
FEUILLETAGES HOLOMORPHES SINGULIERS

par

Frank Loray

Résumé. — Ce texte a pour but de compléter le cours donné à Fès en Septembre 2012.

1. Variétés

1.1. Définitions, exemples. —

Définition 1. — [Variétés] Une **variété** réelle C^∞ et de dimension n est la donnée d'un espace topologique séparé M muni d'un **atlas** C^∞ , c'est à dire d'un recouvrement de M par des ouverts U_i

$$M = \cup_{i \in I} U_i$$

et pour chaque ouvert d'un homéomorphisme sur un ouvert de \mathbb{R}^n

$$f_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$$

satisfaisant, pour toute intersection non vide $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$f_i(p) = \phi_{i,j} \circ f_j(p), \quad \forall p \in U_i \cap U_j$$

où l'homéomorphisme $\phi_{i,j} := f_i \circ f_j^{-1}$ est en fait un difféomorphisme C^∞

$$\phi_{i,j} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j).$$

Les applications $f_i : U_i \rightarrow V_i$ sont les **cartes** de l'atlas et les $\phi_{i,j}$, les **applications de transition**.

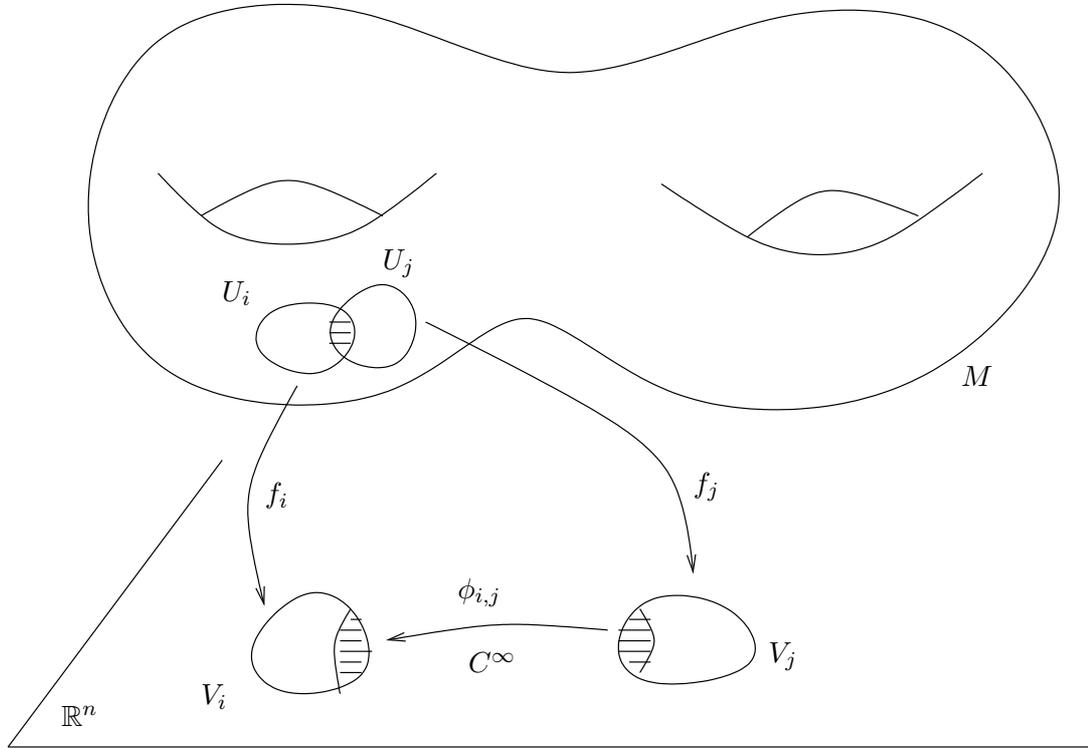


FIGURE 1. Cartes et applications de transition

On appelle **surface** une variété C^∞ de dimension 2.

Un autre atlas $f'_k : U'_k \rightarrow V'_k$, $k \in K$, définira la même structure C^∞ sur M si la réunion des deux atlas est encore un atlas C^∞ , c'est à dire si pour toute intersection $U_i \cap U'_k \neq \emptyset$, l'application de transition $\phi_{i,k} := f_i \circ f'_k{}^{-1}$ est encore un difféomorphisme C^∞ . Toute variété C^∞ possède un unique **atlas maximal**, c'est à dire une collection $f_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ maximale satisfaisant aux conditions de la définition 1 ; un tel atlas contient alors tous les atlas compatibles.

Exercice 1. — Si $f_i : U_i \rightarrow V_i$ est une carte de M , montrer que l'atlas maximal contient aussi ses restrictions $f_i|_{U'_i} : U'_i \rightarrow f_i(U'_i)$ aux ouverts $U'_i \subset U_i$. Montrer qu'il contient aussi la carte $\phi \circ f_i : U_i \rightarrow V'_i$ pour tout difféomorphisme $\phi : V_i \rightarrow V'_i \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ .

On ne considèrera dans ce cours que les variétés **paracompactes**, c'est à dire qui peuvent se définir par un atlas au plus dénombrable ($I \subset \mathbb{N}$).

Exemple 2 (Ouverts de \mathbb{R}^n). — Tout ouvert U de \mathbb{R}^n est une variété C^∞ dont l'unique carte est l'inclusion $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Exemple 3 (La sphère \mathbb{S}^n). — Considérons dans \mathbb{R}^{n+1} la sphère unité de dimension n définie par

$$\mathbb{S}^n = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|\underline{x}\| = 1\}$$

où $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$. Considérons les cartes $f_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{B}^n$, $i = 1, \dots, n+1$, où

$$U_i^+ := \mathbb{S}^n \cap \{x_i > 0\} \quad \text{et} \quad U_i^- := \mathbb{S}^n \cap \{x_i < 0\}$$

et $f_i^\pm(\underline{x}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ est la projection oubliant la $i^{\text{ième}}$ coordonnée (notée \hat{x}_i). On vérifie aisément que les $f_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{B}^n$ et $f_i^- : U_i^- \rightarrow \mathbb{B}^n$ sont des homéomorphismes de U_i^\pm sur la boule unité

$$\mathbb{B}^n = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n ; \|\underline{y}\| < 1\}.$$

Ces cartes forment un atlas C^∞ sur la sphère. En effet, les U_i^\pm recouvrent la sphère puisque tout point de la sphère a au moins une coordonnée non nulle. De plus, les applications de transition sont bien C^∞ . Par exemple, $f_i^+ = \phi_{i+,j+} \circ f_j^+$, $i < j$, avec

$$\phi_{i+,j+}(\underline{y}) = (y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{j-1}, \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}, y_j, \dots, y_n).$$

Exemple 4 (Sous-variété de \mathbb{R}^n). — Le lieu d'annulation d'une application $\Phi : \mathbb{R}^{n+q} \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^∞ définit une sous-variété de codimension q de \mathbb{R}^{n+q} lorsque Φ est une submersion en tout point de M , c'est à dire sa différentielle $D_{\underline{x}}\Phi$ est de rang maximal q en tout point $\underline{x} \in M$. Dans l'exemple précédent, $\Phi(\underline{x}) = |\underline{x}|$.

Exemple 5 (Le tore \mathbb{T}^n). — D'un point de vue topologique, le tore \mathbb{T}^n est le quotient de \mathbb{R}^n par la relation d'équivalence

$$\underline{x} \sim \underline{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x}' - \underline{x} \in \mathbb{Z}^n$$

que l'on note $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. La topologie quotient est celle dont les ouverts sont les images des ouverts de \mathbb{R}^n par l'application de passage au quotient

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \\ \underline{x} & \mapsto & [\underline{x}] = \underline{x} \text{ modulo } \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ hérite aussi de la loi de groupe quotient $[x] + [x'] = [x + x']$. La structure de variété passe elle aussi au quotient pour définir le tore \mathbb{T}^n , les cartes étant données en inversant π localement.

Par exemple, la structure de variété de \mathbb{T}^1 est définie par deux cartes que l'on construit comme suit. Notons $V_1 =]0, 1[$ et $V_2 =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Pour $i = 1, 2$, $U_i = \pi(V_i)$ est un ouvert de \mathbb{T}^1 , ces deux ouverts recouvrent \mathbb{T}^1 et la restriction $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U_i$ est un homéomorphisme, par définition de la topologie sur \mathbb{T}^1 . Les inverses $f_i = (\pi|_{V_i})^{-1} : U_i \rightarrow V_i$ sont les cartes d'un atlas C^∞ sur \mathbb{T}^1 . Par exemple, l'application de transition $\phi_{1,2}$ se décompose en

$$\begin{cases}]0, \frac{1}{2}[& \rightarrow &]0, \frac{1}{2}[& ; & x & \mapsto & x \\]-\frac{1}{2}, 0[& \rightarrow &]\frac{1}{2}, 1[& ; & x & \mapsto & x + 1 \end{cases}$$

qui est clairement de classe C^∞ .

Exercice 2. — Montrer que le tore \mathbb{T}^2 est défini par 4 cartes.

