}\,d\zeta\right| \leq \frac{C|z|e^{Mr}}{\varepsilon - M|z|}\exp(-\varepsilon r/|z|).$$

Ainsi, la fonction sur U définie par la deuxième intégrale est à décroissance exponentielle d'ordre 1 sur tout sous-secteur. L'information asymptotique de $\mathcal{L}_d g$ cherchée est donc fournie par la première intégrale, dite *intégrale de Laplace incomplète*. Supposons qu'il existe des constantes $C, M > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g(\zeta)| \leq CM^n|\zeta|^n$ le long de d :

$$\left|\int_0^{re^{id}} g(\zeta)e^{-\zeta/z}\,d\zeta\right| \leq CM^n\int_0^r t^n\exp\left(-\frac{\varepsilon t}{|z|}\right)dt$$

ce qui donne pour $\frac{\varepsilon t}{|z|} = u$:

$$\left|\int_0^{re^{id}} g(\zeta)e^{-\zeta/z}\,d\zeta\right| \leq \frac{C}{M}\left(\frac{M|z|}{\varepsilon}\right)^{n+1}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{C}{M}\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{n+1} n!|z|^{n+1}.$$

On en déduit 2. et 3. □

Nous obtenons comme corollaire de cette démonstration la :

Preuve du lemme de Borel–Ritt–Ramis : Soit $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$ une série Gevrey d'ordre 1. Sa transformée de Borel formelle $\hat{\mathcal{B}}\hat{f} = \hat{g} = \sum_{n\geq 0} a_n\frac{\zeta^n}{n!}$ converge sur un disque de rayon r centré en l'origine. Notons g sa somme. Maintenant, la transformée de Laplace incomplète : $f(z) := \int_0^{re^{id}} e^{-\zeta/z}g(\zeta)\,d\zeta$ réalise, comme nous venons en particulier de le montrer, la série $\hat{f}$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 d'une fonction f sur un secteur d'ouverture π de direction arbitraire d. La version Gevrey d'ordre $k > 0$ s'obtient de la même manière en utilisant les transformées de Borel formelle puis de Laplace incomplète d'ordre k (voir 2.5.). □

2.5. L'isomorphisme Borel–Laplace

Nous avons expliqué dans l'introduction et justifié dans 2.2. que les transformées de Borel et de Laplace induisent des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires inverses l'un de l'autre entre :

les fonctions f holomorphes au voisinage de l'origine et s'y annulant,	$\longleftrightarrow$	les fonctions entières g à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini.

qui se prolongent en des isomorphismes formels entre :

les séries formelles sans terme constant $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$,	$\longleftrightarrow$	les séries formelles $\hat{g} = \sum_{n\geq 0} a_n\frac{\zeta^n}{n!}$.

En particulier, cette dernière fait correspondre :

les séries Gevrey d'ordre k sans terme constant, $0 < k < 1$,	$\longleftrightarrow$	les séries Gevrey d'ordre $\frac{k}{1-k}$,

les séries Gevrey d'ordre 1 sans terme constant,	$\longleftrightarrow$	les séries convergentes,

et enfin, par un calcul similaire à la démonstration du 2.2.,

les séries Gevrey d'ordre k sans terme constant, $1 < k < \infty$,	$\longleftrightarrow$	les fonctions entières à croissance au plus exponentielle d'ordre $\frac{k}{k-1}$ à l'infini.

Théorème 3 *Étant donnés $d^- < d^+$, les transformées de Borel et de Laplace définissent des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires inverses l'un de l'autre entre :*

les fonctions f définies holomorphes sur un ouvert sectoriel de base $]d^- - \frac{\pi}{2}, d^+ + \frac{\pi}{2}[$ s'annulant à l'ordre 1 sur tout sous-secteur à l'origine,	$\longleftrightarrow$	*les fonctions g holomorphes sur le secteur infini de base $]d^-, d^+[$ à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 sur tout sous-secteur à l'infini.*

Cette correspondance induit, pour chaque $0 < k < 1$, un isomorphisme entre :

les fonctions f qui sont, de plus, Gevrey d'ordre k sur tout sous-secteur à l'origine,	$\longleftrightarrow$	*les fonctions g qui sont, de plus, Gevrey d'ordre $\frac{k}{1-k}$ sur tout sous-secteur à l'origine,*

et, pour $k = 1$, un isomorphisme entre :

les fonctions f qui sont, de plus, Gevrey d'ordre 1 sur tout sous-secteur à l'origine,	$\longleftrightarrow$	*les fonctions g qui sont, de plus, analytiques à l'origine.*

Nous nous contenterons de la :

Preuve de $\mathcal{LB}f = f$: Il suffit de montrer que, pour f holomorphe au delà d'un secteur $V = V(d, \pi + \vartheta, r)$ et s'annulant à l'ordre 1 à l'origine, on a $\mathcal{L}_d\mathcal{B}_d f(z_0) = f(z_0)$ dès que $z_0 \in d$ est suffisamment petit. Écrivons :

$$\mathcal{L}_d\mathcal{B}_d f(z_0) = \int_d e^{-\zeta/z_0}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} e^{\zeta/z}f(z)\frac{dz}{z^2}\,d\zeta.$$

Dès que $|z_0| < r$, on peut inverser l'ordre d'intégration, et :

$$\mathcal{L}_d\mathcal{B}_d f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V}\frac{f(z)}{z^2}\int_d e^{\zeta(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0})}\,d\zeta\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V}\frac{f(z)}{z}\frac{z_0}{z-z_0}\,dz\ ;$$

on conclut par le théorème des résidus. □

Nous avons en particulier démontré l'injectivité de la transformée de Borel et obtenons comme corollaire la :

Preuve du lemme de Watson (principe de quasi-analyticité) : Soit f une fonction holomorphe à décroissance exponentielle d'ordre 1 à l'origine sur un secteur $V = V(d, \pi + \vartheta, r)$ d'ouverture $> \pi$. Alors f est en particulier Gevrey d'ordre 1 et sa transformée de Borel $\mathcal{B}f$, définie sur le secteur $V(d, \vartheta, \infty)$, se prolonge analytiquement au voisinage de l'origine. Mais $\mathcal{B}f$ est identiquement nulle puisque son développement de Taylor à l'origine est donné par $\hat{\mathcal{B}}\hat{f} = \hat{\mathcal{B}}0 \equiv 0$ et par conséquent f aussi. L'analogue

Gevrey d'ordre k utilise la transformée de Borel d'ordre k dont nous allons maintenant parler. □

La théorie sectorielle Gevrey d'ordre k développée dans toute la première partie se ramène essentiellement à la théorie Gevrey d'ordre 1 via l'application $z \mapsto z^k$.

De la même manière, on définit[37] un isomorphisme Borel–Laplace d'ordre k par :

$$g(\zeta) = \mathcal{B}_d^k f(\zeta) := \frac{k}{2i\pi} \int_{\partial V} e^{(\zeta/z)^k} f(z) \frac{dz}{z}$$

et

$$f(z) = \mathcal{L}_d^k g(z) := \int_d e^{-(\zeta/z)^k} g(\zeta)\, d(\zeta/z)^k$$

mettant en correspondance :

les fonctions f holomorphes sur un ouvert sectoriel de direction d et d'ouverture $> \frac{\pi}{k}$ et bornées à l'origine,	$\longleftrightarrow$	les fonctions g holomorphes sur un secteur infini de direction d, à croissance au plus exponentielle d'ordre k à l'infini et bornées à l'origine.

Les transformations formelles associées sont :

$$\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \longleftrightarrow \hat{g} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})} \zeta^n$$

Si $k_1, k_2 > 0$ sont tels que $\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k}$, alors se correspondent notamment :

pour $0 < k_1 < k$,

les fonctions f Gevrey d'ordre k_1 à l'origine,	$\longleftrightarrow$	les fonctions g Gevrey d'ordre k_2 à l'origine,

pour $k_1 = k$,

les fonctions f Gevrey d'ordre k à l'origine,	$\longleftrightarrow$	les fonctions g analytiques à l'origine,

et pour $0 < k < k_1$ (par l'isomorphisme formel),

les séries $\hat{f}$ Gevrey d'ordre k_1,	$\longleftrightarrow$	les fonctions g entières à croissance au plus exponentielle d'ordre $-k_2$.

37. Plusieurs variantes sont possibles. On prendra garde que les formules intégrales qui suivent ne généralisent pas tout à fait celles précédemment définies. Elles ont cependant l'avantage d'avoir une expression formelle plus naturelle.

2.6. Sommation des séries k-sommables

On déduit immédiatement des isomorphismes précédents le :

Théorème 4 *Une série Gevrey d'ordre k, $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$, est k-sommable dans la direction d si et seulement si sa transformée de Borel formelle d'ordre k, $\hat{g} := \hat{\mathcal{B}}^k \hat{f} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})}\zeta^n$ (qui converge au voisinage de l'origine), se prolonge analytiquement le long d'un secteur infini de direction d, $V = V(d, \vartheta, \infty)$, en une fonction g à croissance au plus exponentielle d'ordre k.*
La somme de $\hat{f}$ dans la direction d est alors donnée par la transformée de Laplace d'ordre k, $\mathcal{L}_d^k g$.

D'un point de vue historique, É. BOREL a proposé, au début de ce siècle, l'algorithme précédent à l'ordre $k = 1$ ($\hat{\mathcal{B}}$ suivi du prolongement analytique le long de la direction d suivi de $\mathcal{L}_d$) comme outil pour le prolongement analytique des séries convergentes et comme procédé de sommation de certaines séries divergentes; c'est ce que nous avons raconté dans 2.1. et dans les exemples 1 et 2 du 2.2. Lorsque cet algorithme fonctionne pour une série formelle, on dit qu'elle est sommable au sens de Borel. E. LEROY et F. NEVANLINNA ont rapidement généralisé l'algorithme à un ordre k arbitraire; le corollaire nous dit que la k-sommabilité introduite dans la première partie est équivalente à la k-sommabilité au sens de Borel–Leroy–Nevanlinna (et que les sommes correspondantes sont les mêmes !).
Le principe de quasi-analyticité suffit à assurer la cohérence entre les différentes notions de k-somme, $k > 0$, et la notion de somme usuelle pour une série convergente : si une série $\hat{f}$ est convergente, de somme f, alors elle est en particulier k-sommable dans toute direction et pour tout $k > 0$. Les algorithmes Borel–Laplace correspondants nous fournissent autant de prolongements analytiques[38] de la même fonction f. La cohérence générale entre les différents algorithmes de k-sommation, $k > 0$, va résulter de l'isomorphisme Borel–Laplace :

Proposition 6 *Étant donnés $0 < k_1 < k_2$, si une série formelle $\hat{f}$ est à la fois k_1-sommable dans la direction d et Gevrey d'ordre k_2, alors sa k_1-somme est en fait Gevrey d'ordre k_2.*

Preuve : Notons f la k_1-somme de $\hat{f}$ dans la direction d et considérons sa transformée de Borel d'ordre k_2. Si l'on pose $\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$, alors $\mathcal{B}^{k_2} f$ est holomorphe sur un secteur infini de direction d et d'ouverture $> \frac{\pi}{k}$, à décroissance au plus exponentielle d'ordre k_2 à l'infini et Gevrey d'ordre k à l'origine : on reste dans une situation de quasi-analyticité. D'autre part, la transformée de Borel formelle d'ordre k_2 de $\hat{f}$ converge. Sa somme coïncide avec $\mathcal{B}^{k_2} f$ qui est alors analytique à l'origine. Lorsque l'on revient par la transformée de Laplace d'ordre k_2, on récupère que la k_1-somme f de $\hat{f}$ était en fait Gevrey d'ordre k_2. □

Remarque.

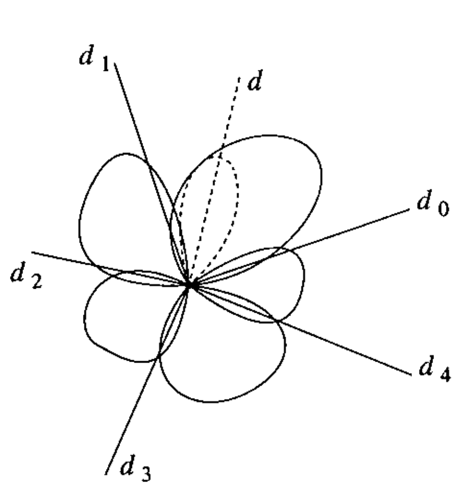
1. Si une série est à la fois k_1-sommable et k_2-sommable dans la direction d pour des ordres distincts $0 < k_1 < k_2$, alors elle est en particulier Gevrey d'ordre k_2 et la proposition nous dit que sa k_1-somme est aussi sa k_2-somme.