Exemple 6. — L'espace qui paramètre les droites passant par $\underline{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété compacte de dimension n notée \mathbb{P}^n (ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$). Comme chaque droite intersecte la sphère unité $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en exactement deux points antipodaux (opposés), \mathbb{P}^n s'identifie naturellement au quotient $\mathbb{S}^n/\underline{x} \sim -\underline{x}$. Pour le décrire avec des cartes, il est plus agréable de procéder de la façon suivante pour ne manipuler que des expressions polynomiales. Remarquons d'abord que \mathbb{P}^n est aussi le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ par les homothéties. Ainsi, un point de \mathbb{P}^n est une classe d'équivalence pour la relation $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$; on note habituellement $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ une telle classe d'équivalence, on parle alors de coordonnées homogènes. On a donc $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le plan affine Π_0 d'équation $x_0 = 1$ intersecte chaque droite en au plus un point : si $x_0 \neq 0$, alors $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (1 : x'_1 : \dots : x'_n)$ avec $x'_i = \frac{x_i}{x_0}$. L'ensemble des n -uplets (x'_1, \dots, x'_n) paramétrise l'espace des droites intersectant le plan

Π_0 , c'est à dire non parallèles à ce plan : le point (x'_1, \dots, x'_n) représente l'unique droite passant par (l'origine $\underline{0}$ et) le point $(1, x'_1, \dots, x'_n)$ dans \mathbb{R}^{n+1} . Pour paramétrer l'espace de toutes les droites, il faut considérer tous les plans Π_i définis par $x_i = 1$: ceci va nous donner un recouvrement de \mathbb{P}^n par $n + 1$ cartes isomorphes à \mathbb{R}^n . Précisément, notons $U_i \subset \mathbb{P}^n$ l'espace des droites intersectant Π_i . Alors la i -ième carte est donnée par

$$f_i : U_i \rightarrow V_i = \mathbb{R}^n ; (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Notons $\underline{x}^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ les coordonnées de la carte $V_i = \mathbb{R}^n$. Le changement de cartes entre U_0 et U_1 est par exemple donné par

$$\phi_{1,0} : V_0 \setminus \{x_1^0 = 0\} \rightarrow V_1 \setminus \{x_1^1 = 0\} ; (x_1^0, \dots, x_n^0) \mapsto \left(\frac{1}{x_1^0}, \frac{x_2^0}{x_1^0}, \dots, \frac{x_n^0}{x_1^0} \right).$$

On appelle généralement les V_i des “cartes affines” et souvent V_0 , la carte affine principale : on peut penser à \mathbb{P}^n comme une compactification de $\mathbb{R}^n := V_0$ obtenue en rajoutant $\mathbb{P}^n \setminus V_0 \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ à l'infini.

Exercice 3. — Toute variété connexe de dimension 1 est difféomorphe à la droite \mathbb{R} ou au cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^1 = \mathbb{P}^1$. Vérifier par exemple que

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 ; (1 : t) \mapsto \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$$

est un difféomorphisme. En fait, on devrait plutôt écrire $(t_1 : t_2) \mapsto \left(\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2 + t_1^2}, \frac{2t_1 t_2}{t_2^2 + t_1^2} \right)$ ce qui, lorsque $t_1 \neq 0$, revient au même puisque l'on peut diviser par t_1 et se ramener à la formule précédente ; cette deuxième expression a le mérite d'être définie en tout point. On peut alors considérer l'autre carte $t_2 \neq 0$, diviser par t_2 et vérifier que c'est un difféomorphisme y compris en $t_1 = 0$ pour terminer l'exercice.

Exercice 4. — Montrer que le produit cartésien $M \times M'$ de deux variétés différentiables est naturellement une variété différentiable.

Définition 7. — [Applications C^∞] Une application $\Phi : M \rightarrow M'$ de classe C^∞ entre deux variétés C^∞ M et M' (de dimensions n et n') est une application continue entre les espaces topologiques sous-jacents qui est C^∞ dans les cartes : à chaque fois que $f_i : U_i \rightarrow V_i$ et $f'_j : U'_j \rightarrow V'_j$ sont deux cartes respectives de M et M' , l'application continue :

$$f'_j \circ \Phi \circ f_i^{-1} : f_i(U_i \cap \Phi^{-1}(\Phi(U_i) \cap U'_j)) \rightarrow f'_j(\Phi(U_i) \cap U'_j)$$

doit être de classe C^∞ . On dit que Φ est un difféomorphisme de classe C^∞ lorsque de plus Φ est un homéomorphisme et son inverse Φ^{-1} est aussi de classe C^∞ .

Exemple 8. — La projection

$$f_i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \underline{x} \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

est une application C^∞ . Plus généralement, la restriction d'une application C^∞ $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ à une sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ est C^∞ .

Exercice 5. — Montrer que l'application

$$\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2; [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

est un difféomorphisme C^∞ .

Exemple 9. — L'application

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$$

est un homéomorphisme C^∞ mais pas un difféomorphisme.

Exercice 6. — Montrer que l'application

$$\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n; [\underline{x}] \mapsto [2 \cdot \underline{x}]$$

est C^∞ , que chaque point possède 2^n images réciproques et que c'est un difféomorphisme local.

Exercice 7. — Soit $\Phi : M \rightarrow M'$ un homéomorphisme local entre deux espaces topologiques et supposons que M' aie de plus une structure de variété différentiable. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur M qui fasse de Φ une application différentiable.

1.2. Structures supplémentaires. — On appelle variété C^∞ **orientée** une variété M munie d'un atlas C^∞ $(f_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n)_i$ dont les applications de transition $\phi_{i,j}$ préservent l'orientation, c'est à dire telles que $\det(D_p \phi_{i,j}) > 0$ pour tout $p \in f_j(U_i \cap U_j)$. Rappelons le :

Théorème 10 (Whitney). — Toute surface (i.e. variété de dimension 2) C^∞ compacte orientée connexe est difféomorphe à Σ_g où $g \in \mathbb{N}$ est le genre de la surface:

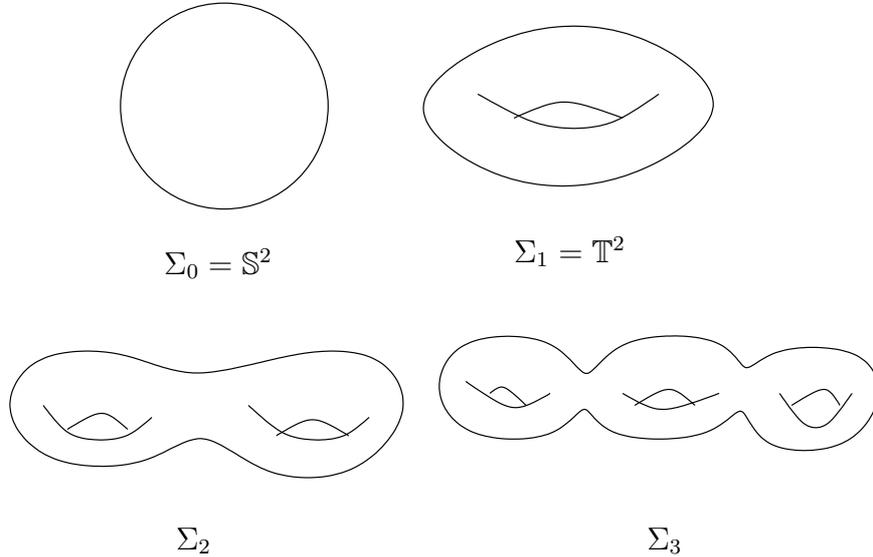


FIGURE 2. Surfaces orientables de genre 0, 1, 2, 3, etc...

On appelle surface de Riemann une surface connexe M munie d'un atlas $(f_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2)_i$ de classe C^∞ dont les changements de cartes sont des applications holomorphes. On parle aussi de variétés complexes connexes de dimension 1.

Exercice 8. — *Montrer qu'une surface de Riemann est orientée.*

Une application différentiable entre deux surfaces de Riemann est dite holomorphe si elle l'est dans les cartes. On dit que deux surfaces de Riemann sont isomorphes lorsqu'elles sont difféomorphes par un difféomorphisme qui est holomorphe dans les cartes.

1.3. La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. — Notons $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (dans les coordonnées $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$) et $\Pi = \{x_3 = 0\}$ le plan horizontal passant par l'origine. Considérons la **projection stéréographique**

$$\mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \Pi \simeq \mathbb{R}^2 ; \underline{x} \mapsto \underline{x}'$$

où \underline{x}' est choisi de sorte que les points N , $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\underline{x}' = (x'_1, x'_2, 0)$ soient alignés : on a $\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{-1}{x_3-1}$ et donc $\underline{x}' = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$.

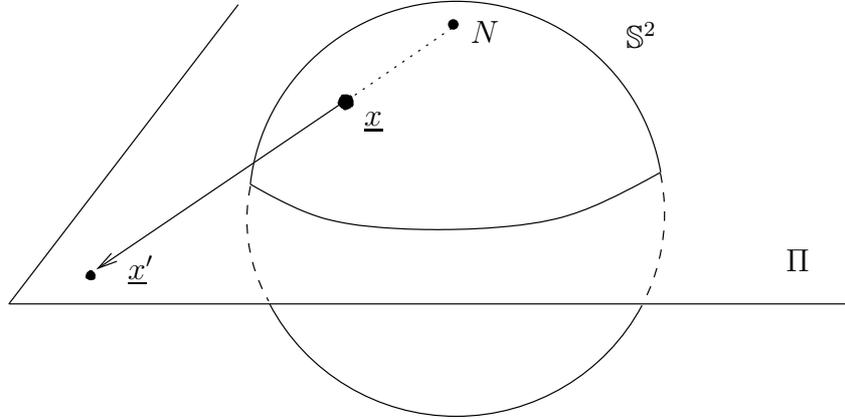


FIGURE 3. Projection stéréographique

Exercice 9. — Montrer que la projection stéréographique est un difféomorphisme $\mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et calculer son inverse.

On définit maintenant une première carte complexe par

$$f_1 : U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}; (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

En considérant ensuite la projection stéréographique depuis le pôle sud $S = (0, 0, -1)$, on définit une deuxième carte complexe

$$f_2 : U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{C}; (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1}{1 + x_3} - i \frac{x_2}{1 + x_3}$$

qui, avec la précédente, forment un atlas C^∞ . Attention, on a volontairement modifié le signe devant i pour construire un atlas orienté.

Exercice 10. — Montrer que l'application de transition de l'atlas C^∞ ainsi construit est donnée par

$$\phi_{1,2} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* ; z \mapsto \frac{1}{z}.$$

La sphère \mathbb{S}^2 équipée de l'atlas complexe précédent est une surface de Riemann appelée sphère de Riemann. On identifiera dans la suite U_1 à \mathbb{C} et N à ∞ ce qui nous permet de voir la sphère de Riemann comme la compactification naturelle $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; on notera z la variable donnée par la première carte.

Théorème 11. — Les applications holomorphes $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sont les applications qui sont rationnelles vues dans la première carte, $f(z) \in \mathbb{C}(z)$, et l'application constante $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \{\infty\}$.

Les difféomorphismes holomorphes $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sont les transformations de Moebius, c'est à dire de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, vues dans la première carte.