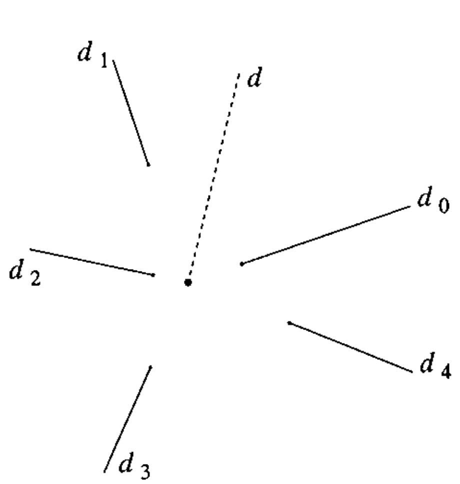
38. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de G. Valiron *Théorie des fonctions*.

2. On voit tout de suite comment construire de nombreux exemples de séries Gevrey d'ordre 1 qui ne sont k-sommables pour aucun k et dans aucune direction ! Il suffit pour cela de considérer une fonction $g(\zeta)$ holomorphe sur le disque $|\zeta| < 1$ ne se prolongeant en aucun point du bord. Sa transformée de Laplace formelle, $\hat{f} := \hat{L}g$, n'est 1-sommable dans aucune direction, d'après le corollaire. Par ailleurs, $\hat{f}$ est Gevrey d'ordre au plus 1 et ne peut être sommable pour un ordre $k > 1$. Enfin, si elle était sommable dans une direction d pour un ordre $0 < k < 1$, elle le serait aussi à l'ordre 1, d'après la proposition, ce qui n'est pas le cas.
3. Si la k-somme d'une série formelle dans la direction d est, nous venons de le voir, bien définie indépendamment de l'ordre k, celui-ci ne l'est pas vraiment. En effet, si la série est sommable à un certain ordre k_0, elle le reste au moins pour les ordres $k < k_0$ suffisamment proches de k_0. En fait, l'ensemble des $k > 0$ pour lesquels la série est k-sommable dans la direction d est un intervalle qui pourrait très bien être ouvert. Nous allons voir qu'il n'en va pas de même avec les séries k-sommables : elles le sont pour un unique k et doivent être sommées à cet ordre.

Énonçons l'analogue du corollaire précédent pour les séries k-sommables.

Corollaire 3 *Une série Gevrey d'ordre k, $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$, est k-sommable de directions de Stokes $0 \leq d_0 < \cdots < d_{\nu-1} < 2\pi$ si et seulement si sa transformée de Borel formelle d'ordre k, $\hat{g} := \hat{\mathcal{B}}^k\hat{f} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})}\zeta^n$, se prolonge analytiquement en dehors des demi-droites $0 \leq d_0 < \cdots < d_{\nu-1} < 2\pi$, avec croissance au plus exponentielle d'ordre k à l'infini sur tout sous-secteur.*
La k-somme $(d_i, U_{i,i+1}, f_{i,i+1})_{i=0,\ldots,\nu-1}$ de $\hat{f}$ est donnée par : $f_{i,i+1} = \mathcal{L}^k_d g$, d décrivant l'intervalle $]d_i, d_{i+1}[$, et le k-cocycle $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\ldots,\nu-1}$, par : $h_i = \mathcal{L}^k_{d_i^+} g - \mathcal{L}^k_{d_i^-} g$, $i = 0, \ldots, \nu - 1$.





Exemple. La transformée de Borel de la série d'Euler $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} n! z^{n+1}$, $g = \hat{\mathcal{B}}\hat{f} = \frac{1}{1-\zeta}$, se prolonge sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ avec croissance polynomiale à l'infini. Son cocycle se calcule alors comme le résidu de $\zeta \mapsto e^{-\zeta/z}\frac{1}{1-\zeta}$ en $\zeta = 1$ à un facteur $2i\pi$ près : $h(z) = -2i\pi e^{-1/z}$.

Le résultat suivant est dû à J. Martinet et J.-P. Ramis.

Théorème 5 *Étant donnés $0 < k_1 < k_2$, si une série formelle est à la fois k_1-sommable et Gevrey d'ordre k_2, alors elle converge. En particulier :*

$$\mathbb{C}\{z\}_{k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2} = \mathbb{C}\{z\}.$$

Preuve : Soit $\hat{f}$ une série k_1-sommable. Nous allons montrer que si $\hat{f}$ est de plus Gevrey d'ordre $k_2 > k_1$, alors elle converge. Il suffit pour cela de considérer sa k_1-somme[39] $(d_i, U_{i,i+1}, f_{i,i+1})_{i=0,\ldots,\nu-1}$. D'après le corollaire précédent, les k_1-sommcs sectorielles $f_{i,i+1}$ sont en fait Gevrey d'ordre k_2 et les composantes h_i du k_1-cocycle $(d_i, U_i, h_i)_{i=0,\ldots,\nu-1}$ sont k_2-plates sur des ouverts sectoriels d'ouverture $\frac{\pi}{k_1}$; d'après le principe de quasi-analyticité, ce dernier est trivial et la série converge. □

En particulier, si une série divergente est k-sommable, elle est Gevrey précisément d'ordre k.

Commentaire. L'exemple précédent suggère de voir une série divergente, dans les bons cas, comme une fonction ayant des singularités infiniment proches de l'origine. La transformée de Borel aurait alors l'effet d'une loupe, éloignant ces singularités de l'origine afin de faire converger la fonction sur un disque. En la prolongeant bien au delà des singularités (tout en les évitant) puis en annulant l'effet de loupe par la transformée de Laplace, on récupère les sommes sectorielles.

Il importe d'être très précis. Si l'on applique à une série, disons, 1-sommable une transformée de Borel d'ordre $k > 1$, la série obtenue, $\hat{\mathcal{B}}^k\hat{f}$ ne convergera évidemment pas ; la loupe n'est pas assez puissante. Si, par contre, on lui applique une transformée de Borel d'ordre $k < 1$, la fonction g obtenue sera peut-être entière, mais à croissance exponentielle d'ordre $> k$ le long de directions non isolées (voire partout si $k \ll 1$!) ; la loupe, trop puissante, écrase les singularités à l'infini.

Une manière de formaliser tout ceci est de considérer le *plan de Borel*, domaine sur lequel vivent la variable ζ et la transformée de Borel, comme un voisinage infinitésimal de l'origine. Une telle description a été faite (dans le cadre plus général de la multisommabilité) en termes d'analyse non standard par J. MARTINET et J.-P. RAMIS en 1989, puis, très récemment, compte tenu d'un analogue p-adique dû à DELIGNE, en termes de recollements de faisceaux par M. LODAY-RICHAUD et G. POURCIN.

Chacun de ces points de vue part de l'idée naïve qu'une série Gevrey est une fonction définie sur un voisinage infinitésimal de l'origine (un vrai voisinage dans le plan de Borel) et que cette série est convergente si le disque de convergence de la fonction correspondante va au delà du voisinage infinitésimal et respectivement 1-sommable dans la direction d si la fonction admet un prolongement analytique dans cette direction au delà du disque infinitésimal.

La théorie des fonctions résurgentes construite par J. ÉCALLE dans les années quatre-vingts nous propose une analyse systématique des singularités de la transformée de Borel : l'obstruction à la convergence n'est plus considérée comme obstruction au recollement de sommes sectorielles (point de vue cohomologique sectoriel) mais comme obstruction au prolongement analytique.

2.7. Introduction à la multisommabilité

Considérons les séries :

$$\hat{f}_1 = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! z^{n+1} \qquad \text{et} \qquad \hat{f}_2 = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! z^{2n+2}.$$

39. Voir définition dans 1.6.

En remarquant que $\hat{f}_1(-z)$ est la série d'Euler déjà étudiée et que $\hat{f}_2(z) = \hat{f}_1(z^2)$, on déduit que $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont respectivement 1 et 2-sommables. Leur somme, $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, est solution de l'équation différentielle d'ordre 3 :

$$z^5(2-z)f''(z) + z^2(4+5z^2-2z^3)f'(z) + 2(2-z+z^2)f(z) = 4z + 2z^2 + 10z^3 - 3z^4$$

mais n'est sommable à aucun ordre k. En effet, $\hat{f}$ est précisément Gevrey d'ordre 1 ; si elle était sommable, elle le serait précisément à cet ordre par le théorème 5 ; dans ce cas, $\hat{f}_2 = \hat{f} - \hat{f}_1$ serait aussi 1-sommable, ce qui, toujours par ce même théorème, n'est pas possible puisque $\hat{f}_2$ est précisément Gevrey d'ordre 2. Cet exemple, dû à J.-P. RAMIS et Y. SIBUYA, motiva au début des années quatre-vingts le passage à la multisommabilité.

Une série formelle $\hat{f}$ sera dite *multisommable d'ordres* $0 < k_1 < \cdots < k_n$ si elle peut s'écrire :

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \cdots + \hat{f}_n$$

où $\hat{f}_i$ est k_i-sommable, $i = 1, \ldots, n$. Cette décomposition n'est pas unique puisque l'on peut ajouter une série convergente d'un côté et la retrancher de l'autre. Dans la pratique, un algorithme facile détermine, à partir d'une équation différentielle donnée, les ordres de multisommabilité de ses solutions formelles. Cependant, la décomposition n'est pas effective. Aussi, la difficulté supplémentaire à laquelle les gens ont dû faire face était de construire une théorie de la multisommabilité ne faisant apparaître à aucun moment cette décomposition.

L'approche sectorielle due à B. MALGRANGE et J.-P. RAMIS généralise la définition de k-sommabilité de 1.5. Elle part de l'idée qu'en une direction générique d, chacune des séries $\hat{f}_i$ est sommable de somme f_i. Sur un certain secteur V_n de direction d et d'ouverture $> \frac{\pi}{k_n}$, la somme de $\hat{f}$ est donnée par $f_1 + \cdots + f_n$; elle est Gevrey d'ordre 1 et le fait de la regarder sur un secteur de cette taille nous fait perdre la quasi-analyticité. Si, par contre, on regarde la somme des k_i-sommes globales respectives des $\hat{f}_i$, $i = 1, \ldots, n$, telles qu'elles ont été définies dans le 1.6., alors on ne récupérera certainement pas une fonction en restriction à un secteur d'ouverture $> \frac{\pi}{k_1}$ mais une *quasi-fonction*.

On appelle *quasi-fonction k-précise* sur un secteur (ou un disque épointé) V la donnée d'un recouvrement fini de V par des secteurs de même rayon $V_0, \ldots, V_{\nu-1}$ et sur chacun d'eux d'une fonction holomorphe $f_i \in \mathcal{O}(V_i)$ tels que, lorsque V_i et V_j se coupent, la différence $f_i - f_j$ y est à décroissance exponentielle d'ordre k à l'origine. En d'autres termes, nous venons de définir la notion de "fonction modulo les infiniment plats d'ordre k" sur V. Dans cet esprit, nous dirons que deux telles données, $(V_i, f_i)_{i=0,\ldots,\nu-1}$ et $(V_i', f_i')_{i=0,\ldots,\nu-1}$, définissent la même quasi-fonction k-précise si elles diffèrent[40] de fonctions à décroissance exponentielle d'ordre k.

Par exemple, la k-somme d'une série k-sommable définit une quasi-fonction k-précise sur le disque épointé. Mais plus généralement, le lemme de Borel–Ritt–Ramis (voir 1.5.) permet d'associer à chaque série Gevrey d'ordre k une quasi-fonction k-précise sur le disque épointé. Réciproquement, toute quasi-fonction k-précise sur un disque épointé qui est bornée à l'origine[41] est en fait Gevrey d'ordre k et donc asymptote à une unique série Gevrey d'ordre k : la démonstration du corollaire 2 s'adapte immédiatement aux quasi-fonctions k-précises. Ainsi, les quasi-fonctions k-précises sur le disque épointé ne sont rien d'autre que les séries Gevrey d'ordre k.

40. Plus précisément, si, chaque fois que V_i et V_j' se coupent, la différence $f_i - f_j'$ y est plate à l'ordre k.
41. On dit qu'une quasi-fonction k-précise $(V_i, f_i)_{i=0,\ldots,\nu-1}$ est bornée (resp. Gevrey d'ordre k) à l'origine si les f_i le sont.

Regardons, dans le cas $n = 2$, comment cette notion de quasi-fonction va permettre de caractériser les séries multisommables à l'ordre k_1, k_2. Supposons donnée, *a posteriori*, une série $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ où $\hat{f}_i$ est k_i-sommable, $0 < k_1 < k_2$. Notons $[f_2]_{k_2}$ la quasi-fonction k_2-précise définie par "la somme f_2" de $\hat{f}_2$ et, pour une direction générique d, notons f_i la somme de $\hat{f}_i$ sur un secteur V_i d'ouverture $> \frac{\pi}{k_i}$ et de direction d, $i = 1, 2$. Maintenant, considérons les "fonctions" g_1 et g_2 définies par $f_1 + f_2$ sur V_1 et V_2 respectivement :

- $[g_1]_{k_2}$ est une quasi-fonction k_2-précise sur V_1 et Gevrey d'ordre 1 asymptote à $\hat{f}$,
- g_2 est holomorphe sur V_2 et y définit la même quasi-fonction k_2-précise que $[g_1]_{k_2}$.