Démonstration. — Vérifions tout d'abord que l'application $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définie dans la première carte par l'application rationnelle

$$f(z) = \lambda \frac{(z - p_1) \cdots (z - p_n)}{(z - q_1) \cdots (z - q_m)}, \quad p_i \neq q_j, \quad \forall i, j$$

est bien définie et holomorphe. En tout point $z \neq q_1, \dots, q_m, \infty$, c'est clairement une fonction holomorphe. En $z = q_j$, $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe et s'annule : l'application est donc bien définie et holomorphe en un tel point vue dans les carte $U_1 \rightarrow U_2$ et $f(q_j) = \infty$. En $z = \infty$, on se place dans la carte U_2 avec la variable $z' = \frac{1}{z}$ et

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \lambda \frac{(1 - p_1 z') \cdots (1 - p_n z')}{(1 - q_1 z') \cdots (1 - q_m z')} z'^{m-n}$$

de sorte que ou bien $f\left(\frac{1}{z'}\right)$, ou bien $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z'}\right)}$ est une fonction holomorphe de z' . En d'autres termes, f est bien définie et holomorphe en $z = \infty$ ($z' = 0$) vue dans les cartes ou bien $U_2 \rightarrow U_1$, ou bien $U_2 \rightarrow U_2$, et

$$f(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n, \\ \lambda & \text{si } m = n, \\ \infty & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Lorsque $f(z)$ est une transformation de Moebius, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on vérifie sans peine qu'elle est inversible d'inverse $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ et qu'elle envoie en particulier

$$\begin{cases} -\frac{d}{c} & \mapsto \infty \\ \infty & \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \\ \text{fracac} & \end{cases}$$

Maintenant, soit $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ une application holomorphe que l'on suppose non constante (sinon, elle est rationnelle ou $\equiv \infty$). Quitte à remplacer f par $\frac{1}{f}$ (qui est rationnelle si et seulement si f l'est), on peut supposer que $f(\infty) \neq \infty$, disons $f(\infty) = z_0 \in \mathbb{C}$. Remarquons d'abord

que les points $q \in \mathbb{C}$ tels que $f(q) = \infty$ sont discrets (et donc finis par compacité de la sphère) car ce sont les zéros de la fonction holomorphe $\frac{1}{f}$ (et donc des pôles de f). Soit q un de ces pôles : $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe en q et s'écrit

$$\frac{1}{f(z)} = (z - q)^r h(z), \quad h \text{ holomorphe en } q, \quad h(q) \neq 0.$$

Ainsi, $\frac{1}{h(z)}$ est aussi holomorphe en q et donc développable en série entière :

$$f(z) = \frac{1}{(z - q)^r} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - q)^r} \sum_{k \geq 0} a_k (z - q)^k$$

et

$$f(z) - \sum_{n=1}^r \frac{a_{r-n}}{(z - q)^n}$$

est holomorphe en q ; ici, on a juste retranché à f sa partie principale en q , i.e. les termes de degré négatif dans le développement en série de Laurent. En retranchant à f sa partie principale en chaque pôle $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{C}$, on obtient finalement une fonction

$$\tilde{f}(z) = f(z) - \sum_{q_j} \sum_{n=1}^{r_j} \frac{a_{j,n}}{(z - q_j)^n}$$

qui est holomorphe sur \mathbb{C} . De plus, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(z - q_j)^n} = 0$ pour $n > 0$, et donc $\tilde{f}(\infty) = f(\infty) = z_0$ et \tilde{f} est bornée (continuité à l'infini) ; d'après le Théorème de Liouville, $\tilde{f}(z) \equiv z_0$ est constante. Finalement, $f(z) = z_0 + \sum_{\text{finie}} \frac{a_{j,n}}{(z - q_j)^n}$ est bien rationnelle.

Pour terminer la preuve, notons qu'une application holomorphe $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définie par $f(z) = \lambda \frac{(z - p_1) \cdots (z - p_n)}{(z - q_1) \cdots (z - q_m)}$ ne peut être un difféomorphisme que si elle est bijective. En particulier, l'équation $f(z) = 0$ (resp. $f(z) = \infty$) doit avoir au plus une solution dans \mathbb{C} , ce qui implique $n \leq 1$ (resp. $m \leq 1$). On en déduit aisément que $f(z)$ doit être une transformation de Moebius. \square

Exercice 11. — Montrer que l'application holomorphe $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définie par l'application rationnelle

$$f(z) = \lambda \frac{(z - p_1) \cdots (z - p_n)}{(z - q_1) \cdots (z - q_m)}, \quad p_i \neq q_j, \quad \forall i, j$$

satisfait

$$\#f^{-1}(z_0) = d \quad \text{avec} \quad d \sup\{n, m\}$$

pour tout point $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ sauf un nombre fini. On dit que d est le degré de l'application f .

Proposition 12. — Soient $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts et $z'_1, z'_2, z'_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ eux-aussi deux à deux distincts. Alors il existe une unique transformation de Moebius $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ envoyant simultanément z_i sur z'_i pour $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour $(z'_1, z'_2, z'_3) = (0, 1, \infty)$: en effet, on saura alors construire les deux transformations qui envoient (z_1, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$, puis $(0, 1, \infty)$ sur (z'_1, z'_2, z'_3) ; en les composant, on aura la transformation recherchée. Il vient $\varphi(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}$ (modulo quelques simplifications évidentes lorsqu'un des z_i est l'infini). \square

Le groupe $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ possède une structure naturelle de variété complexe de dimension 3. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \\ \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} &\mapsto (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\infty)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur son image

$$\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} - \{ \{z_1 = z_2\} \cup \{z_1 = z_3\} \cup \{z_2 = z_3\} \}$$

qui permet de tirer en arrière la structure complexe de $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ sur $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

Exercice 12. — Montrer que $\varphi \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

- ou bien possède 2 points fixes et est conjuguée dans $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ à la transformation de Moebius $z \mapsto \lambda z$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ convenable,
- ou bien possède 1 point fixe et est conjuguée dans $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ à la transformation de Moebius $z \mapsto z + 1$,
- ou bien possède ≥ 3 points fixes et est l'identité.

Exercice 13. — Montrer que le sous-groupe des éléments de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ qui fixent

- le point ∞ est le groupe affine

$$\text{Aff}(\mathbb{C}) = \{ \varphi(z) = az + b ; a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \},$$

– les points 0 et ∞ est le groupe linéaire

$$\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \{\varphi(z) = az ; a \in \mathbb{C}^*\},$$

– la paire de points $\{0, \infty\}$ est le groupe diédral

$$D_\infty = \{\varphi(z) = az ; a \in \mathbb{C}^*\} \cup \{\varphi(z) = \frac{a}{z} ; a \in \mathbb{C}^*\}.$$

Exercice 14. — Montrer que si $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ commutent, alors à conjugaison près dans $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

- ou bien $\varphi(z) = \lambda z$ et $\psi(z) = \mu z$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$,
- ou bien $\varphi(z) = z + 1$ et $\psi(z) = z + t$, $t \in \mathbb{C}$,
- ou bien $\varphi(z) = -z$ et $\psi(z) = \frac{1}{z}$.

On utilisera que ψ doit préserver l'ensemble des points fixes de φ et vice-versa.

1.4. La droite projective complexe. — On note $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, ou encore $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{C}^2 . Une droite est définie par un vecteur de base, i.e. un élément $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$; un autre vecteur (z'_1, z'_2) va définir la même droite si, et seulement si, il est colinéaire au premier :

$$(z'_1, z'_2) \sim (z_1, z_2) \iff (z'_1, z'_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Ainsi, nous pouvons voir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ par la relation d'équivalence précédente : c'est la droite projective complexe. Elle est définie par les deux cartes

$$\begin{aligned} f_1 : U_1 = \{z_2 \neq 0\} &\rightarrow V_1 = \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) \sim \left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right) &\mapsto z = \frac{z_1}{z_2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 : U_2 = \{z_1 \neq 0\} &\rightarrow V_2 = \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) \sim \left(1, \frac{z_2}{z_1}\right) &\mapsto z' = \frac{z_2}{z_1} \end{aligned}$$

et l'application de transition $\varphi_{1,2}(z) = \frac{1}{z}$. Ce sont les mêmes cartes et transition que pour la sphère de Riemann et on déduit un isomorphisme (donné dans les premières cartes par) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ (z, 1) &\mapsto z \end{aligned}$$

On identifiera dans la suite ces deux surfaces de Riemann.

Le groupe linéaire $GL(2, \mathbb{C})$ agit sur \mathbb{C}^2 et donc sur ses droites :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) ; (z_1, z_2) \mapsto (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2).$$

En fait, deux matrices vont agir de la même manière si, et seulement si, l'une est multiple de l'autre par un scalaire : c'est le quotient $PGL(2, \mathbb{C})$ de $GL(2, \mathbb{C})$ par la relation d'équivalence

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

qui agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Via l'isomorphisme au dessus, on hérite d'une action de $PGL(2, \mathbb{C})$ sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ par difféomorphismes holomorphes : on a un isomorphisme (de groupes)

$$\begin{aligned} PGL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \varphi = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on identifiera ces deux groupes.

Exercice 15. — On note $SL(2, \mathbb{C})$ le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{C})$ formé des matrices de déterminant 1 et $PSL(2, \mathbb{C})$ son quotient par la relation d'équivalence ci-dessus. Voir que $PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C})$ et montrer que deux éléments $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ coïncident dans $PSL(2, \mathbb{C})$ si, et seulement si, $B = \pm A$. En fait, la flèche

$$SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) = PGL(2, \mathbb{C}) \simeq \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$$

est un revêtement double. Montrer que le groupe diédral à 4 éléments D_2 engendré par $\varphi(z) = -z$ et $\psi(z) = \frac{1}{z}$ ne se relève pas en un sous-groupe à 4 éléments de $SL(2, \mathbb{C})$: quel que soit le choix des relevés A et B de φ et de ψ dans $SL(2, \mathbb{C})$, le sous-groupe engendré compte 8 éléments.

Exercice 16. — Montrer que l'involution antipodale de la sphère

$$\tau : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 ; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3)$$

correspond, via la projection stéréographique, à la transformation (antiholomorphe!) de la sphère de Riemann donnée dans la première carte

par $\tau : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. Montrer que l'action du groupe de rotations $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ sur la sphère \mathbb{S}^2 correspond, via la projection stéréographique, à l'action de

$$\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) ; a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}$$

sur la sphère de Riemann. Voir que $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C})$ correspond aux transformations de Moebius qui commutent à l'involution anti-holomorphe $\tau : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.

1.5. Les tores complexes de dimension 1. — On munit le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ d'une structure de surface de Riemann en identifiant $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, c'est à dire en considérant plutôt le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, ou plus généralement les quotients du type

$$\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

En effet, les cartes sont données comme dans le cas du tore différentiable \mathbb{T}^2 par les déterminations locales de π^{-1} , et les changements de cartes sont des translations $z \mapsto z + m + n\tau$, donc holomorphes.

Exercice 17. — Montrer que la translation $z \mapsto z + t$, $t \in \mathbb{C}$, induit un isomorphisme du tore

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} ; [z] \mapsto [z + t].$$

En déduire que le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ agit transitivement sur le tore :

$$\forall p, q \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, \exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), \varphi(p) = q.$$

Exercice 18. — Montrer que l'application $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ est le revêtement universel (holomorphe) du tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

Théorème 13. — Deux tores complexes $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$ sont isomorphes si, et seulement si, $\tau' = \frac{m\tau+n}{p\tau+q}$ avec $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Démonstration. — On peut supposer que l'isomorphisme

$$\phi : \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$$

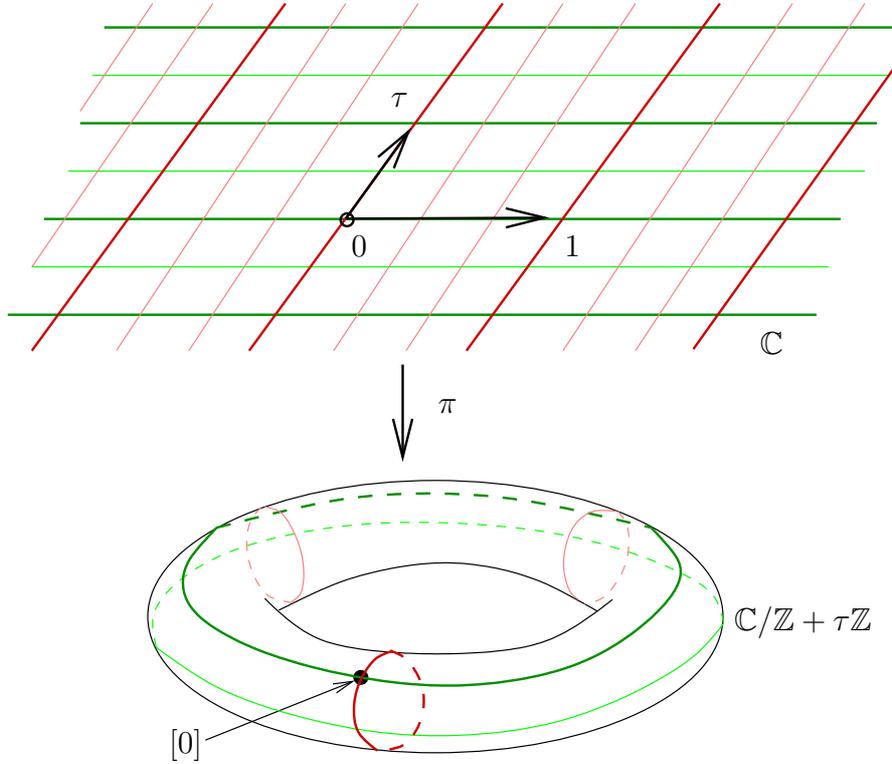


FIGURE 4. Tores complexes

envoie $[0] \mapsto [0]$ quitte à le composer par une translation. Par la propriété universelle des revêtements, l'isomorphisme ϕ se relève alors en un unique isomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fixant 0 ; il satisfait en outre

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(z+1) &= \tilde{\phi}(z) + \tau_1 \\ \tilde{\phi}(z+\tau) &= \tilde{\phi}(z) + \tau_2 \end{cases}$$

avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$. En particulier, $\frac{d\tilde{\phi}}{dz}$ est invariante par translations $z+1$ et $z+\tau$, et donc par l'action de $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Ainsi, $\frac{d\tilde{\phi}}{dz}$ est bornée par les valeurs qu'elle prend sur le domaine fondamental (compact) : d'après le Théorème de Liouville, $\frac{d\tilde{\phi}}{dz} \equiv a$ est constante. En intégrant, il vient $\tilde{\phi}(z) = az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ (rappelons que $\tilde{\phi}$ est un difféomorphisme local qui fixe 0). Les équations satisfaites par $\tilde{\phi}$ nous donnent donc $a = \tau_1$ et $a\tau = \tau_2$, i.e. $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \tau$. Par ailleurs, $\tau_i \in \mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$ pour $i = 1, 2$

ce qui nous donne $\frac{m\tau'+n}{p\tau'+q} = \tau$ pour des entiers $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Mais les mêmes arguments appliqués à l'inverse ϕ^{-1} montrent que la matrice $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z})$ est inversible dans $M(2, \mathbb{Z})$, et appartient donc à $GL(2, \mathbb{Z})$ (de déterminant ± 1). \square

L'ensemble des structures complexes que nous avons trouvées sur le tore \mathbb{T}^2 est paramétré par $\tau\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ modulo l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$ par transformations de Moebius, ou ce qui revient au même, par le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} ; \Im(z) > 0\}$ modulo l'action de $PSL(2, \mathbb{Z})$ par transformations de Moebius. Le quotient

$$\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$$

qui représente donc l'ensemble des structures complexes sur \mathbb{T}^2 à isomorphisme près, est encore une variété complexe de dimension 1, isomorphe à \mathbb{C} .

Rappelons deux résultats importants et difficiles sur les surfaces de Riemann.

Théorème 14 (Riemann+...). — *Toute surface de Riemann compacte de genre 0 est isomorphe à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$; toute surface de Riemann compacte de genre 1 est isomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ pour un $\tau \in \mathbb{H}$ convenable.*

En d'autres termes, l'espace des structures complexes à isomorphisme près sur la sphère \mathbb{S}^2 (resp. sur le tore \mathbb{T}^2) est réduit à un singleton (resp. est isomorphe à \mathbb{C}). En genre supérieur :

Théorème 15 (Teichmüller+...). — *L'espace des structures complexes sur la surface Σ_g de genre g est paramétré par une variété complexe de dimension $3g - 3$.*

2. Feuilletages lisses sur les variétés

Nous commençons par rappeler l'origine de la notion de feuilletages, venant de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Ensuite, nous introduisons la notion de feuilletage différentiable réel (non

singulier) tout d'abord localement, puis sur une variété réelle. Quelques références : [God91, CLN85].

2.1. Portrait de phase d'une EDO. — Étant donnée une équation différentielle ordinaire de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

avec second membre $f(x, y)$ de classe C^∞ sur un voisinage ouvert de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le **théorème de Cauchy-Lipschitz** nous dit qu'il existe une unique solution $y = Y(x)$ de (1) définie de classe C^∞ au voisinage de $x = x_0$ satisfaisant la **condition initiale** $Y(x_0) = y_0$. De plus, si l'on note $Y_{(x_0, y_0)}$ cette solution, et si elle est bien définie en $x = x_1$, alors $Y_{(x, y)}(z)$ est une fonction de classe C^∞ de (x, y, z) au voisinage de (x_0, y_0, x_1) .

Les graphes $y = Y_{(x_0, y_0)}(x)$ des solutions de (1) sont des courbes lisses de classe C^∞ ; elles partitionnent le plan des (x, y) au voisinage de (x_0, y_0) . En effet, si deux telles courbes s'intersectaient, les solutions correspondantes contrediraient l'unicité de la solution au point d'intersection. C'est ce qu'on appelle un feuilletage. Notons que les solutions se prolongent localement tant que $f(x, y)$ est définie, de classe C^∞ . Par exemple, pour $f(x, y)$ polynomiale, on obtient une partition de \mathbb{R}^2 par des courbes de classe C^∞ . Attention, les solutions ne seront pas pour autant définies pour tout x (elles peuvent s'échapper à l'infini en temps fini) ; elles le seront par exemple lorsque $f(x, y) = f(x)$ ne dépend pas de y .

La donnée géométrique de l'ouvert U de définition de $f(x, y)$ avec la partition en graphes de solutions est appelée **portrait de phase** de l'équation différentielle. La collection de courbes sur U est un **feuilletage**, les **feuilles** sont les courbes (leur prolongement maximal).

On appelle **intégrale première** une fonction $H(x, y)$ (de classe C^∞) constante sur les feuilles (solutions). On peut en construire une en inversant localement l'application $\phi : (x, y) \mapsto (x, Y_{(x_0, y)}(x))$, par exemple au voisinage de (x_0, y_0) ; en effet, ϕ envoie le feuilletage horizontal (défini par $\frac{dy}{dx} = 0$) sur celui défini par (1), et plus précisément la feuille $y = y_0$ sur le graphe de la solution $Y_{(x_0, y)}$. L'inverse est de la forme

$\phi^{-1} : (x, y) \mapsto (x, H(x, y))$ où H est une intégrale première au voisinage de (x_0, y_0) qui prend la valeur $H(x_0, y) = y$ en $x = x_0$. Elle sépare les solutions locale : les courbes de niveau $H(x, y) = \text{constante}$ sont connexes au voisinage de (x_0, y_0) .

Considérons maintenant le cas d'une fraction rationnelle $f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$: ici, P et Q sont deux polynômes sans facteur commun. Alors $f(x, y)$ est de classe C^∞ en dehors de la courbe définie par $Q(x, y) = 0$. Si l'on permute le rôle des deux variables x et y , on pourra appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz là où on ne pouvait pas l'appliquer avant, à savoir là où Q s'annule mais pas P . En effet, dans ce cas $\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ est à second membre de classe C^∞ (en dehors de $P(x, y) = 0$). Ceci permet de prolonger un peu plus les feuilles ; en général, on va connecter plusieurs feuilles définies comme au dessus. Attention, là où $Q(x, y) = 0$, les feuilles sont verticales et ne sont plus des graphes de solutions de (1). C'est à ce stade que la notion de feuilletage se distingue de celle du portrait de phases : on oublie l'équation différentielle de départ et sa variable x privilégiée. En ce sens, on considère plutôt l'**équation pfaffienne** associée $\omega = 0$ où ω est la 1-forme différentielle définie par $\omega = P(x, y)dx - Q(x, y)dy$: les feuilles sont alors les courbes maximales en restriction auxquelles ω s'annule identiquement. De manière équivalente, les feuilles sont les trajectoires du champ de vecteur $v = Q(x, y)\partial_x + P(x, y)\partial_y$.