Il se trouve que ces deux propriétés suffisent à définir sans ambiguïté $[g_1]_{k_2}$ et g_2. Tout d'abord, si la quasi-fonction $[g_1]_{k_2}$ est fixée, alors g_2 est unique d'après le lemme de Watson : en effet, si une fonction g_2' sur V_2 y définit aussi la même quasi-fonction k_2-précise que $[g_1]_{k_2}$, alors $g_2 - g_2'$ est k-plate sur V_2 et donc identiquement nulle. L'unicité de $[g_1]_{k_2}$ provient de l'idée suivante : si l'on néglige les infiniment plats d'ordre k_2, alors $[g_1]_{k_2}$ devient une vraie fonction Gevrey d'ordre 1 sur V_1 et doit y être unique. Pour formaliser cette idée, on a besoin du :

Théorème 6 (Watson relatif) *Étant donnés $0 < k_1 < k_2$, si une quasi-fonction k_2-précise $[f]_{k_2}$ est à décroissance exponentielle d'ordre k_1 sur un secteur V de direction d et d'ouverture $> \frac{\pi}{k_1}$, alors c'est la quasi-fonction k_2-précise nulle,* i. e. *f est en fait à décroissance exponentielle d'ordre k_2.*

Ce résultat est dû à B. MALGRANGE et la démonstration que nous allons en donner est due à J.-P. RAMIS.

Preuve : Soit $(V_i, f_i)_{i=0,\ldots,\nu-1}$ le recouvrement définissant la quasi-fonction $[f]_{k_2}$. Quitte à renuméroter les V_i et, éventuellement, à en supprimer, on peut les supposer se chevauchant deux à deux suivant un ordre croissant[42]. En utilisant la transformée de Cauchy–Heine sur les différences $f_{i+1} - f_i$ comme dans la preuve du théorème 2, le lecteur pourra montrer en exercice que l'on construit une quasi-fonction k_2-précise et Gevrey d'ordre k_2 sur le disque épointé telle que la différence $[f]_{k_2} - [g]_{k_2} = [f-g]_{k_2}$ définisse une vraie fonction holomorphe h sur V. En particulier, h est Gevrey d'ordre k_1 sur V et $\hat{h}$ est 1-sommable dans la direction d. Or $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = -\hat{g}$ est Gevrey d'ordre k_2 ; d'après le théorème 5, h est finalement Gevrey d'ordre k_2, et $[f]_{k_2} = [g]_{k_2} + h$ aussi : puisque $\hat{f} = 0$, $[f]_{k_2}$ est k_2-plate. □

Maintenant, si $[g_1']_{k_2}$ est une autre quasi-fonction k_2-précise sur V_1 et Gevrey d'ordre 1 asymptote à $\hat{f}$, alors $[g_1]_{k_2} - [g_1']_{k_2} = [g_1 - g_1']_{k_2} = [0]_{k_2}$ d'après le lemme précédent.

Définition 10 *Étant donnés $0 < k_1 < \cdots < k_n$, une série $\hat{f}$ Gevrey d'ordre k_1 sera dite $k_1, \ldots, k_n$-multisommable dans la direction d s'il existe :*

- *une collection de secteurs emboîtés $V_1 \supset \cdots \supset V_n$ de direction d et d'ouvertures respectives $\frac{\pi}{k_1}, \ldots, \frac{\pi}{k_n}$,*
- *sur V_1, une quasi-fonction k_2-précise, $[f_1]_{k_2}$, et Gevrey d'ordre k_1 asymptote à $\hat{f}$,*
- *sur chaque V_i, $i = 2, \ldots, n-1$, une quasi-fonction k_{i+1}-précise $[f_i]_{k_{i+1}}$ définissant la même quasi-fonction k_1-précise que $[f_{i-1}]_{k_i}$ et,*
- *sur V_n, une vraie fonction f_n définissant la même fonction k_n précise que $[f_{n-1}]_{k_n}$.*

42. En d'autres termes : $V = V(]d^-, d^+[, r)$, $V_i = V(]d_i^-, d_i^+[, r)$, $d_i^- < d_{i+1}^-$ et $d_i^+ < d_{i+1}^+$.

La même série sera dite $k_1, \ldots, k_n$-multisommable si elle l'est dans toutes les directions sauf un nombre fini.

On montre que cette définition est équivalente à celle de départ. Celle-ci a permis de montrer, par des arguments cohomologiques assez simples, la multisommabilité des solutions formelles des équations différentielles linéaires. Par contre, elle ne donne pas d'algorithme effectif pour les calculer.

J.-C. TOUGERON a donné une autre définition sectorielle de la multisommabilité (que nous ne décrirons pas ici) généralisant la caractérisation suivante des fonctions Gevrey. Étant donné un ouvert sectoriel U et deux constantes $r, \rho > 0$, on définit une suite emboîtée de voisinages ouverts de l'origine par $U_n := U \cup D_n$ où D_n est le disque centré en 0 de rayon $r/\rho^{1/n}$. Étant donnée une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{O}(U_n)$, s'il existe des constantes $C > 0$ et $0 < M < 1$ telles que $\|f_n\|_{U_n} \leq CM^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction holomorphe sur U et Gevrey d'ordre k à l'origine. Réciproquement, toute fonction Gevrey d'ordre k sur U peut s'écrire comme somme de telles fonctions, holomorphes à l'origine[43].

Voyons maintenant comment resommer une série multisommable par un algorithme de type Borel–Laplace. Nous allons décrire successivement les approches de W. BALSER et de J. ÉCALLE.

Revenons au cas particulier $n = 2$: $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ où $\hat{f}_i$ est k_i-sommable, $0 < k_1 < k_2$. L'algorithme proposé par W. Balser consiste à appliquer à $\hat{f}$ la transformée de Borel formelle d'ordre k_2 de façon à obtenir une série k-sommable, où $\frac{1}{k} := \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}$, de resommer celle-ci par l'algorithme standard d'ordre k puis de revenir dans la variable de départ via la transformée de Laplace d'ordre k_2. Détaillons cela.

La série $\hat{\mathcal{B}}^{k_2}\hat{f}_2$ est convergente et se prolonge dans presque toutes les directions (c'est-à-dire toutes sauf un nombre fini) avec croissance au plus exponentielle d'ordre k_2. L'algorithme standard $\mathcal{L}_d^k\hat{\mathcal{B}}^k$ va effectuer ce prolongement et le retour par $\mathcal{L}_d^{k_2}$ nous donnera la somme de f_2 dans la direction d.

La série $\hat{\mathcal{B}}^{k_2}\hat{f}_1$ n'est que formelle, Gevrey d'ordre k. Cependant, si $\hat{f}_1$ est sommable dans la direction d, sa somme est envoyée par $\mathcal{B}_d^{k_2}$ sur une fonction définie sur un secteur infini de direction d, d'ouverture $> \frac{\pi}{k}$, avec croissance au plus exponentielle d'ordre k_2 à l'infini et Gevrey d'ordre k asymptote à $\hat{\mathcal{B}}^{k_2}\hat{f}_1$. Ainsi, dans notre situation, $\hat{\mathcal{B}}^{k_2}\hat{f}_1$ est k-sommable et sa somme, que l'on récupère par l'algorithme standard $\mathcal{L}_d^k\hat{\mathcal{B}}^k$, se prolonge sectoriellement jusqu'à l'infini avec la croissance nécessaire pour pouvoir revenir avec $\mathcal{L}_d^{k_2}$.

En fait, si l'on avait voulu être rigoureux, il aurait fallu introduire dès le 2.6. les opérateurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_d$, le premier consistant à sommer une série convergente sur son disque de convergence, et le second consistant à prolonger analytiquement jusqu'à l'infini dans la direction d une fonction définie au voisinage d'un segment $]0, r\,e^{id}[$, $r > 0$. Dans ce cas, l'algorithme standard de sommation Borel–Laplace d'ordre k s'écrit $\mathcal{L}_d^k\mathcal{S}_d\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}^k$ et l'algorithme que nous venons de décrire, $\mathcal{L}_d^{k_2}\mathcal{S}_d\mathcal{L}_d^k\mathcal{S}_d\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}^k\hat{\mathcal{B}}^{k_2}$.

Dans le cas général, une série multisommable d'ordres $0 < k_1 < \cdots < k_n$ va être sommée dans la direction d par l'algorithme (où l'on omet de nouveau les opérateurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_d$) :

$$\mathcal{L}_d^{\kappa_n} \cdots \mathcal{L}_d^{\kappa_1}\hat{\mathcal{B}}^{\kappa_1} \cdots \hat{\mathcal{B}}^{\kappa_n}$$

où $\kappa_n := k_n$ et $\frac{1}{\kappa_i} := \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

43. Voir détails dans la référence [11].

Une autre approche possible consiste à faire opérer successivement les algorithmes standards correspondant aux différents niveaux de sommation de la série de départ. Revenons au cas $n = 2$.

Si l'on applique, pour commencer, l'opérateur standard de sommation d'ordre k_2, on n'a rien gagné : ne connaissant pas, *a priori*, la décomposition $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, on ne pourra voir la série $\hat{\mathcal{B}}^{k_2}\hat{f}$ que comme une vulgaire série divergente à laquelle nous serons contraints de n'appliquer qu'une transformée de Laplace formelle.

Par contre, si l'on commence par appliquer la transformée de Laplace formelle d'ordre k_1, on récupère une série convergente qui se prolonge dans toutes les directions sauf un nombre fini avec une croissance exponentielle d'ordre k à l'infini, où $\frac{1}{k} := \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}$. On aimerait pouvoir revenir à la variable de départ avec une transformée de Laplace d'ordre k_1 pour repartir aussi sec avec une transformée de Borel d'ordre k_2. Hélas, la croissance exponentielle d'ordre $k > k_1$ due à la fonction entière $\hat{\mathcal{B}}^{k_1}\hat{f}_2$ nous l'interdit. L'idée de J. ÉCALLE est de contracter le double opérateur "Laplace d'ordre k_1 suivie de Borel d'ordre k_2", en un opérateur plus direct et donc plus efficace. C'est l'*opérateur d'accélération* $\mathcal{A}_d^{k_2,k_1}$. Commençons par faire agir notre double opérateur là où il s'applique ; on note ζ_1 et ζ_2 les variables respectives des plans de Borel d'ordre k_1 et k_2 et on considère une fonction $g(\zeta_1)$ définie le long d'une direction d, bornée à l'origine et à croissance au plus exponentielle d'ordre k_1 à l'infini (par exemple, $g := \hat{\mathcal{B}}^{k_1}f_1$) :

$$\mathcal{B}_d^{k_2}\mathcal{L}_d^{k_1}g(\zeta_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} z^{k_2-k_1}e^{(\zeta_2/z)^{k_2}}\int_d g(\zeta_1)e^{-(\zeta_1/z)^{k_1}}\,d(\zeta_1^{k_1})\,d\Big(\frac{1}{z^{k_2}}\Big)$$

où ∂V est le contour d'un secteur V de direction d, d'ouverture $\frac{\pi}{k_2} < \theta < \frac{\pi}{k_1}$ et de rayon $r > 0$ suffisamment petit. En inversant l'ordre d'intégration, on peut écrire :

$$\mathcal{B}_d^{k_2}\mathcal{L}_d^{k_1}g(\zeta_2) = \int_d g(\zeta_1)\mathcal{C}^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,d(\zeta_1/\zeta_2)_1^k$$

où $\mathcal{C}^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2)$ est le *noyau d'accélération*. Explicitons-le :

$$\mathcal{C}^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{\zeta_2^{k_1}}{2i\pi}\int_{\partial V} z^{k_2-k_1}e^{(\zeta_2/z)^{k_2}-(\zeta_1/z)^{k_1}}\,d\Big(\frac{1}{z^{k_2}}\Big)\ ;$$

après changement de variable $t := (\zeta_2/z)^{k_2}$, il vient :

$$\mathcal{C}^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\tilde{V}} t^{\frac{k_1}{k_2}-1}e^{t-(\zeta_1/\zeta_2)^{k_1}t^{k_1/k_2}}\,dt,$$

où $\partial\tilde{V}$ est le contour d'un secteur pointé à l'infini de direction $\mathbb{R}^+$, d'ouverture $\tilde{\theta} > \pi$ et de rayon $R > 0$ suffisamment grand ; ceci s'écrit encore :

$$\mathcal{C}^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2) = C_{\frac{k_1}{k_2}}((\zeta_1/\zeta_2)^{k_1})$$

avec :

$$C_\kappa(\zeta) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{H}} t^{\kappa-1}e^{t-\zeta t^\kappa}\,dt,$$

où $\mathcal{H}$ est[44], par exemple, le contour de $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}^-\cup\mathbb{D}_R)$, $\mathbb{D}_R$ étant un disque de rayon $R > 0$ suffisamment grand.