Les points pour lesquels $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sont des points isolés (puisque P et Q sont sans facteur commun). Ce sont les **points singuliers** du feuilletage : on ne peut pas prolonger le feuilletage en ces points. Nous reviendrons en détail sur ce point.

Exemple 16. — *Un exemple remarquable est celui de l'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ dont l'équation pfaffienne associée est $x dx + y dy = 0$. Une intégrale première globale est donnée par $H(x, y) = x^2 + y^2$. Les feuilles sont exactement les cercles concentriques définis par $x^2 + y^2 = \text{constante}$. Les solutions de l'équation différentielle sont par contre les demi cercles ouverts définis par $y > 0$ ou $y < 0$. Le point $(0, 0)$ est une singularité du feuilletage.*

Le feuilletage précédent est aussi défini par les trajectoires du champ de vecteur $v = x\partial_y - y\partial_x$. En le perturbant par le champ de vecteur radial $r := x\partial_x + y\partial_y$, on obtient un champ spiralant $v + \epsilon r$, $\epsilon > 0$, dont les trajectoires sont des spirales infinies qui vont du point singulier $(0, 0)$ vers l'infini en tournant indéfiniment dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les solutions de l'équation différentielle associée $\frac{dy}{dx} = \frac{x+\epsilon y}{\epsilon x-y}$ correspondent aux arcs définis par $y > 0$ ou $y < 0$; chaque feuille contient maintenant une infinité de solutions distinctes.

Le feuilletage radial défini par r n'admet pas d'intégrale première globale de classe C^∞ non constante : par continuité, une telle fonction H devrait prendre en $(0, 0)$ la valeur (constante) qu'elle prend sur chaque demi-droite (feuille) et $H(x, y) \equiv H(0, 0)$. Par contre, il admet l'intégrale première rationnelle $H(x, y) = y/x$. Par contre, le feuilletage spiralant n'admet pas d'intégrale première rationnelle car les feuilles ne sont pas algébriques : elles coupent chaque droite en une infinité de points.

2.2. Définition locale. — On note $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ la variable de \mathbb{R}^n . Un feuilletage de dimension p (ou encore de codimension q) au voisinage de $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ ($n = p + q$) est la donnée d'un voisinage U de $\underline{0}$ et d'une décomposition de U en sous-variétés de dimension p (i.e. de codimension q) de classe C^∞ . On demande en outre que les sous-variétés dépendent de manière C^∞ de leur paramètre ; précisons ceci.

Définition 17. — Un feuilletage de dimension p (de codimension q) au voisinage de $\underline{0}$ est défini par la donnée d'un voisinage U de $\underline{0}$ et d'une application de classe C^∞

$$\psi = (H_1, \dots, H_q) : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^q,$$

qui soit une submersion en tout point de U :

sa jacobienne $\left(\frac{dH_i}{dx_j} \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n}$ est de rang maximal q .

Les feuilles sont alors les composantes connexes des sous-variétés

$$\psi = \text{constante} ;$$

elles sont automatiquement lisses de dimension p , de classe C^∞ .

Deux submersions $\psi : U \rightarrow V$ et $\psi' : U' \rightarrow V'$ vont définir le même feuilletage au voisinage de $\underline{0}$ si, quitte à se restreindre à un même ouvert $U = U'$, il existe un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow V'$ tel que $\psi' = \varphi \circ \psi$.

Les composantes H_i de ψ sont des intégrales premières du feuilletage. Localement, on peut les compléter par p fonctions F_1, \dots, F_p de sorte que l'application

$$\phi := (F_1, \dots, F_p, H_1, \dots, H_q) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

soit un difféomorphisme local. En effet, il suffit de choisir les F_i linéaires pour compléter la matrice jacobienne en une matrice inversible ; on conclue avec le théorème des fonctions implicites. Ainsi, ϕ redresse localement les feuilles sur les plaques “horizontales” dans la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Un tel redressement s'appelle **boîte à flot** (ou “flow-box”), et on peut tout aussi bien définir les feuilletages par de telles boîtes à flot.

Exemple 18. — *Considérons le feuilletage défini sur \mathbb{R}^2 par*

- *le feuilletage radial de centre $(0, 0)$ sur le demi-plan $y > 0$,*
- *le feuilletage radial de centre $(1, 0)$ sur le demi-plan $y < 0$.*

Excepté aux deux points spéciaux, on a une partition en droites, mais le feuilletage ainsi défini n'est pas C^∞ le long de $y = 0$. En effet, l'application “pente” $\frac{dy}{dx}$ n'est pas différentiable le long de la coupure.

Exemple 19. — *Considérons le feuilletage défini sur \mathbb{R}^2 par la courbe $y = x^3$ et tous ses translatés par $(x, y) \mapsto (x + t, y)$, $t \in \mathbb{R}$. Comme dans l'exemple précédent, on a bien une décomposition de \mathbb{R}^2 par des courbes lisses de classe C^∞ , qui cette fois remplissent tout l'espace et dépendent de manière C^∞ du paramètre t en un sens raisonnable. Pourtant, de nouveau, ce n'est pas un feuilletage C^∞ le long de $y = 0$.*

En différentiant les composantes de ψ , on obtient un système d'équations pfaffiennes

$$dH_1 = \dots = dH_q = 0$$

satisfaites par les feuilles du feuilletage. Précisément, ces équations définissent l'espace tangent aux feuilles en tout point de l'ouvert U de

définition de la submersion ψ . Ceci nous conduit naturellement à la notion de distribution et au théorème de Frobenius.

Une **distribution** de p -plans (ou de dimension p) au voisinage de $\underline{0}$ est la donnée, en tout point \underline{x} d'un voisinage U , d'un sous-espace linéaire $\Pi_{\underline{x}} \subset T_{\underline{x}}U$ de dimension p de l'espace tangent dépendant de manière C^∞ de $\underline{x} \in U$. On peut définir une telle distribution

- par la donnée de p champs de vecteurs v_1, \dots, v_p linéairement indépendants en tout point de U :

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p|_{\underline{x}} \neq 0, \quad \forall \underline{x} \in U,$$

- ou encore, par dualité, par la donnée de q équations pfaffiennes $\omega_1 = \dots = \omega_q = 0$ linéairement indépendants en tout point de U :

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q|_{\underline{x}} \neq 0, \quad \forall \underline{x} \in U.$$

On suppose bien sûr que les champs de vecteurs v_i ou les 1-formes différentielles ω_j sont de classe C^∞ , ce qui donne la dépendance C^∞ de $\Pi_{\underline{x}}$ par rapport à \underline{x} ; on a aussi $\omega_j(v_i) \equiv 0$ pour tous i, j .

Une autre collection de champs de vecteurs v'_1, \dots, v'_p indépendants va définir le même champ de p -plans si et seulement si il existe des fonctions $f_{i,j}$ telles que $v'_i = f_{i,1}v_1 + \dots + f_{i,p}v_p$ pour $i = 1, \dots, p$. Puisque

$$v'_1 \wedge \dots \wedge v'_p = \det(f_{i,j}) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0,$$

ceci implique que la matrice $(f_{i,j})$ est localement inversible, et que l'on peut donc renverser les formules (exprimer les v_i en fonction des v'_j). Plus simplement, $\Pi' = \Pi$ si et seulement si $\omega_j(v'_i) \equiv 0$ pour tous i, j . On une condition tout à fait identique pour dire que Π' défini par $\omega'_1 = \dots = \omega'_q = 0$ coïncide avec Π .

On dira qu'une distribution Π de p -plans est sous-jacente à un feuilletage \mathcal{F} de dimension p lorsque Π est la distribution tangente aux feuilles de \mathcal{F} . Il n'est pas vrai que toute distribution est sous-jacente à un feuilletage comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 20. — *Considérons le champ de 2-plans défini dans \mathbb{R}^3 par la 1-forme différentielle $\omega = xdy - dz$, ou encore par les deux champs de vecteurs $v_1 = \partial_x$ et $v_2 = \partial_y + x\partial_z$ (notons que $\omega(v_1) = \omega(v_2) \equiv 0$). Si cette distribution était sous-jacente à un feuilletage, toute trajectoire de v_1 , de v_2 ou de toute combinaison de ces deux champs de vecteurs resterait*

dans la même feuille et serait donc confinée dans une sous-variété de dimension 2. Par exemple, les trajectoires locales de \underline{Q} devraient rester dans une sous-variété dont le plan tangent en \underline{Q} est engendré par les axes de coordonnées de x et de y . Les flots de v_1 et v_2 sont donnés explicitement par :

$$\varphi_{v_1}^t : (x, y, z) \mapsto (x + t, y, z) \quad \text{et} \quad \varphi_{v_2}^t : (x, y, z) \mapsto (x, y + t, z + xt).$$

En combinant les flots de la manière suivante, on obtient

$$\varphi_{v_2}^{-t} \circ \varphi_{v_1}^{-t} \circ \varphi_{v_2}^t \circ \varphi_{v_1}^t : (x, y, z) \mapsto (x, y, z + t^2).$$

On constate immédiatement, pour t petit, que l'on peut aussi se déplacer dans la direction z en restant arbitrairement proche de l'origine. En fait, il n'est pas plus difficile de montrer que deux points quelconques de \mathbb{R}^3 peuvent être reliés en suivant des chemins tangents à la distribution Π .

On dira qu'une distribution Π est **intégrable** lorsqu'elle est sous-jacente à un feuilletage.

Rappelons que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs $v = f_1 \partial_{x_1} + \cdots + f_n \partial_{x_n}$ et $w = g_1 \partial_{x_1} + \cdots + g_n \partial_{x_n}$ est défini par

$$\{v, w\} = (v \cdot g_1 - w \cdot f_1) \partial_{x_1} + \cdots + (v \cdot g_n - w \cdot f_n) \partial_{x_n}$$

(où $v \cdot g = f_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial g}{\partial x_n}$ est l'action par dérivation).

Théorème 21 (Frobenius). — Soit Π un champ de p -plans défini comme au dessus au voisinage de \underline{Q} par des champs de vecteurs indépendants v_1, \dots, v_p ou encore par des 1-formes différentielles indépendantes $\omega_1, \dots, \omega_q$. Sont équivalents :

- Π est intégrable,
- Π est stable par crochet de Lie : $\{v_i, v_j\} \in \Pi$ en tout point \bar{x} , pour tous $i, j = 1, \dots, p$,
- $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \wedge d\omega_i \equiv 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$.

La condition d'intégrabilité est vide en dimension $p = 1$: un champ de droites est toujours sous-jacent à un feuilletage. En codimension $q = 1$, lorsque la distribution est décrite par une 1-forme différentielle ω , la condition d'intégrabilité se réduit à $\omega \wedge d\omega = 0$.

Dans l'exemple précédent, on avait d'une part $\{v_1, v_2\} = \partial_z \notin \Pi$, et d'autre part $d\omega = dz \wedge dx$ et $\omega \wedge d\omega = -dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$. Cet exemple

est à l'extrême opposé d'un feuilletage puisque la condition d'intégrabilité (tant pour ω que pour v_1 et v_2) n'est satisfaite en aucun point. C'est ce qu'on appelle une forme de contact. Pour une 1-forme générique de \mathbb{R}^3 , disons polynomiale de degré $d \geq 1$ fixé, la condition d'intégrabilité ne sera satisfaite que le long d'une surface, et on pourra encore aller d'un point générique à un autre en suivant des chemins tangents à la distribution. Par exemple, dans le cas $d = 1$, la condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$ n'est satisfaite que sur un plan et Π est transverse à ce plan en dehors d'un point.

En utilisant la linéarité de \wedge , d , $\{\cdot, \cdot\}$ et les identités classiques

$$d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega \quad \text{et} \quad \{v_1, f v_2\} = (v_1 \cdot f)v_2 + f\{v_1, v_2\},$$

on vérifie aisément que la condition d'intégrabilité ne dépend que du champ de p -plans Π et non pas des bases v_i ou ω_j choisies pour le définir. Par exemple, il est immédiat que $\{v_1, f v_2\} \in \Pi$ si et seulement si $\{v_1, v_2\} \in \Pi$.

Idée de preuve dans le cas $n = 3$ et $q = 1$. — Soient v_1 et v_2 deux champs de vecteurs définissant, au voisinage de l'origine $\underline{0} \in \mathbb{R}^3$, un champ de 2-plans. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer $v_1 = \partial_x$ et $v_2 = f(x, y, z)\partial_x + g(x, y, z)\partial_y + h(x, y, z)\partial_z$ avec $v_2(\underline{0}) = \partial_y$. Considérons $v'_2 = \frac{1}{g}(v_2 - f \cdot v_1) = \partial_y + h'\partial_z$ qui définit, avec v_1 , la même distribution Π . Le crochet de Lie est donné par $\{v_1, v'_2\} = \frac{\partial h'}{\partial x}\partial_z$; comme il n'a pas de composante en ∂_x ou ∂_z , il appartient à la distribution si et seulement si il est nul au voisinage de $\underline{0}$, c'est à dire si et seulement si v_1 et v'_2 commutent.

Si v_1 et v'_2 commutent, alors $h'(x, y, z)$ ne dépend pas de x , v'_2 non plus, et on peut redresser v'_2 sur ∂_y par un changement de coordonnées dans les variables y et z , c'est à dire sans toucher à v_1 . Dans ces nouvelles coordonnées, Π est engendré par ∂_x et ∂_y , et donc sous-jacent au feuilletage défini par $z = \text{constante}$.

Notons que v_1 et v'_2 se projettent respectivement sur ∂_x et ∂_y via la projection linéaire $\phi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$; autrement dit, v_1 et v'_2 sont les relèvements de ∂_x et ∂_y tangents à Π via la projection ϕ . Si Π est intégrable, alors on peut redresser le feuilletage correspondant sur $dz = 0$ par un changement de coordonnée de la forme $\tilde{z} = F(x, y, z)$, c'est à

dire commutant à ϕ (on ne touche pas aux variables x et y). Dans ces nouvelles coordonnées, v_1 et v'_2 sont toujours les relèvements de ∂_x et ∂_y tangents à Π via la projection ϕ : il s'en suit immédiatement que $v_1 = \partial_x$ et $v'_2 = \partial_y$, et que ces deux champs de vecteur commutent.

Nous avons montré que Π est intégrable, c'est à dire sous-jacente à un feuilletage, si et seulement si v_1 et v'_2 commutent, ce qui est encore équivalent à $\{v_1, v_2\} \in \Pi$. Il reste à vérifier la version pfaffienne de la condition d'intégrabilité. Mais Π est défini par $\omega = h'dy - dz$ et on a $\omega \wedge d\omega = -\frac{\partial h'}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$. Ainsi, $\omega \wedge d\omega \equiv 0$ si et seulement si v_1 et v'_2 commutent. \square

2.3. Définition globale. — Soit M une variété différentielle de dimension n . Un feuilletage de dimension p sur M est la donnée d'un atlas

$$\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$$

tel que les changements de cartes

$$\phi_{ij} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

préservent le feuilletage défini sur \mathbb{R}^n par $dx_{p+1} = \dots = dx_n = 0$. Autrement dit, si l'on note $X = (x_1, \dots, x_p)$ et $Y = (x_{p+1}, \dots, x_n)$, alors $\phi_{ij}(X, Y) = (\psi_{i,j}(X, Y), \varphi_{ij}(Y))$.

En tirant en arrière le feuilletage de \mathbb{R}^n par les cartes ϕ_i , on définit des feuilletages \mathcal{F}_i sur chaque ouvert U_i de la variété. La condition sur les changements de cartes nous assure que les feuilles de \mathcal{F}_j sur U_j prolongent celles de \mathcal{F}_i sur U_i . Les feuilles du feuilletage \mathcal{F} sur M sont alors les prolongements maximaux des feuilles locales définies sur les ouverts U_i .

Pour définir le feuilletage \mathcal{F} , il suffit en fait d'avoir les intégrales premières locales, c'est à dire les q dernières coordonnées des ϕ_{ij} . Ceci nous amène à la définition suivante. Un feuilletage de dimension p sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $M = \bigcup_i U_i$ et de submersions

$$H_i : U_i \rightarrow W_i \subset \mathbb{R}^q$$

tel que, pour toute intersection $U_i \cap U_j$, il existe un difféomorphisme

$$\varphi_{ij} : H_j(U_i \cap U_j) \rightarrow H_i(U_i \cap U_j)$$

satisfaisant $H_i = \varphi_{ij} \circ H_j$.

On peut aussi définir un feuilletage à partir d'une distribution intégrable. Une distribution de p -plans sur M est la donnée d'un sous-fibré de rang p du fibré tangent TM . On peut la définir localement, à l'aide d'un recouvrement ouvert $M = \bigcup_i U_i$

- ou bien p champs de vecteurs $v_{i,1}, \dots, v_{i,p}$ linéairement indépendants,
- ou bien par q 1-formes différentielles $\omega_{i,1}, \dots, \omega_{i,q}$ dont le produit extérieur est non nul en tout point.

Les conditions de compatibilité sur les intersections $U_i \cap U_j$ sont celles de la section précédente. La distribution est intégrable, et définit donc un feuilletage, lorsque les conditions d'intégrabilité du théorème de Frobenius sont satisfaites dans chaque carte.

Attention, un feuilletage n'est en général pas défini par une submersion globale, comme le montre l'exemple 16 ; on verra aussi des exemples où les feuilles sont denses. Un feuilletage de dimension p n'est généralement pas non plus globalement défini par p champs de vecteurs ou q formes différentielles, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 22. — *Considérons le feuilletage sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ donné par la projection sur le premier facteur (une submersion globale). S'il était défini par deux champs de vecteurs v_1 et v_2 linéairement indépendants en tout point, en particulier v_1 ne s'annulerait en aucun point et définirait par exemple un feuilletage en restriction à chaque feuille $\{x\} \times \mathbb{S}^2$. Or, une conséquence du théorème de Poincaré-Hopf est qu'il n'y a pas de feuilletage par courbes sur la sphère \mathbb{S}^2 . De même, si le feuilletage était défini par deux 1-formes globale, chacune d'elles induirait un feuilletage sur n'importe quel facteur $\mathbb{S}^2 \times \{x\}$, contradiction.*

2.4. Exemples, résultats et problèmes ouverts. —

2.4.1. Feuilletages linéaires sur le tore \mathbb{T}^2 . — Soit \mathcal{F}_θ le feuilletage "constant" sur \mathbb{R}^2 défini par $\frac{dy}{dx} = \theta$, i.e. par $dy - \theta dx = 0$: les feuilles sont les droites de pente $\theta \in \mathbb{R}$. Ce feuilletage est invariant par translations. Rappelons que le quotient de \mathbb{R}^2 par le groupe de translations

$$\Gamma = \{(x, y) \mapsto (x + k, y + l), (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$$

est le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\Gamma$. Le feuilletage \mathcal{F}_θ passe au quotient pour définir un feuilletage par courbes que l'on note encore \mathcal{F}_θ par abus de langage. L'axe des y définit au quotient un cercle $\Sigma \subset \mathbb{T}^2$ transverse au feuilletage (i.e. aux feuilles). En fait, le feuilletage \mathcal{G} défini par $dx = 0$ est partout transverse à \mathcal{F}_θ puisque $dx \wedge (dy - \theta dx) = dx \wedge dy$ ne s'annule jamais. Toutes les feuilles de \mathcal{G} sont, sur le tore \mathbb{T}^2 , des cercles transverses aux feuilles de \mathcal{F}_θ . Notons que \mathcal{G} est globalement défini par la submersion

$$\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} ; (x, y) \mapsto x.$$

Partant d'un point $y_0 \in \Sigma$, suivons la feuille de \mathcal{F}_θ passant par y_0 au dessus de la base \mathbb{T}^1 en faisant 1 tour dans le sens positif. Après un tour, la feuille intersecte de nouveau Σ au point $y_0 + \theta$. On obtient une application

$$\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma ; y \mapsto y + \theta$$

appelée **application de premier retour** ou **monodromie**. En identifiant Σ avec un cercle, φ est une rotation d'angle $2\pi\theta$.