44. Un tel chemin d'intégration s'appelle communément *contour de Hankel*.

Pour $0 < \kappa < 1$, on montre que $C_\kappa(\zeta)$ est une fonction entière de ζ à décroissance exponentielle d'ordre $\frac{1}{1-\kappa}$ dans la direction $\mathbb{R}^+$ (et dans les directions voisines). Ainsi, à ζ_2 fixé dans la direction d, le noyau d'accélération $C^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2)$ est à décroissance exponentielle d'ordre k lorsque ζ_1 tend vers l'infini dans la même direction d. C'est tout juste ce qu'il faut pour pouvoir appliquer l'opérateur d'accélération

$$\mathcal{A}_d^{k_2,k_1} g(\zeta_2) = \int_d g(\zeta_1) C^{k_2,k_1}(\zeta_1,\zeta_2)\, d(\zeta_1/\zeta_2)_1^k$$

à la fonction entière $g(\zeta_1)$ définie par $\hat{\mathcal{B}}^{k_1}\hat{f}_2$. L'algorithme d'*accéléro-sommation* correspondant est : $\mathcal{L}_d^{k_2}\mathcal{A}_d^{k_2,k_1}\hat{\mathcal{B}}^{k_1}$, et dans le cas général, pour $0 < k_1 < \cdots < k_n$, $\mathcal{L}_d^{k_n}\mathcal{A}_d^{k_n,k_{n-1}}\cdots\mathcal{A}_d^{k_2,k_1}\hat{\mathcal{B}}^{k_1}$.

Chapitre 3
Les fonctions résurgentes et le calcul étranger

3.1. Introduction

Reprenons l'équation différentielle d'Euler

$$(\mathrm{E}) \qquad z^2 \cdot f'(z) = f(z) - z$$

et essayons de la regarder sur le plan de Borel. Une simple intégration par parties nous dit ce que devient la dérivation :

$$\mathcal{B}_d f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} \frac{e^{\zeta/z}}{z^2} f(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} \frac{e^{\zeta/z}}{\zeta} f'(z)\,dz = \frac{1}{\zeta}\mathcal{B}_d(z^2 f'(z))(\zeta)$$

et l'opérateur $z^2\frac{\partial}{\partial z}$ du plan des z est transformé en l'opérateur de multiplication par ζ sur le plan de Borel, que nous noterons ∂.
L'équation d'Euler devient donc :

$$\mathcal{B}(\mathrm{E}) \qquad \partial g = g - 1$$

d'où l'on déduit immédiatement que $\zeta \cdot g(\zeta) = g(\zeta) - 1$, *i. e.* $g(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta}$, et donc $f = \mathcal{L}(\frac{1}{1-\zeta})$.
Nous allons maintenant revenir à l'équation aux différences (D) de 1.7. dans le cas particulier où $\psi = \varphi$:

$$(\mathrm{D}) \qquad F\Big(\frac{z}{1-z}\Big) - F(z) = \Delta(z)$$

où la fonction Δ est holomorphe au voisinage de l'origine, s'annulant à l'ordre 2 en 0. L'opérateur "composition à droite par $\frac{z}{1-z}$" admet une écriture très simple sur le plan de Borel :

$$\mathcal{B}_d\Big(F\Big(\frac{z}{1-z}\Big)\Big)(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} e^{\zeta/z} F\Big(\frac{z}{1-z}\Big)\frac{dz}{z^2},$$

ce qui, dans la variable $t := \frac{z}{1-z}$, nous donne :

$$\mathcal{B}_d\Big(F\Big(\frac{z}{1-z}\Big)\Big)(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} e^{\zeta/t}e^{\zeta}F(t)\frac{dt}{t^2} = e^{\zeta}\cdot\mathcal{B}_d F(\zeta).$$

Ainsi, l'équation (D) s'écrit sur le plan de Borel :

$$\mathcal{B}(\mathrm{D}) \qquad (e^{\zeta} - 1)\cdot G(\zeta) = \mathcal{B}\Delta(\zeta),$$

où $\mathcal{B}\Delta$ est une fonction entière à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 et s'annulant à l'origine. Sa solution $G(\zeta) := \frac{\mathcal{B}\Delta(\zeta)}{e^{\zeta}-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec croissance au plus exponentielle d'ordre 1 ; ses pôles sont situés sur $2i\pi\mathbb{Z}^*$ et l'on retrouve, en particulier, que $\hat{F}$ est 1-sommable dans toutes les directions sauf les axes imaginaires.

Mais en fait, on a bien plus : la divergence de la solution $\hat{F}$ est totalement décrite par une suite de scalaires indexés par $\mathbb{Z}^*$ à savoir les résidus des pôles de $\frac{\mathcal{B}\Delta(\zeta)}{e^{\zeta}-1}$ qui ne sont autres que les valeurs de $\mathcal{B}\Delta$ aux points $2i\pi\mathbb{Z}^*$. En effet, tous les pôles sont simples ; si tous les résidus sont nuls, alors G est en fait entière à croissance au plus exponentielle d'ordre 1, ce qui signifie, dans la variable z, que la série $\hat{F}$ est convergente.

Il apparaît alors clairement que la solution de l'équation (D) est exceptionnellement convergente : pour que ceci se produise, il faut que le second membre choisi soit tel que sa transformée de Borel qui *a priori* est une fonction entière quelconque à croissance exponentielle d'ordre 1 s'annule tout le long du réseau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Je crois que ces deux exemples, à eux seuls, suffisent à justifier le mal que l'on va se donner.

3.2. La convolution des fonctions et hyperfonctions

Les équations différentielles appartiennent au monde de l'algèbre différentielle : pour travailler avec elles, on a besoin, outre le calcul linéaire, de savoir différentier mais aussi multiplier deux fonctions entre elles. L'apparente similitude des transformées Borel–Laplace avec les transformées de Fourier nous suggère que le produit usuel de deux fonctions de z va être transformé en un produit de convolution sur le plan de Borel.

Définition 11 *Étant données deux fonctions $g_1(\zeta)$ et $g_2(\zeta)$ définies sur un voisinage de l'origine, on définit leur* convolée *$g_1 * g_2$ par :*

$$g_1 * g_2(\zeta) := \int_0^{\zeta} g_1(\zeta - t) g_2(t)\, dt.$$

Si g_1 et g_2 se prolongent avec croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini dans la direction d, alors on vérifie qu'il en va de même pour $g_1 * g_2$. Le fait que la transformée de Laplace ramène l'opération de convolution sur le produit se montre, comme dans le cas de la transformée de Fourier, par Fubini et changement de variable :

$$\mathcal{L}_d(g_1 * g_2)(z) = \int_d e^{-\zeta/z} \int_0^{\zeta} g_1(\zeta - t) g_2(t)\, dt\, d\zeta$$

ce qui, dans les nouvelles variables $(\xi, \tau) := (\zeta - t, t)$, donne :

$$\mathcal{L}_d(g_1 * g_2)(z) = \iint_{\xi,\tau \in d} e^{-\xi/z} e^{-\tau/z} g_1(\xi) g_2(\tau)\, d\xi\, d\tau = \mathcal{L}_d g_1 \cdot \mathcal{L}_d g_2.$$

L'élément neutre pour la convolution doit être l'image par Borel de la fonction constante égale à 1 que nous n'avons pas définie : c'est la *masse de Dirac* que nous noterons formellement δ. La définir concrètement nécessite la construction suivante.

La transformée de Cauchy–Heine (que nous avons utilisée dans la démonstration du théorème 2 permet de voir, tout du moins sur un petit disque $\mathbf{D}_r = \{|z| < r\}$, une fonction $g(\zeta)$ intégrable en 0 comme la monodromie d'une fonction holomorphe $\tilde{g}$ définie sur le revêtement universel du disque épointé $\mathbf{D}_r^* := \mathbf{D}_r \setminus \{0\}$. On vérifie que la fonction $\tilde{g}$, qui (comme nous l'avons vu dans le 1.6.) n'est définie qu'à addition près d'une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, est intégrable en 0. En particulier, l'intégrale de Laplace incomplète se décompose en deux intégrales convergentes :

$$\int_0^{re^{id}} e^{-\zeta/z} g(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{re^{id}} e^{-\zeta/z} \tilde{g}(e^{2i\pi}\zeta)\, d\zeta - \int_0^{re^{id}} e^{-\zeta/z} \tilde{g}(\zeta)\, d\zeta$$

ce qui permet de redéfinir la transformée de Laplace incomplète directement sur la fonction multiforme $\tilde{g}$ par :

$$\int_0^{re^{id}} e^{-\zeta/z} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{re^{id}}} e^{-\zeta/z} \tilde{g}(\zeta)\, d\zeta$$

où $\gamma_{re^{id}}$ est un lacet arbitraire de $\mathbf{D}_r^*$ d'extrémité re^{id} tournant une fois autour de 0 dans le sens des aiguilles d'une montre. Le résultat de cette intégrale de Laplace incomplète ne change pas si l'on ajoute à $\tilde{g}$ une fonction holomorphe sur le disque $\mathbf{D}_r$. On appelle *hyperfonction* sur $\mathbf{D}_r^*$ la donnée d'une fonction $\tilde{g}$ multiforme sur $\mathbf{D}_r^*$ à addition près d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}_r$. Nous venons de définir la transformée de Laplace incomplète pour une hyperfonction quelconque non nécessairement intégrable en 0, *i. e.* ne provenant pas nécessairement de la transformée de Cauchy–Heine d'une fonction holomorphe.

Si la fonction g de départ se prolonge avec croissance au plus exponentielle d'ordre 1 dans la direction d, alors l'hyperfonction $\tilde{g}$ se prolonge aussi, en un sens qui nécessite quelques soins que nous tairons ici, et on peut définir sa transformée de Laplace (complète) dans la direction d.

De même, on peut redéfinir le produit de convolution par :

$$g_1 * g_2(\zeta) := \int_{\gamma_\zeta} \tilde{g}_1(\zeta - t) \tilde{g}_2(t)\, dt$$

où γ_ζ est un lacet d'extrémité ζ tournant une fois dans le sens des aiguilles d'une montre autour de 0.

Maintenant, nous pouvons étendre le domaine d'action de la transformée de Laplace et de la convolution à des hyperfonctions plus générales que les fonctions jusqu'alors utilisées. Notamment, tout comme la théorie classique des distributions de Schwartz permet de donner un sens à la masse de Dirac usuelle de la théorie de Fourier, on vérifie aisément, par la formule de Cauchy, que notre masse de Dirac δ n'est autre que l'hyperfonction (non intégrable en 0, donc ne provenant pas d'une fonction g par transformation de Cauchy–Heine) définie par $\tilde{g}(\zeta) = \frac{1}{2i\pi\zeta}$. Sa définition ne dépend visiblement pas de la direction d utilisée jusqu'ici.

Attention ! Une hyperfonction est définie à addition près d'une fonction holomorphe, c'est-à-dire uniforme et bornée (Riemann), alors qu'elle n'est déterminée par sa monodromie (différence entre deux déterminations successives autour de 0) qu'à addition près d'une fonction uniforme quelconque (avec éventuellement un point singulier essentiel à l'origine). C'est comme cela que l'hyperfonction $\tilde{g}(\zeta) = \frac{1}{2i\pi\zeta}$ n'est pas l'hyperfonction nulle bien qu'elle soit de monodromie nulle.

Pour ce que l'on a en vue, seule l'hyperfonction δ est importante, et un lecteur effrayé pourra se contenter de prendre cette hyperfonction comme un objet formel avec les règles de calcul qui suivent.

L'isomorphisme de Borel–Laplace du 2.5. s'étend en un *isomorphisme d'algèbres différentielles* mettant en correspondance :

le produit multiplicatif $f_1 \cdot f_2$, $\longleftrightarrow$ le produit convolutif $g_1 * g_2$,

l'élément neutre 1, $\longleftrightarrow$ l'élément neutre δ,

la dérivation $z^2\frac{\partial}{\partial z}$, $\longleftrightarrow$ la dérivation $\partial g = \zeta \cdot g$,

la multiplication par $\frac{1}{z}$, $\longleftrightarrow$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \zeta}$,

la fonction $\frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\longleftrightarrow$ l'hyperfonction $\delta^{(n+1)}$,

où $\delta^{(n+1)} := (\frac{\partial}{\partial \zeta})^n \delta$ est l'hyperfonction définie par $(\frac{\partial}{\partial \zeta})^n \frac{1}{2i\pi\zeta}$. Attention, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ n'est pas une dérivation vis-à-vis de la convolution.

3.3. Fonctions multiformes et singularités simples

Revenons maintenant au problème étudié dans l'introduction puis dans la section 1.8. Il s'agit d'étudier la divergence de l'unique série formelle inversible (au sens de la composition) $\hat{f} = z + 0z^2 + \cdots \in \mathbb{C}[[z]]$ satisfaisant l'équation de conjugaison :

$$\text{(C)} \qquad \psi = \hat{f}^{\circ(-1)} \circ \varphi \circ \hat{f}$$

où φ est la transformation homographique :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots$$

et ψ, l'une quelconque des transformations holomorphes locales inversibles :

$$\psi(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{n\geq 4} \psi_n z^n.$$

Il sera plus commode de travailler dans la variable $w := -\frac{1}{z}$ de sorte que l'équation fonctionnelle précédente devient l'équation d'Abel :

$$\text{(A)} \qquad \tilde{f} \circ \tilde{\psi} = \tilde{f} + 1$$

où, cette fois-ci, $\tilde{\psi}$ est définie au voisinage de $w = \infty$ de la forme :

$$\tilde{\psi}(w) = w + 1 + \varepsilon(w),$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{C}\{\frac{1}{w}\}$ s'annulant à l'ordre 2 au moins à l'infini. En posant $\tilde{f}(w) = w + F(w)$ et en substituant dans (A), il vient :

$$F(w) = F(w + 1 + \varepsilon(w)) + \varepsilon(w) \ ;$$

en remplaçant w par $w - 1$ et en retranchant $F(w)$ aux deux membres, il vient :

$$F(w-1) - F(w) = F(w + \delta(w)) - F(w) + \delta(w)$$

où $\delta(w) := \varepsilon(w-1) \in \mathbb{C}\{\frac{1}{w}\}$ s'annule encore à l'ordre 2, ce qui s'écrit :

$$D_{-1}F = D_\delta F + \delta$$

en introduisant les opérateurs aux différences :

$$D_{-1} : F(w) \mapsto F(w-1) - F(w)$$

et :

$$D_\delta : F(w) \mapsto F(w + \delta(w)) - F(w).$$

Nous avons vu dans la section 1.7. que l'on pouvait inverser formellement l'opérateur D_{-1} (ou plutôt $D_1 : F(w) \mapsto F(w+1) - F(w)$, ce qui revient au même) sur les séries s'annulant au moins à l'ordre 2, ce qui nous permet d'écrire :

$$\{I - (D_{-1})^{-1} D_\delta\} F = (D_{-1})^{-1} \delta$$

et par suite :

$$F = \sum_{n\geq 0} ((D_{-1})^{-1} D_\delta)^n (D_{-1})^{-1} \delta.$$

Cette manipulation formelle est justifiée par le fait que l'opérateur $(D_{-1})^{-1} D_\delta$ augmente de 2 l'ordre des séries de sorte que l'expression de F obtenue trouve bien son sens dans les séries formelles.
La formule de Taylor :

$$F(w + \delta) = \sum_{n\geq 0} \frac{\delta^n}{n!} F^{(n)}(w)$$

permet d'exprimer l'opérateur D_δ sous la forme d'opérateur différentiel infini :

$$D_\delta = \sum_{n\geq 1} \frac{\delta^n(w)}{n!} \left(\frac{d}{dw}\right)^n$$

plus adapté à transcrire dans le plan de Borel. En substituant dans l'expression de F, il vient :

$$F = \sum_{k\geq 0} \left((D_{-1})^{-1} \sum_{n\geq 1} \frac{\delta^n(w)}{n!} \left(\frac{d}{dw}\right)^n \right)^k (D_{-1})^{-1} \delta$$

c'est-à-dire :

$$F = \sum_{k\geq 0, n_1, \ldots, n_k \geq 1} D_{n_k} \cdots D_{n_1} (D_{-1})^{-1} \delta$$

avec :

$$D_n := (D_{-1})^{-1} \frac{\delta^n(w)}{n!} \left(\frac{d}{dw}\right)^n.$$

Nous allons maintenant traduire cette expression dans le plan de Borel. La série convergente δ est changée en une fonction entière à croissance exponentielle au plus d'ordre 1 que nous noterons $E := \mathcal{B}\delta$; dans la dérivation $-\frac{d}{dw} = z^2 \frac{d}{dz}$ nous reconnaissons l'opérateur multiplicatif $\partial : g(\zeta) \mapsto \zeta \cdot g(\zeta)$ et en gardant la notation D_n pour les mêmes opérateurs, vus dans la variable de Borel ζ, il vient :

$$G := \mathcal{B}F = \sum_{k\geq 0, n_1, \ldots, n_k \geq 1} D_{n_k} \cdots D_{n_1} \frac{E}{e^{-\zeta} - 1}$$

avec, pour toute série convergente $g \in \mathbb{C}\{\zeta\}$:

$$D_n g(\zeta) = \frac{1}{e^{-\zeta}-1}\int_0^\zeta E^{*n}(\zeta-\xi)\frac{(-\xi)^n}{n!}g(\xi)\,d\xi$$

où E^{*n} est la fonction entière définie par $E^{*n} := \mathcal{B}(\delta^n)$.

Le terme correspondant à $k=0$ dans l'expression sommatoire de G est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ admettant visiblement des pôles le long du réseau $\Omega = 2i\pi\mathbb{Z}^*$. Étudions les termes correspondant à $k=1$. L'intégrale $D_n g(\zeta)$ est bien définie dès que le chemin d'intégration évite les points du réseau Ω pour lesquels $g := \frac{E}{e^{-\zeta}-1}$ admet un pôle.

Définition 12 *On note $\Gamma(\Omega)$ l'ensemble des chemins $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ issus de l'origine évitant ensuite les points du réseau $\Omega = 2i\pi\mathbb{Z}$:*

$$\gamma(0)=0 \text{ et } \gamma(]0,1])\subset\mathbb{C}\setminus\Omega.$$

On dira qu'une série convergente $g\in\mathbb{C}\{z\}$ admet un prolongement multiforme en dehors de Ω si elle admet un prolongement analytique le long de tout chemin $\gamma\in\Gamma(\Omega)$ et on notera $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions multiformes sur $\mathbb{C}\setminus\Omega$. D'après le théorème de monodromie, la valeur de g prolongée le long de γ au point $\zeta=\gamma(1)$ ne dépend que de la façon dont le chemin $\gamma\in\Gamma(\Omega)$ a contourné les points de Ω pour parvenir à ζ.

Il est immédiat que chacun des termes de l'expression sommatoire de G est un élément de $\mathcal{O}(\Omega)$. Nous allons maintenant étudier leurs singularités aux points du réseau.

Notons, pour $r>0$ suffisamment petit, $\mathbf{D}_r$ le disque centré en $0\in\mathbb{C}$ et de rayon r et $\mathbf{D}_r^*$ le même disque épointé.

Définition 13 *On note $\partial\Gamma(\Omega)$ l'ensemble des chemins joignant l'origine à un point de Ω, évitant entre deux les points du réseau :*

$$\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=\omega\in\Omega \text{ et } \gamma(]0,1[)\subset\mathbb{C}\setminus\Omega.$$

Étant donnés $\gamma\in\partial\Gamma(\Omega)$ et $g\in\mathcal{O}(\Omega)$, on appelle singularité *de g au point $\omega=\gamma(1)$ la fonction multiforme sur $\mathbf{D}_r^*$ définie par :*

$$T_\gamma g(\zeta) := f(\gamma(1)+\zeta)$$

c'est-à-dire la fonction multiforme sur $\omega+\mathbf{D}_r^*$ obtenue par prolongement analytique le long de γ, que l'on a ramené par translation sur $\mathbf{D}_r^*$.

Enfin, on note $\underline{\Delta}_\gamma g(\zeta)$ la fonction :

$$\underline{\Delta}_\gamma g(\zeta) := T_\gamma g(e^{2i\pi}\cdot\zeta) - T_\gamma g(\zeta)$$

multiforme sur $\mathbf{D}_r^*$ obtenue comme différence de deux déterminations consécutives[45] *de $T_\gamma g$ autour de $\zeta=0$. Les fonctions $\underline{\Delta}_\gamma g$ vont mesurer le défaut d'uniformité de la fonction multiforme g.*

45. Le lecteur constatera que la fonction multiforme obtenue ne dépend pas des déterminations consécutives choisies pour $T_\gamma g$.

Remarque. On prendra bien garde que la singularité de g au point $\omega=\gamma(1)$, $\gamma\in\partial\Gamma(\Omega)$, ne dépend pas seulement de ω, mais aussi de la façon dont le chemin γ a contourné les points de Ω pour y parvenir. Notamment, les déterminations de g obtenues après avoir contourné les points de Ω ne sont en général plus holomorphes à l'origine.

Étudions les singularités de :

$$g(\zeta) := D_n\frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta}-1} = \frac{1}{e^{-\zeta}-1}\int_0^\zeta E^{*n}(\zeta-\xi)\frac{(-\xi)^n}{n!}\frac{E(\xi)}{e^{-\xi}-1}\,d\xi$$

Étant donné $\gamma\in\partial\Gamma(\Omega)$, la fonction multiforme $\Delta_\gamma g$ est en fait uniforme et holomorphe sur $\mathbf{D}_r^*$, donnée par le résidu en ω de la fonction :

$$\xi\mapsto\frac{1}{e^{-\zeta}-1}E^{*n}(\zeta-\xi)\frac{(-\xi)^n}{n!}\frac{E(\xi)}{e^{-\xi}-1},$$

ce qui nous donne :

$$\underline{\Delta}_\gamma g(\zeta) = 2i\pi\frac{E^{*n}(\zeta-\omega)}{e^{-\zeta}-1}\frac{(-\omega)^n}{n!}E(\omega),$$

cette fonction étant holomorphe sur $\mathbf{D}_r$. Il s'en suit que :

$$T_\gamma g(\zeta) = g_\gamma(\zeta)\frac{\ln\zeta}{2i\pi} + f_\gamma(\zeta)$$

où :

$$g_\gamma(\zeta) := 2i\pi\frac{E^{*n}(\zeta-\omega)}{e^{-\zeta}-1}\frac{(-\omega)^n}{n!}E(\omega)$$

est une fonction holomorphe sur le disque $\mathbf{D}_r$ et $f_\gamma(\zeta)$ est une fonction holomorphe sur le disque épointé $\mathbf{D}_r^*$. Puisque g_γ s'annule en 0, la fonction f_γ va être bornée en 0 dès que la fonction multiforme $D_n g(\zeta)$ est bornée sur un secteur pointé en ω d'ouverture $>2\pi$; ceci se vérifie facilement à l'aide de l'écriture intégrale de $D_n g(\zeta)$ et f_γ est par suite holomorphe sur tout le disque $\mathbf{D}_r$ d'après Riemann.

Définition 14 *Étant donnés $g\in\mathcal{O}(\Omega)$ et $\gamma\in\partial\Gamma(\Omega)$, on dit que la fonction g admet une singularité simple au point $\omega=\gamma(1)$ si :*

$$T_\gamma g(\zeta) = \frac{\alpha_\gamma}{2i\pi} + g_\gamma(\zeta)\frac{\ln\zeta}{2i\pi} + f_\gamma(\zeta)$$

où $\alpha_\gamma\in\mathbb{C}$ est un scalaire et f_γ, g_γ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{D}_r$.

On note $\mathcal{R}(\Omega)$ l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par la masse de Dirac[46] *δ précédemment définie et les fonctions $g\in\mathcal{O}(\Omega)$ n'admettant que des singularités simples.*

On introduit enfin la famille d'opérateurs linéaires Δ_γ, $\gamma\in\partial\Gamma(\Omega)$, définis par $\Delta_\gamma\delta=0$ et :

$$\Delta_\gamma g := \alpha_\gamma\cdot\delta + \underline{\Delta}_\gamma g = \alpha_\gamma\cdot\delta + g_\gamma.$$

Ces derniers vont mesurer non seulement le défaut d'uniformité de g mais aussi son défaut d'holomorphie.

46. L'introduction formelle de δ va être justifiée dans un instant.

Exercice. Montrer que l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ n'admettant que des singularités simples est déjà un espace vectoriel. Vérifier que les Δ_γ opèrent bien sur $\mathcal{R}(\Omega)$, c'est-à-dire que les singularités de la fonction $\Delta_\gamma g$ sont toutes simples, puis qu'ils sont bien linéaires. Montrer que la singularité d'une fonction multiforme $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ au point $\gamma(1)$, $\gamma \in \partial\Gamma(\Omega)$, est simple si et seulement si $\underline{\Delta}_\gamma g$ est holomorphe et au moins une détermination $\zeta \cdot T_\gamma g$ est bornée (à l'origine) sur un secteur d'ouverture $> 2\pi$.

D'après ce que nous venons de voir, les termes pour $k = 0$ et $k = 1$ de l'expression sommatoire de G appartiennent à la classe de fonctions $\mathcal{R}(\Omega)$.

Lemme 6 *Les D_n opèrent sur $\mathcal{R}(\Omega)$:*

$$g \in \mathcal{R}(\Omega) \Rightarrow D_n g \in \mathcal{R}(\Omega)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, chacun des termes $D_{n_k} \cdots D_{n_1} \frac{E}{e^{-\zeta}-1}$ de l'expression sommatoire de G est un élément de $\mathcal{R}(\Omega)$.