Lorsque $\theta = \frac{p}{q}$ est rationnel, on voit qu'au bout de q tours, la feuille se referme sur elle-même : c'est un cercle. Dans ce cas, on a un feuilletage en cercles, toutes les feuilles sont en particulier des sous-variétés compactes. On peut facilement montrer que \mathcal{F}_θ est défini par une fibration globale $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1$.

Lorsque θ est irrationnel, l'orbite de tout point par la rotation φ est dense dans Σ . Par conséquent, toute feuille de \mathcal{F}_θ est dense dans \mathbb{T}^2 . En particulier, le feuilletage ne peut pas être défini par une submersion. Par contre, la 1-forme $dy - \theta dx$ est invariante par translation et passe donc au quotient en une 1-forme différentielle globale ω sur \mathbb{T}^2 définissant \mathcal{F}_θ .

2.5. Suspension. — On peut voir le feuilletage linéaire \mathcal{F}_θ de la manière suivante. On part de la variété produit $[0, 1] \times \Sigma$ munie du feuilletage "horizontal" défini par la projection sur Σ . Ensuite, on recolle $\{0\} \times \Sigma$ avec $\{1\} \times \Sigma$ à l'aide de l'application de monodromie φ . La variété obtenue est homéomorphe à un tore \mathbb{T}^2 . Elle est munie de la projection sur le cercle $\mathbb{T}^1 = [0, 1]/_{0 \sim 1}$ et le feuilletage induit par cette projection est une fibration en cercles, transverse au feuilletage de départ. La monodromie est par construction φ . Il n'est pas difficile de montrer que ce tore feuilleté est difféomorphe au tore muni du feuilletage linéaire

\mathcal{F}_θ . En fait, ceci est un cas particulier d'une construction classique bien plus générale. On renvoie aux cours de topologie classiques pour la notion de revêtement et de groupe fondamental.

Considérons une **fibration localement triviale** $\phi : M \rightarrow B$ de fibre F compacte : pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage $b \in U \subset B$ et un difféomorphisme $\psi : \phi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tels que $\phi = \pi \circ \psi$ sur $\phi^{-1}(U)$, où $\pi : U \times F \rightarrow U$ est la projection sur le premier facteur. En particulier, toutes les fibres sont difféomorphes à F et forment un feuilletage, et ϕ est en particulier une submersion globale définissant ce feuilletage.

Un résultat classique de topologie différentielle est le :

Théorème 23. — *Toute submersion propre $\phi : M \rightarrow B$ surjective est une fibration localement triviale de fibre compacte.*

Notons $p = \dim(B)$ la dimension de la base, $q = \dim(F)$ la dimension de la fibre et $n = p + q$ la dimension de l'espace total de la fibration M . Étant donné un feuilletage \mathcal{F} de dimension p sur M transverse aux fibres, on définit la monodromie de la manière suivante. On choisit un point $b_0 \in B$ et donc une fibre $F_0 := \phi^{-1}(b_0)$. Pour tout point $y_0 \in F_0$, considérons la feuille L_{y_0} passant par ce point ; la projection ϕ induit sur L_{y_0} un **revêtement** $\phi|_{L_{y_0}} : L_{y_0} \rightarrow B$. En particulier, tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ dans la base issu de b_0 , $\gamma(0) = b_0$, se relève en un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow L_{y_0}$ issu de y_0 ; notons $y_1 := \tilde{\gamma}(1)$. L'application induite

$$\varphi_\gamma : F_0 \rightarrow F_1 ; y_0 \mapsto y_1$$

où $F_1 := \phi^{-1}(b_1)$ avec $b_1 = \gamma(1)$, est un difféomorphisme. Lorsque γ est un lacet, $b_0 = b_1$, on obtient un automorphisme de la fibre F_0 qui est en général non trivial, et mesure la non trivialité du feuilletage : c'est la **monodromie** du feuilletage le long de γ . Cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ . On définit de cette manière la **représentation de monodromie** de \mathcal{F}

$$\text{Mon} : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(F_0) ; [\gamma] \mapsto \varphi_\gamma^{-1}.$$

C'est un homomorphisme de groupes, qui va du groupe fondamental de la base vers le groupe des difféomorphismes $F_0 \rightarrow F_0$. Attention, on doit

envoyer γ sur φ_γ^{-1} et non sur φ_γ pour respecter l'ordre de composition :
 $\varphi_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} = \varphi_{\gamma_2} \circ \varphi_{\gamma_1}$.

Lorsque $\phi : M \rightarrow B$ est le fibré trivial, i.e. $M = B \times F$, et \mathcal{F} est le feuilletage horizontal, alors la Mon est la représentation triviale, qui envoie tout lacet vers l'identité.

Théorème 24. — Soient $\phi' : M' \rightarrow B$ une autre fibration localement triviale de même fibre F et \mathcal{F}' un feuilletage de dimension p sur M' transverse aux fibres ; soit $\text{Mon}' : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(F'_0)$ sa représentation de monodromie. Alors sont équivalents :

- Il existe un difféomorphisme $\Psi : M \rightarrow M'$ de fibrés, i.e. satisfaisant $\phi' \circ \Psi \equiv \phi$, envoyant \mathcal{F} sur \mathcal{F}' .
- Il existe un difféomorphisme $\psi : F_0 \rightarrow F'_0$ conjugant les deux représentations : $\psi \circ \text{Mon}([\gamma]) \equiv \text{Mon}'([\gamma]) \circ \psi$ pour tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$.

Démonstration. — Étant donné Ψ comme dans l'énoncé, sa restriction à F_0 est un difféomorphisme conjugant les représentations. Il suffit de reprendre la construction calmement pour s'en convaincre.

Réciproquement, si ψ conjugue les monodromies, alors on peut reconstruire Ψ en la prolongeant fibre à fibre tout en conjugant les feuilles en utilisant les trivialisations locales. \square

Ainsi, la monodromie caractérise le fibré feuilleté $(\phi : M \rightarrow B, \mathcal{F})$ à difféomorphisme près. En particulier, si la monodromie est triviale, alors le fibré est lui aussi trivial. Un outil très puissant pour construire de nombreux feuilletages est le :

Théorème 25. — Soit $\text{Mon} : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(F)$ un homomorphisme de groupes. Alors il existe un fibré localement trivial $\phi : M \rightarrow B$ de fibre F et un feuilletage \mathcal{F} de dimension p sur M et transverse aux fibres, tels que Mon est la monodromie de \mathcal{F} .

La donnée de $(\phi : M \rightarrow B, \mathcal{F})$ à difféomorphisme près est appelée **suspension de la représentation** Mon . Par exemple, les feuilletages linéaires \mathcal{F}_θ sur le tore \mathbb{T}^2 réalisent les suspensions de toutes les rotations de la fibre $\mathbb{T}^1 \simeq \mathbb{S}^1$ vis à vis de la fibration $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1; (x, y) \mapsto x$.

Il existe de nombreux feuilletages sur le tore qui ne sont pas difféomorphes à un feuilletage linéaire...

2.6. Feuilletages sur la sphère \mathbb{S}^3 . — Voici deux questions difficiles qui ont été résolues sur les feuilletages.

La conjecture d'Ehresmann affirme que tout feuilletage de codimension 1 de la sphère \mathbb{S}^3 admet une feuille compacte. C'est devenu le théorème de Novikov.

La conjecture de Seifert affirme que tout feuilletage de dimension 1 de la sphère \mathbb{S}^3 admet une feuille compacte. Celle-ci s'est avérée fautive. Des contre-exemples ont été donnés par Schweitzer en '74 (classe C^1), Harrisson '88 (classe $C^{2+\epsilon}$), Kuperberg '93 (classe C^∞) et Ghys (classe analytique).

Le feuilletage de Reeb de la sphère \mathbb{R}^3 est un feuilletage de codimension 1 possédant une feuille fermée homéomorphe à un tore \mathbb{T}^2 et toutes les autres feuilles sont des plans \mathbb{R}^2 qui s'enroulent autour de ce tore.

La fibration de Hopf de la sphère \mathbb{R}^3 est un feuilletage de dimension 1 dont toutes les feuilles sont des cercles.

2.7. 16ième Problème de Hilbert. — Partant d'une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, avec P, Q polynômes sans facteur commun, on définit un feuilletage \mathcal{F} prolongeant le portrait de phases sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{P(x,y) = Q(x,y) = 0\}$, c'est à dire en dehors d'un nombre fini de points. On dit aussi que c'est un feuilletage singulier sur \mathbb{R}^2 à singularités isolées. Les feuilles sont homéomorphes à des cercles ou des droites. Le théorème de Poincaré-Bendixson affirme qu'aucune feuille ne peut être dense dans ce cas : elles s'accumulent sur un nombre fini de feuilles et de singularités. Un problème ouvert et difficile est la 2ième partie du 16ième Problème de Hilbert. Un résultat difficile démontré indépendamment par Jean Écalle et Yulij Ilyashenko au début des années 90 affirme que les feuilles fermées (cercles) arrivent soit de manière isolée, soit en famille continue. La question initiale de Hilbert est : "borner le nombre de cercles isolés en fonction du degré de P et de Q ". On ne sait toujours pas si une telle borne existe, y compris en degré 2 ! Ce problème a été repris par Smale dans sa liste pour le 21ième siècle.

3. Feuilletages holomorphes singuliers

Quelques références : [CM82, IY08] et mon ouvrage disponible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/ccsd-00016434>

3.1. Quelques rappels. — Dans la suite, on note $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$ la variable de \mathbb{C}^n , avec $z_k = x_k + iy_k$. Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe de classe C^∞ , c'est à dire $f = f_1 + if_2$ où $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions réelles de classe C^∞ des variables $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. On dit que f est holomorphe si sa différentielle (au sens réel) respecte la structure complexe en tout point de U , c'est à dire commute à la multiplication par $i = \sqrt{-1}$; ceci est équivalent à ce que f satisfait les identités de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} = \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_k} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, n$$

identiquement sur U . On note $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U .