Preuve : En fait, ce lemme est une conséquence immédiate du prochain théorème et de l'écriture :

$$D_n g(\zeta) = \frac{1}{e^{-\zeta}-1}\Big(E^{*n} * \Big(\frac{\partial^n}{n!} g\Big)\Big).$$

À défaut de démontrer le théorème qui suit, esquissons une preuve directe. S'il est clair que $D_n g$ est un élément de $\mathcal{O}(\Omega)$, il nous faut étudier la nature de ses singularités. On vérifie sans peine que c'est la singularité de g au point $\gamma(1)$, $\gamma \in \partial\Gamma(\Omega)$, qui va déterminer celle de $D_n g$ en ce même point. Puisque la singularité de g y est simple, on étudie séparément les contributions respectives de sa partie polaire et de sa partie logarithmique. Pour la partie polaire, les calculs sont les mêmes que dans le cas $g(\zeta) = \frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta}-1}$. Pour la partie logarithmique, on peut par exemple choisir une primitive de $g_\gamma(\zeta)\frac{\ln\zeta}{2i\pi}$ de la forme $G(\zeta) \cdot \frac{\ln\zeta}{2i\pi} - \int \frac{G(\zeta)}{2i\pi\zeta} d\zeta$, où G est une primitive de g_γ, à partir de laquelle on vérifie sans peine que $\underline{\Delta}_\gamma D_n g$ est holomorphe et que $\zeta \cdot T_\gamma D_n g$ est bornée sur un secteur d'ouverture $> 2\pi$. □

3.4. L'algèbre des fonctions résurgentes

Théorème 7 (Écalle) *Le produit de convolution $*$ précédemment introduit est bien défini sur l'espace $\mathcal{R}(\Omega)$ et fait de $(\mathcal{R}(\Omega), *, +, \cdot, \partial, \delta)$ une algèbre différentielle unitaire.*

L'algèbre $\mathcal{R}(\Omega)$ est la plus simple des algèbres de *fonctions résurgentes*[47].

Idée de preuve : La première partie de la démonstration consiste à vérifier la stabilité de $\mathcal{O}(\Omega)$ pour la convolution. Pour cela, on doit savoir prolonger analytiquement la fonction $g_1 * g_2$, *a priori* holomorphe sur un voisinage de l'origine, partout en dehors des points de Ω. Plus précisément, étant donnés un point $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et un chemin $\gamma \in \Gamma(\Omega)$ joignant l'origine à ce point, $\gamma(1) = \zeta$, on doit trouver une famille :

$$[0,1] \to \Gamma(\Omega)\ ;\ r \mapsto \gamma_r$$

continue d'éléments de $\Gamma(\Omega)$ permettant de passer continûment d'un petit chemin radial γ_0, le long duquel la fonction $g_1 * g_2$ se définit sans problème, à un chemin γ_1 reliant

47. Elle est notée $\mathbb{A}_{\text{reg}}(1,\Omega)$ chez Écalle. Nous verrons plus loin pourquoi elles sont "résurgentes".

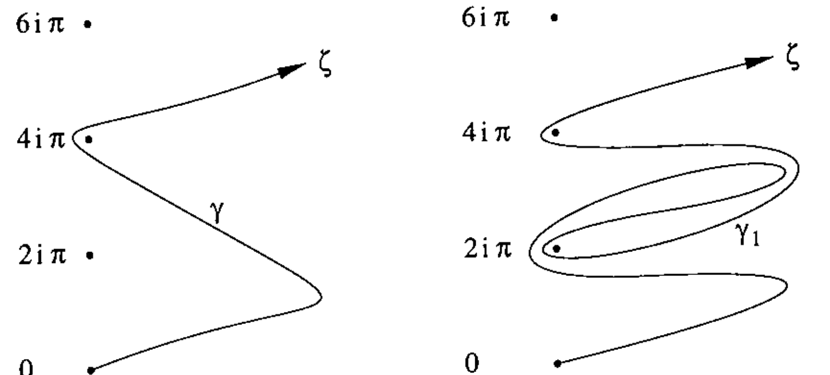
l'origine au point ζ en contournant les points de Ω de la même manière que γ. Si la convolée $g_1 * g_2(\gamma_r(1))$, définie par intégration le long de γ_r, est bien définie pour chaque $r \in [0,1]$, on saura prolonger $g_1 * g_2$ jusqu'au point[48] $\gamma(1)$. Or, la seule obstruction à définir $g_1 * g_2(\gamma_r(1))$ est lorsque le chemin :

$$t \mapsto \gamma_r(1) - \gamma_r(t)$$

passe par un point de Ω (autre que $\gamma_r(0) = 0$). On évite ceci en ne travaillant qu'avec des chemins $\gamma_r \in \Gamma(\Omega)$ qui sont symétriques par rapport à leur milieu, c'est-à-dire tels que :

$$\gamma_r(1-t) = \gamma_r(1) - \gamma_r(t)$$

pour tout $t \in [0,1]$. De tels chemins γ_r sont dit *symétriques* et les chemins du type γ_1, obtenus par déformation continue et symétrique d'un chemin radial, sont dit *symétriquement contractibles*. Il reste à se convaincre que pour tout point $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et tout chemin $\gamma \in \Gamma(\Omega)$ joignant l'origine à ce point, on peut trouver un chemin γ_1 symétriquement contractible permettant d'atteindre le point ζ en contournant les singularités de la même manière que γ, ce qui revient à montrer que l'ensemble des points $\gamma_1(1)$ atteints par les chemins symétriquement contractibles est localement ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$. C'est un exercice facile.



symétrique symétriquement contractible

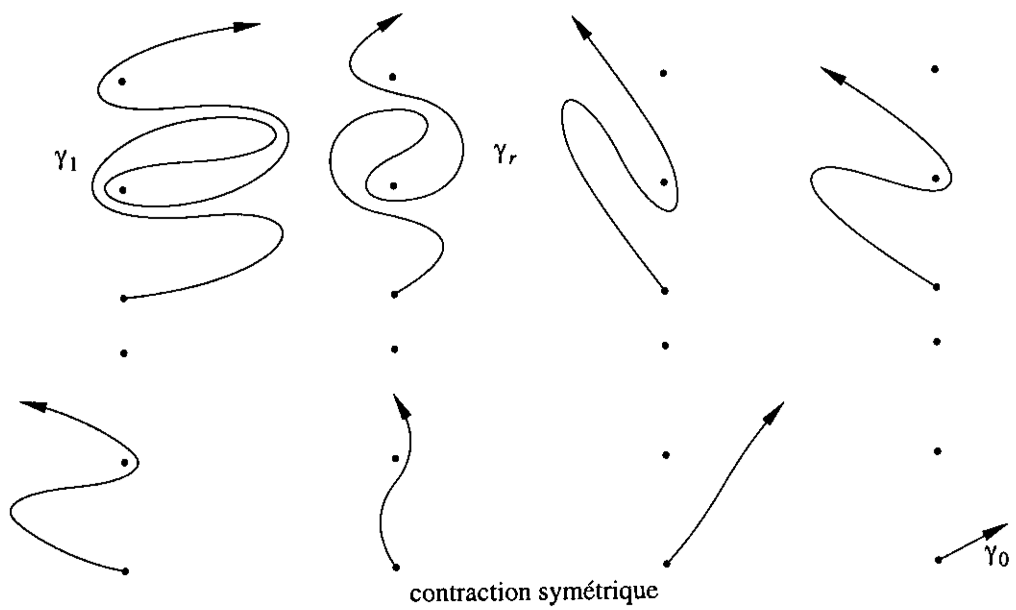
La deuxième partie de la démonstration consiste à vérifier que les singularités de $g_1 * g_2$ sont toutes simples dès que $g_1, g_2 \in \mathcal{R}(\Omega)$. L'illustration précédente suggère bien que la singularité de $g_1 * g_2$ au point $\omega = \gamma(1)$, $\gamma \in \partial\Gamma(\Omega)$, peut faire intervenir d'autres singularités que celles de g_1 et g_2 en ce même point ; en effet, si $\frac{\omega}{2} \in \Omega$, alors tout chemin symétriquement contractible dont l'extrémité approche $\gamma(1)$ va aussi s'approcher de $\frac{\omega}{2}$. C'est la partie pénible de la preuve ; nous ne l'abordons pas. □

Si l'on revient à notre problème d'expliciter :

$$G := \mathcal{B}F = \sum_{k \geq 0, n_1, \ldots, n_k \geq 1} D_{n_k} \cdots D_{n_1} \frac{E}{e^{-\zeta}-1},$$

il faut pouvoir donner un sens au fait qu'une somme infinie de fonctions résurgentes converge.

48. Le prolongement se fera non pas le long de γ, mais le long du chemin γ_0 suivi de $r \mapsto \gamma_r(1)$ qui contourne les points de Ω de la même manière que γ.



D'un point de vue géométrique, les fonctions multiformes sur $\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ sont les fonctions définies holomorphes sur le revêtement universel et celles qui nous intéressent pour la suite sont celles dont une détermination privilégiée est uniforme et holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$. Le revêtement universel $\Pi \colon \mathbb{H} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ peut être vu comme le relèvement de la fonctionnelle de Picard $P \colon \mathbb{H} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ par l'application exponentielle $\exp \colon \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$; de cette manière, la classe de fonctions qui nous intéresse est décrite par les fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ qui sont laissées invariantes par un certain élément parabolique et s'identifie ainsi à l'espace des fonctions holomorphes sur le disque $\mathbf{D}$. La notion de convergence uniforme sur tout compact ne pose pas de problème dans ce contexte. Nous travaillerons plutôt avec le point de vue analytique et équivalent suivant :

Définition 15 *Notons $\Gamma_{r,S}(\Omega)$ l'ensemble des chemin rectifiables de longueur $S > 0$ issus de $\zeta = 0$ qui, après un temps $r > 0$ petit, sont et restent éloignés d'une distance r du réseau Ω :*

$$\Gamma_{r,S}(\Omega) = \{\gamma \in \Gamma(\Omega) \mid |\gamma'(s)| \equiv 1 \text{ et } \forall s \in [r, S],\ \mathrm{dist}(\gamma(s), 2i\pi\mathbb{Z}) \geq r\}.$$

On note, pour chaque $\Gamma_{r,S}(\Omega)$, la semi-norme définie sur $\mathcal{R}(\Omega)$ par :

$$\|g\|_{\Gamma_{r,S}(\Omega)} := \sup\{|g(\gamma(1))| \mid \gamma \in \Gamma_{r,S}(\Omega)\}$$

On dira qu'une famille de fonctions résurgentes $g_n \in \mathcal{R}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur tout compact *vers une fonction $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ si :*

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{\Gamma_{r,S}(\Omega)} = 0$$

pour chaque $\Gamma_{r,S}(\Omega)$.

L'ensemble des points parcourus par les chemins de $\Gamma_{r,S}(\Omega)$ dans le revêtement universel $\mathbf{D}$ est un compact et la réunion de ces compacts remplit le disque.

Proposition 7 *Si une suite de fonctions résurgentes est de Cauchy pour chaque semi-norme $\|\cdot\|_{\Gamma_{r,S}(\Omega)}$, alors elle converge uniformément sur tout compact vers une fonction résurgente : l'algèbre des fonctions résurgentes $\mathcal{R}(\Omega)$ est complète pour la topologique précédente.*

Preuve : C'est un exercice dont nous laissons les détails au lecteur. On montre d'abord que la suite de fonctions converge dans $\mathcal{O}(\Omega)$ (pour cette même topologie), puis que le fait d'avoir une singularité simple en un point donné est une propriété fermée. Pour cela, remarquons qu'une suite de fonctions g_n holomorphes sur le disque $\mathbf{D}$ qui est de Cauchy sur l'anneau $\mathbf{D} \setminus \mathbf{D}_r$ converge en fait uniformément sur tout le disque $\mathbf{D}$ vers une fonction holomorphe. En appliquant ceci aux $\underline{\Delta}_\gamma g_n$, $n \in \mathbb{N}$, on déduit d'ores et déjà que $\underline{\Delta}_\gamma g$ est holomorphe en 0. Mais $T_\gamma g_n - \underline{\Delta}_\gamma g_n \frac{\ln\zeta}{2i\pi}$ est aussi de Cauchy et on peut réappliquer le même argument, version méromorphe à pôle simple. □

Lemme 7 *La somme :*

$$G = \sum_{k\geq 0, n_1, \ldots, n_k \geq 1} D_{n_k} \cdots D_{n_1} \frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}$$

converge uniformément sur tout compact vers un élément de $\mathcal{R}(\Omega)$.

Preuve : Commençons par quelques majorations. Par hypothèse, on a :

$$|E(\zeta)| \leq C|\zeta|e^{M|\zeta|}$$

d'où on déduit facilement à partir de la définition de la convolution que :

$$|E^{*n}(\zeta)| \leq C^n e^{M|\zeta|} \frac{|\zeta|^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Tant que l'on reste à une distance $r > 0$ des points du réseau Ω autres que l'origine, on a, pour une constante $C' > 0$:

$$\left|\frac{1}{e^{-\zeta} - 1}\right| \leq \frac{C'}{|\zeta|} \quad \text{pour } \zeta \notin (\mathbf{D}_r + 2i\pi\mathbb{Z}^*).$$

Il s'agit maintenant de majorer en module l'expression :

$$D_{n_k} \cdots D_{n_1} \frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} = \int_{0<s_1<\cdots<s_k<S} \frac{E^{*n_k}(\zeta - \zeta_k)}{(e^{-\zeta} - 1)} \frac{(-\zeta_k)^{n_k}}{n_k!} \cdots$$
$$\cdots \frac{E^{*n_1}(\zeta_2 - \zeta_1)}{(e^{-\zeta_2} - 1)} \frac{(-\zeta_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{E(\zeta_1)}{(e^{-\zeta_1} - 1)} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_k$$

où $\zeta_l := \gamma(s_l)$, $l = 1, \ldots, k$, et $\gamma(s)$ désigne un chemin de $\Gamma_{r,S}$ paramétré par son abscisse curviligne s : $|\gamma'(s)| \equiv 1$.
Compte tenu de la convexité de l'exponentielle réelle, on a :

$$e^{M|\zeta-\zeta_k|} \cdots e^{M|\zeta_2-\zeta_1|} e^{M|\zeta_1|} \leq e^{M(S-s_k)} \cdots e^{M(s_2-s_1)} e^{Ms_1} \leq e^{MS}$$

et par suite :

$$\left|D_{n_k}\cdots D_{n_1}\frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta}-1}\right|$$

$$\leq C^{n+1}(C')^{k+1}e^{MS}\int_{0<s_1<\cdots<s_k<S}\frac{(S-s_k)^{2n_k-1}}{(2n_k-1)!S}\frac{(s_k)^{n_k}}{n_k!}\cdots$$

$$\cdots\frac{(s_2-s_1)^{2n_1-1}}{(2n_1-1)!s_2}\frac{(s_1)^{n_1}}{n_1!}ds_1\wedge\cdots\wedge ds_k$$

ce qui, en majorant brutalement $\frac{(s_i)^{n_i}}{n_i!}\leq S^{n_i}$, $i=1,\ldots,k$, nous donne :

$$\left|D_{n_k}\cdots D_{n_1}\frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta}-1}\right|\leq (CS)^{n+1}\left(\frac{C'}{S}\right)^{k+1}e^{MS}\int_{0<s_1<\cdots<s_k<S}\frac{(S-s_k)^{2n_k-1}}{(2n_k-1)!}\cdots$$

$$\cdots\frac{(s_2-s_1)^{2n_1-1}}{(2n_1-1)!}ds_1\wedge\cdots\wedge ds_k.$$

Maintenant, en remarquant que :

$$\int_{0<s_1<\cdots<s_k<S}\frac{(S-s_k)^{2n_k-1}}{(2n_k-1)!}\cdots\frac{(s_2-s_1)^{2n_1-1}}{(2n_1-1)!}ds_1\wedge\ldots\wedge ds_k$$

$$=\left[\frac{\zeta^{2n_k-1}}{(2n_k-1)!}*\cdots*\frac{\zeta^{2n_1-1}}{(2n_1-1)!}*\zeta^0\right]_{\zeta:=S}$$

$$=[\mathcal{B}(z^{2n_k}\ldots z^{2n_1}z)]_{\zeta:=S}=[\mathcal{B}(z^{2n+1})]_{\zeta:=S}=\left[\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}\right]_{\zeta:=S}=\frac{S^{2n}}{(2n)!}$$

où l'on a posé $n:=n_1+\cdots+n_k$, on obtient finalement :

$$\left|D_{n_k}\cdots D_{n_1}\frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta}-1}\right|\leq (CS)^{n+1}\left(\frac{C'}{S}\right)^{k+1}e^{MS}\frac{S^{2n}}{(2n)!}.$$

Maintenant, puisqu'il y a $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$ manières d'écrire n comme somme de k entiers ≥ 1, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0,n_1,\ldots,n_k\geq 1}\left|D_{n_k}\cdots D_{n_1}\frac{E(\zeta)}{e^{-\zeta}-1}\right| &\leq \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\left(\frac{C'}{S}\right)^{k+1}\right](CS)^{n+1}\frac{S^{2n}}{(2n)!}e^{MS}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\left(1+\frac{C'}{S}\right)^{n-1}\left(\frac{C'}{S}\right)^{2}\right](CS)^{n+1}\frac{S^{2n}}{(2n)!}e^{MS}\\ &= \frac{C(C')^2e^{MS}}{(C'+S)}\sum_{n\geq 0}\frac{[C(C'+S)S^2]^n}{(2n)!}\\ &\leq \frac{C(C')^2}{(C'+S)}e^{CS^3+CC'S^2+MS}\end{aligned}$$

ce qui nous assure la convergence de G dans $\mathcal{O}(\Omega)$ et par suite dans $\mathcal{R}(\Omega)$. □

Remarque. Nous avons vu dans la section 1.7., que la série formelle $\hat{F}$, dont G est la transformée de Borel, était 1-sommable dans toutes les directions sauf les deux demi-axes imaginaires. Par ailleurs, le 2.6. permet d'en déduire immédiatement que la série convergente $G:=\mathcal{B}\hat{F}$ se prolonge analytiquement sur les demi-plans à gauche et à droite de l'axe imaginaire, avec croissance au plus exponentielle d'ordre 1 dans chaque sous-secteur. L'étude directe que nous venons de mener à partir de l'équation aux différences déduite de (A) sur le plan de Borel nous a permis de préciser le prolongement analytique de G. Si les majorations grossières de la preuve du lemme précédent nous donne une croissance exponentielle d'ordre 3, on peut refaire les calculs de façon plus fine en supposant que le chemin d'intégration γ s'échappe définitivement de l'axe imaginaire après un certain temps pour tendre vers l'infini sur le demi-plan à gauche ou à droite et redémontrer ainsi que la croissance est au plus exponentielle d'ordre 1. Ceci est bien plus fort que cela puisque toute détermination de G à droite ou à gauche est à "croissance modérée".

3.5. Opérateurs de monodromie et dérivations étrangères

Ce que l'on a gagné par rapport à la 1-sommabilité, en démontrant le caractère résurgent de G dans le lemme précédent, c'est que la divergence de la série $\hat{F}=\mathcal{L}G$ s'interprète maintenant comme le défaut d'holomorphie de G aux points du réseau. De cette manière, on voit apparaître une hiérarchie naturelle dans le degré de divergence respectif des séries 1-sommables obtenues comme solutions respectives de l'équation (E) d'Euler, de l'équation (D) aux différences puis de l'équation (A) d'Abel selon que leur transformée de Borel est uniforme avec un pôle simple, avec un réseau de pôles simples ou multiforme en dehors du réseau avec singularités simples. Les opérateurs de monodromie Δ_γ, $\gamma\in\partial\Gamma(\Omega)$, permettent de mesurer leur défaut d'holomorphie. En effet, si $\Delta_\gamma G\equiv 0$ pour chacun de ces opérateurs, alors G est entière et il ressort de la discussion précédente sur la croissance à l'infini qu'elle est au pire exponentielle d'ordre 1, ce qui signifie que $\hat{F}$ est convergente. En fait, il suffit de bien moins d'opérateurs que tous ceux-là pour décider si une fonction $g\in\mathcal{R}(\Omega)$ est entière ou non. Par exemple, on peut se contenter de la famille de chemins γ_n^+ définie comme suit. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, le chemin γ_n^+ va directement de l'origine au point $\omega=2i\pi n$ en contournant les singularités intermédiaires "par la droite", c'est-à-dire dans le sens trigonométrique. Le lecteur se convaincra aisément que la nullité des $\Delta_{\gamma_n^+}G$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ suffit à impliquer que G est entière. L'idée qui suit est de privilégier une base d'opérateurs dont le comportement est le plus simple vis-à-vis du calcul, c'est-à-dire, en fait, de la convolution (concernant les deux autres opérations, tous ces opérateurs étant déjà linéaires).

Lemme 8 *Pour tous*[49] $g_1,g_2\in\mathcal{R}(\Omega)$ *et tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\Delta_{\gamma_n^+}(g_1*g_2)=\sum_{p=0}^{n}\Delta_{\gamma_p^+}(g_1)*g_2+g_1\Delta_{\gamma_{n-p}^+}(g_2)$$

et :

$$\Delta_{\gamma_{-n}^+}(g_1*g_2)=\sum_{p=0}^{n}\Delta_{\gamma_{-p}^+}(g_1)*g_2+g_1\Delta_{\gamma_{p-n}^+}(g_2).$$

49. En fait, cette propriété reste vraie pour les éléments de $\mathcal{O}(\Omega)$ à condition de définir plus proprement les opérateurs Δ_γ. En effet, dans ce cas, $\Delta_\gamma g$ est multiforme à l'origine et il importe de convenir d'une détermination avant de la convoler avec une autre fonction multiforme. Nous avons tu cette difficulté technique en ne considérant que des éléments de $\mathcal{R}(\Omega)$ (pour lesquels $\Delta_\gamma g$ est uniforme à l'origine).

La démonstration est assez pénible. Elle fait de nouveau intervenir, mais avec plus de soin, les chemins symétriquement contractibles. La démarche formelle qui suit va nous conduire à une autre famille d'opérateurs dont les règles de calcul sont encore plus simples.

Introduisons les opérateurs formels définis par les "séries génératrices" :

$$\sigma_x^+ := I + \sum_{n>0} x^n \Delta_{\gamma_n^+} \quad \text{et} \quad \sigma_x^- := I + \sum_{n>0} x^n \Delta_{\gamma_{-n}^+}$$

où x est une variable libre et I désigne l'opérateur identité. Avec l'aide des règles de calcul précédentes, on montre que les opérateurs formels précédents sont des automorphismes d'algèbre, c'est-à-dire satisfont :

$$\sigma_x^\pm(g_1 * g_2) = (\sigma_x^\pm g_1) * (\sigma_x^\pm g_2)$$

pour tous $g_1, g_2 \in \mathcal{R}(\Omega)$. Le générateur infinitésimal de cet automorphisme, donné par le logarithme[50] :

$$\chi_x^+(g_1 * g_2) := \ln \sigma_x^+ =: \sum_{n>0} x^n \Delta_n \quad \text{et} \quad \chi_x^-(g_1 * g_2) := \ln \sigma_x^- =: \sum_{n>0} x^n \Delta_{-n}$$

permet de définir la famille d'opérateurs Δ_n, $n \in \mathbb{Z}^*$.

Les opérateurs Δ_n, que l'on notera plutôt Δ_ω, $\omega = 2i\pi n$ s'expriment comme des polynômes (non commutatifs) en les opérateurs $\Delta_{\gamma_n^+}$ ce qui permet, en les développant en fonction des opérateurs de prolongement T_γ puis en les refactorisant en opérateurs de monodromie Δ_γ de les redéfinir directement comme suit.

Définition 16 *Pour chaque $\omega = 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, on note Δ_ω l'opérateur :*

$$\Delta_\omega := \sum_\gamma \frac{p_\gamma! q_\gamma!}{n!} \Delta_\gamma$$

où la somme finie est prise sur toutes les façons γ d'aller directement de l'origine jusqu'à ω en contournant les $n-1$ singularités intermédiaires ou bien par la droite, ou bien par la gauche, et où p_γ (respectivement q_γ) désigne le nombre de singularités intermédiaires contournées à droite (respectivement à gauche) par γ. Il y a exactement 2^{n-1} tels chemins γ et on a bien sûr $p_\gamma + q_\gamma = n - 1$ et $\sum_\gamma \frac{p_\gamma! q_\gamma!}{n!} = \frac{1}{n}$.

La propriété essentielle de la famille d'opérateurs Δ_ω qui se déduit heuristiquement de la construction formelle précédente ou qui se montre directement à partir de la définition précédente est que :

Proposition 8 *Les opérateurs Δ_ω, $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$, sont des dérivations vis-à-vis de la convolution :*

$$\Delta_\omega(g_1 * g_2) = (\Delta_\omega g_1) * g_2 + g_1 * (\Delta_\omega g_2)$$

pour tous $g_1, g_2 \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Si l'on note $\mathbb{C}[[z,\Omega]]_1$ l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{R}(\Omega))$ des séries Gevrey d'ordre 1 dont la transformée de Borel se prolonge en une fonction résurgente, alors les opérateurs Δ_ω agissent via Borel–Laplace sur cet espace comme des dérivations usuelles :

$$\Delta_\omega(f_1 \cdot f_2) = (\Delta_\omega f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot (\Delta_\omega f_2)$$

50. Défini par $\ln(I + X) = -\sum_{n>0} \frac{(-1)^n X^n}{n!}$.

pour tous $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[[z,\Omega]]_1$. On les appelle les *dérivations étrangères* en opposition à la *dérivation naturelle* $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$. Elles n'agissent pas sur $\mathbb{C}[[z]]_1$ tout entier, et encore moins sur $\mathbb{C}[[z]]$; en particulier, elles ne s'expriment pas en fonction de la dérivation naturelle ∂. Par ailleurs, elles voient les séries convergentes $\mathbb{C}\{z\}$ comme des constantes puisqu'elles les annulent ; le lecteur se convaincra aisément qu'elles annulent exactement les séries Gevrey d'ordre 1 dont la transformée de Borel est entière, ce qui ne suffit pas à dire que la série de départ converge sans information sur la croissance.

On montre que les dérivations étrangères sont libres de toute relation polynomiale et même faisant intervenir des crochets de Lie : elles forment la base d'une algèbre de Lie libre. Avec la dérivation naturelle, elles n'observent que la relation $[\partial, \Delta_\omega] = \omega \cdot \Delta_\omega$ et celles qui s'en déduisent telles que $\Delta_\omega \partial^n = (\partial - \omega)^n \Delta_\omega$. Pour démontrer cette indépendance, on remarque que tous ces opérateurs sont engendrés, sur le plan de Borel, par trois opérateurs T_0, T_1 et T_{-1}, dont le relèvement au revêtement universel $\mathbb{H}$ de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est le groupe fuchsien de Picard (groupe de symétries du triangle hyperbolique de sommets 0, 1 et ∞) qui est bien connu des géomètres pour ne posséder que la relation $T_0 T_1 T_{-1} = I$; l'indépendance des dérivations étrangères est une traduction du fait que le groupe de Picard est un groupe libre à deux générateurs.

3.6. Calcul étranger et équations de résurgence

Nous nous devons de développer quelque peu la traduction des règles de calcul classique dans le plan de Borel telles que l'exponentiation et la composition afin d'étudier le comportement des dérivations étrangères vis-à-vis de ces lois, et par suite vis-à-vis des solutions d'équations différentielles et fonctionnelles.

L'application exponentielle est définie dans la variable z par :

$$\exp : f(z) \mapsto 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}(f(z))^n,$$

elle se traduit sur le plan de Borel par :

Proposition 9 *On note $\exp_*$ l'application exponentielle pour la convolution définie par :*

$$\exp_* : g \mapsto \delta + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} g^{*n}.$$

Cette application est bien définie et continue sur $\mathcal{R}(\Omega)$ pour la topologie de convergence uniforme sur tout compact précédemment définie.

Comme nous l'avons déjà utilisé, si, dans la variable[51] $w := -\frac{1}{z}$, la transformation $\psi(w)$ est tangente à l'identité, c'est-à-dire de la forme $\psi(w) = w + \varepsilon(w)$, $\varepsilon \in \mathbb{C}\{\frac{1}{w}\}$, alors la composition à droite d'un élément $f \in \mathbb{C}\{\frac{1}{w}\}$ par ψ est donné par :

$$(\cdot \circ \psi) : f \mapsto f \circ \psi := f + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^n f$$

d'après la formule de Taylor. Rappelons que les transformations ψ de ce type forment un groupe pour la composition ; par ailleurs, la variable $w = -\frac{1}{z}$ correspond sur le plan de Borel à l'hyperfonction $\delta' = \frac{\partial}{\partial \zeta}\delta$ définie par $-\frac{1}{2i\pi\zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{2i\pi\zeta}$.

51. Pour l'application que l'on a en vue, les calculs seront plus simples dans la variable w.

Proposition 10 *L'espace $\mathcal{G}(\Omega) := \delta' + \mathcal{R}(\Omega)$ des hyperfonctions obtenues comme somme de la dérivée δ' du Dirac δ et d'une fonction résurgente agit sur l'espace des fonctions résurgentes $\mathcal{R}(\Omega)$ par composition à droite pour la convolution :*

$$\mathcal{R}(\Omega) \times \mathcal{G}(\Omega) \to \mathcal{R}(\Omega) \; ; \; (g, \psi) \mapsto g \circ_* \psi := g + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (\psi - \delta')^{*n} * (\partial^n g).$$

Cette flèche est continue en g mais pas en ψ. L'espace $\mathcal{G}(\Omega)$ muni de cette loi est un groupe topologique dont l'élément neutre est δ'.

Exemple. Les éléments $\psi := \delta' + \alpha\delta$ de $\mathcal{G}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, agissent comme suit :

$$g \circ_* \psi = e^{\alpha\zeta} \psi \; ;$$

l'ensemble de ces éléments forme un sous-groupe de $\mathcal{G}(\Omega)$ qui correspond dans la variable w au groupe des translations $w \mapsto w + \alpha$.
En jouant avec la définition des Δ_ω et des règles de calcul qui précèdent, on établit le :

Lemme 9 *Le comportement de la dérivation étrangère Δ_ω, $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$, vis-à-vis de la composition est donné, dans le plan convolutif, par :*

$$\Delta_\omega(g \circ_* \psi) = ((\partial g) \circ_* \psi) * (\Delta_\omega \psi) + [\exp_*(-\omega \cdot (\psi - \delta'))] * [(\Delta_\omega g) \circ_* \psi]$$

c'est-à-dire, dans la variable $w = -\frac{1}{z}$, par :

$$\Delta_\omega(f \circ \psi) = -\left(\frac{\partial f}{\partial w} \circ \psi\right) \Delta_\omega \psi + e^{-\omega\varepsilon(w)} \Delta_\omega f \circ \psi$$

où ψ désigne non plus un élément de $\mathcal{G}(\Omega)$ mais une transformation de la forme $\psi(w) = w + \varepsilon(w)$, $\varepsilon(-\frac{1}{w}) \in \mathbb{C}[[z, \Omega]]_1$.

Nous allons appliquer ces règles de "calcul étranger" aux solutions de l'équation d'Abel :

$$\text{(A)} \qquad f \circ \psi = f + 1$$

où $\psi(w) = w + \varepsilon(w)$ est holomorphe à l'infini, c'est-à-dire $\varepsilon \in \mathbb{C}\{\frac{1}{w}\}$, tangente à la translation $w \mapsto w + 1$ ($\varepsilon = 1 + o(\frac{1}{w})$), et f est l'unique série formelle du type $w + O(\frac{1}{w})$ dont nous savons maintenant que sa transformée de Borel est une fonction résurgente. L'application directe de la dérivée étrangère Δ_ω nous donne :

$$e^{-\omega\varepsilon(w)} \Delta_\omega f \circ \psi = \Delta_\omega f.$$

Par ailleurs, en réécrivant l'équation d'Abel sous la forme :

$$\varepsilon(w) + (f - I) \circ \psi = (f - I) + 1$$

où I est la transformation identité $I(w) = w$, puis en quotientant la première égalité par l'exponentielle :

$$e^{-\omega\varepsilon(w)} e^{-\omega(f-I)\circ\psi} = e^{-\omega(f-I)}$$

de la seconde, on déduit que la série formelle $\frac{\Delta_\omega f}{e^{-\omega(f-I)}}$ est invariante par composition à droite par ψ.

D'après la section 1.7., ceci n'est possible que si cette série est constante, ce qui nous donne l'*équation de résurgence*[52] :

$$\Delta_\omega F = A_\omega e^{-\omega F}$$

où l'on a posé, comme avant, $f = I + F$, et où $A_\omega \in \mathbb{C}$ est un scalaire.
Les dérivations étrangères Δ_ω font donc "ressurgir" la fonction F exponentiée ce qui justifie après coup la terminologie de "fonctions résurgentes". Ceci montre que les fonctions multiformes obtenues comme transformées de Borel de solutions d'équations naturelles (à chaque équation différentielle ou fonctionnelle est associée une famille d'équations de résurgence) possèdent des symétries remarquables puisqu'on les retrouve à peine modifiées (ici, exponentiées) par une combinaison linéaire de prolongements analytiques vers les points du réseau Ω. Par ailleurs, on déduit immédiatement de ces équations de résurgence que la solution f est convergente, c'est-à-dire G est entière, si et seulement si chacun des coefficients A_ω paramétré par $\Omega \setminus \{0\}$ est nul. Une analyse bien plus élaborée que celle que nous avons faite ici permet de montrer le :

Théorème 8 (Écalle) *Étant donnée une transformation analytique complexe :*

$$\psi(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots$$

au voisinage de l'origine, la série de scalaires A_ω associée, via les équations de résurgence, à la solution formelle de l'équation d'Abel correspondante satisfait la condition de croissance :

$$(*) \qquad \exists M > 0, \; \forall n \in \mathbb{Z}^*, \; \left|\frac{A_{2i\pi n}}{n}\right|^{1/|n|} < M.$$

Réciproquement, étant donnée une suite de scalaires A_ω indexée par $\Omega \setminus \{0\}$ satisfaisant $(*)$, il existe une transformation analytique complexe $\psi(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots$ au voisinage de l'origine qui les réalise comme coefficients de résurgence.
Deux transformations analytiques ψ et ψ' du type précédent, de coefficients de résurgence A_ω et A'_ω respectivement, sont conjuguées par une transformation analytique complexe inversible au voisinage de l'origine si et seulement si :

$$A_\omega = A'_\omega \text{ pour tout } \omega \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Enfin, l'énoncé précédent reste vrai en remplaçant "analytique complexe" par "analytique réel" et en rajoutant à la condition $(*)$ la condition supplémentaire

$$(**) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \; A_\omega = A_{-\omega}.$$

En approfondissant à peine l'étude menée dans la section 1.7., on démontre un théorème analogue où les classifiants A_ω sont remplacés par la paire $(g_i, g_{-i}) \in (\mathbb{C}\{z\})^2$ de la question 8 du problème ; les coefficients des $g_{\pm i}$ s'expriment d'ailleurs très simplement en fonction des A_ω et vice-versa. Aussi, ce théorème ne parvient pas à justifier la mise en place d'une telle théorie des fonctions résurgentes. Cependant, il existe des problèmes géométriques très simples qui donnent naissance à des fonctions résurgentes plus générales dont le réseau des singularités est bi-dimensionnel du type $\Omega := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$, pour lesquelles la théorie précédente s'applique sans modification mais la

52. Appelée aussi *équation du pont* parce qu'elle établit un pont entre calcul différentiel ordinaire et calcul différentiel étranger.

théorie de la k-sommabilité (ou même multisommabilité) devient inopérante. De plus, nous avons caché toute la partie de la théorie d'Écalle sur les *moules* et *pseudo-variables* qui permettent des calculs effectifs d'une part d'invariants et d'autre part de fonctions résurgentes les réalisant dont voici une application.

Proposition 11 *Avec les notations précédentes, la fonction* $f(w) := w + F(w)$ *définie par :*

$$F(w) := \frac{1}{2i\pi n} \ln\left[1 + 2i\pi n a e^{-2i\pi n w} \int_{\infty}^{w} \frac{e^{2i\pi n t}}{t}\, dt\right]$$

où $n \in \mathbb{Z}^*$ *et* $a \in \mathbb{C}$, *permet de reconstruire, via l'équation d'Abel, une transformation analytique complexe* $\psi(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots$ *qui réalise les invariants :*

$$A_\omega = 0 \text{ pour tout } \omega \in \Omega \setminus \{0, 2i\pi n\} \qquad \text{et} \qquad A_{2i\pi n} = a.$$

Bibliographie

[1] W. BALSER, « From divergent power series to analytic functions », *Lecture Notes*, **1582**, Springer-Verlag, 1994.

[2] B. CANDELPERGHER, « Une introduction à la résurgence », *Gazette des mathématiciens*, **42**, p. 36–64, 1989.

[3] B. CANDELPERGHER, J.C. NOSMAS, F. PHAM, *Approche de la résurgence*, Hermann, Paris, 1993.

[4] A. DUVAL, Cours de DEA à Lille, 1996.

[5] J. ÉCALLE, *Les fonctions résurgentes*, tome I : « Les algèbres de fonctions résurgentes », Publications Mathématiques d'Orsay, 1981. *Les fonctions résurgentes*, tome II : « Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération », Publications Mathématiques d'Orsay, 1981. *Les fonctions résurgentes*, tome III : « L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux », Publications Mathématiques d'Orsay, 1985.

[6] M. LODAY-RICHAUD, « Introduction à la multisommabilité », *Gazette des mathématiciens*, **44**, p. 41–63, 1990. « Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires méromorphes et sommation », *Expositiones Mathematicæ*, **13**, p. 116–162, 1995.

[7] B. MALGRANGE, « Introduction aux travaux de J. Écalle », *L'enseignement mathématique*, **31**, p. 261–282, 1985. « Sommation des séries divergentes », *Expositiones Mathematicæ*, **13**, p. 163–222, 1995.

[8] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Théorie de Galois différentielle et resommation*, C.A.A.D.E. Tournier, Academic Press, p. 117–214, 1989.

[9] J.-P. RAMIS, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Mémoires de la S.M.F.

[10] L. STOLOWITCH, *Divergent series and holomorphic dynamical systems*, Cours donné par J.-P. Ramis au colloque "Bifurcations and periodic orbits of vector fields" à l'Université de Montréal en juillet 1992, 1993.

[11] J.-C. TOUGERON, *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel–Laplace transform with some applications*, Cours de DEA à Toronto, 1989.