Ceci entraine l'analyticité de f : localement, près de tout point $\underline{z}^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in U$, on peut écrire

$$f(\underline{z}) = \sum_{k_i \geq 0} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$$

la série convergeant uniformément sur un voisinage de \underline{z}^0 . Les parties réelle et imaginaire f_1 et f_2 de f sont en particulier analytiques réelles en les x_k et y_k .

Les propriétés classiques des fonctions holomorphes à une variable restent vraies pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables (principe du maximum, inégalités de Cauchy, théorème d'extension de Riemann, ...). Le théorème des zéros isolés reste vrai lorsque l'on restreint f à une droite ou une courbe. L'anneau $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ des séries convergentes à l'origine de \mathbb{C}^n est Noethérien. Une autre propriété importante des fonctions holomorphes de plusieurs variables (qui n'apparait pas dans le cas d'une seule variable) est le

Théorème 26 (Hartogs). — Si $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, $Z \subset U$ un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 et $f : U \setminus Z \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction

holomorphe. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur U tout entier : il existe $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f \equiv \tilde{f}$ sur $U \setminus Z$.

Une fonction méromorphe est, par définition, le quotient de deux fonctions holomorphes f/g avec $g \neq 0$. Le théorème de Hartogs reste vrai si l'on remplace holomorphe par méromorphe.

Les résultats classiques de géométrie différentielle (fonctions implicites, Cauchy-Lipschitz) restent vrais dans le cadre holomorphe. En particulier, les définitions de variété complexe (ou holomorphe) et de feuilletages holomorphes réguliers sont les mêmes que dans le cadre C^∞ .

3.2. Définitions locales. — Plusieurs définitions (non équivalentes !) viennent naturellement à l'esprit lorsque l'on veut travailler avec des feuilletages holomorphes singuliers.

La plus restrictive est de demander que le feuilletage (disons de dimension p) soit localement défini par une application holomorphe

$$\psi = (H_1, \dots, H_q) : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}^q,$$

qui soit une submersion en un point générique de U . Le lieu singulier est alors défini par le lieu où tous les sous-déterminants de rang q de la jacobienne $\left(\frac{dH_i}{dz_j}\right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n}$ s'annulent simultanément. Cette définition est cependant trop restrictive pour nos motivations, elle ne contient pas l'exemple 16.

On peut aussi définir un feuilletage holomorphe singulier par la donnée (locale) d'une distribution holomorphe singulière définie de l'une des deux manières suivantes

- p champs de vecteurs holomorphes v_1, \dots, v_p où $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$,
- q équations pfaffiennes $\omega_1 = \dots = \omega_q = 0$ où $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q|_{\underline{x}} \neq 0$

satisfaisant identiquement sur U les équations d'intégrabilité :

- $\{v_i, v_j\} = f_1 v_1 + \dots + f_p v_p$ pour des fonctions $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes, et ceci pour tous $i, j = 1, \dots, p$,
- $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q \wedge d\omega_k \equiv 0$ pour tous $k = 1, \dots, q$.

Le lieu singulier est alors défini par $v_1 \wedge \dots \wedge v_p = 0$ (respectivement $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q = 0$).

Une dernière définition, qui englobe visiblement les précédentes, est de se donner un sous-ensemble analytique (complexe) $Z \subset U$ et un feuilletage holomorphe régulier en dehors de Z . Cette dernière définition englobe par exemple la version complexe de l'exemple 19 qui n'est pas du type précédent. Par contre, si l'on impose que le lieu singulier Z soit de codimension ≥ 2 , alors on exclue ce genre de phénomène pathologique ; voyons ça dans les deux situations les plus simples.

3.2.1. Feuilletages de dimension 1. — Un champ de vecteur holomorphe non nul $v = a_1(\underline{z})\partial_{z_1} + \cdots + a_n(\underline{z})\partial_{z_n}$ sur un voisinage ouvert U de $\underline{0} \in \mathbb{C}^n$ définit un feuilletage holomorphe régulier par courbes complexes sur U . Plus précisément, il existe (localement, quitte à rétrécir U) un changement de coordonnées $\phi : (\mathbb{C}^n, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \underline{0})$ envoyant v sur le champ de vecteur constant $v_0 := \partial_{z_1}$, le théorème de redressement des champs de vecteurs restant vrai dans le contexte holomorphe. Les feuilles sont alors définies par leurs intégrales premières $z_k \circ \phi$, $k = 2, \dots, n$.

On peut aussi tirer en arrière le flot local complexe

$$\varphi_{v_0}^t : (z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (z_1 + t, z_2, \dots, z_n)$$

et déduire le flot local complexe $\varphi_v^t := \phi^{-1} \circ \varphi_{v_0}^t \circ \phi$ (qui n'est défini que pour $t \sim 0$ proche de zéro et sur un ouvert strict dépendant de t). Les feuilles sont alors localement paramétrées par $t \in (\mathbb{C}, 0)$. Elles sont en particulier des surfaces réelles.

En dérivant le flot par rapport aux variables réelles $t = t_1 + i \cdot t_2$, on obtient deux champs de vecteurs réels v_1 et v_2 (en les variables x_k et y_k) commutant entre eux et satisfaisant

$$\varphi_v^t = \varphi_{v_1}^{t_1} \circ \varphi_{v_2}^{t_2}.$$

Précisément, on a (en notant $a_k = \Re(a_k) + i \cdot \Im(a_k)$) :

$$v_1 = \sum_{k=1}^n (\Re(a_k)\partial_{x_k} + \Im(a_k)\partial_{y_k}) \quad \text{et} \quad v_2 = \sum_{k=1}^n (-\Im(a_k)\partial_{x_k} + \Re(a_k)\partial_{y_k}).$$

Ici, la condition d'intégrabilité, invisible lorsque l'on travaille avec les variables complexes, vient des identités de Cauchy-Riemann que l'on impose aux coefficients a_k (holomorphic) qui font commuter les champs de vecteurs v_1 et v_2 .

Supposons maintenant que le champ de vecteur v s'annule, sans être pour autant identiquement nul sur U . En dehors de

$$Z := \{z ; a_1(z) = \cdots = a_n(z) = 0\}.$$

Ce lieu singulier se décompose en composantes irréductibles

$$Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_\nu$$

qui peuvent avoir des dimensions différentes. En fait, on peut se ramener au cas où tous les Z_k sont de codimension ≥ 2 . En effet, si disons Z_1 est de codimension 1, défini par une équation réduite $f = 0$ (où f est une fonction holomorphe près de $\underline{0}$), alors chaque coefficient a_i est divisible par f , et donc $v = f \cdot \tilde{v}$ avec \tilde{v} holomorphe. Quitte à répéter plusieurs fois cette opération, si nécessaire, on peut supposer \tilde{v} non identiquement nul le long de Z_1 . Autrement dit, \tilde{v} s'annule maintenant sur $Z' = Z'_1 \cup \cdots \cup Z_\nu$, où $Z'_1 \subset Z_1$ est un sous-ensemble analytique stricte de Z_1 , de codimension ≥ 2 dans l'espace ambiant (peut-être pas irréductible). Alors le feuilletage régulier $\mathcal{F}_{\tilde{v}}$ défini par \tilde{v} sur $U \setminus Z'$ étend le feuilletage \mathcal{F}_v initialement défini sur l'ouvert plus petit $U \setminus Z$. Les points de $Z_1 \setminus Z'_1$ sont des fausses singularités pour le feuilletage, des singularités artificielles dues à un mauvais choix du champ de vecteur. Par la suite, on ne considèrera que des feuilletages définis par des champs de vecteurs holomorphes dont le lieu d'annulation est de codimension ≥ 2 . Réciproquement, on a la

Proposition 27. — *Si \mathcal{F} est un feuilletage holomorphe régulier de dimension 1 défini sur $U \setminus Z$ où $U \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert et $Z \subset U$ un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 , alors \mathcal{F} est défini par un champ de vecteur holomorphe sur U .*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert $U \setminus Z = \cup_i U_i$ et, sur chaque ouvert U_i , un champ de vecteur v_i holomorphe non nul définissant le feuilletage (régulier) $\mathcal{F}|_{U_i}$. Sur $U_i \cap U_j$, on a $v_i = f_{ij}v_j$ pour une fonction holomorphe non nulle f_{ij} . L'un au moins des coefficients de v_i n'est pas identiquement nul, disons celui de ∂_{z_1} ; par prolongement analytique, il en est de même pour tous les v_j (il faut peut-être travailler composante-par-composante si U a plusieurs composantes connexes). Après division par ce coefficient, le feuilletage \mathcal{F} est maintenant défini sur U_i par un champ de vecteur méromorphe \tilde{v}_i de la forme

$\partial_{z_1} + a_2(\underline{z})\partial_{z_2} + \cdots + a_n(\underline{z})\partial_{z_n}$, tout du moins en dehors des pôles des coefficients. Cette écriture est unique, et cette unicité force les \tilde{v}_i à être maintenant identiques sur chaque intersection $U_i \cap U_j$; autrement dit, les fonctions méromorphes $a_k(\underline{z})$ se recollent deux à deux pour former des fonctions méromorphes sur $U \setminus Z$ tout entier (on suppose désormais U connexe). En particulier, chaque coefficient se prolonge méromorphiquement à U tout entier (version méromorphe d'Hartogs) et s'écrit $a_k = \frac{f_k}{g_k}$ pour des fonctions holomorphes $f_k, g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$. Soit g le plus petit multiple commun des g_k ; alors $g \cdot \tilde{v}$ est maintenant un champ de vecteur holomorphe sur U définissant le feuilletage \mathcal{F} sur $U \setminus Z$. \square

Cette proposition rend naturelle la définition suivante.

Définition 28. — *Un feuilletage holomorphe singulier de dimension 1 sur une variété complexe M est la donnée d'un recouvrement ouvert $M = \cup_i U_i$, et pour chaque ouvert U_i , d'un champ de vecteur v_i holomorphe dont le lieu d'annulation est de codimension ≥ 2 , et compatibles au sens suivant : sur $U_i \cap U_j$, $v_i = f_{ij}v_j$ pour une fonction holomorphe f_{ij} .*

Le lieu singulier correspond alors au lieu d'annulation des champs de vecteurs v_i dans les ouverts U_i . Il s'agit ici de vraies singularités : lorsque le lieu singulier Z est de codimension ≥ 2 , le feuilletage (régulier) ne peut se prolonger en aucun point de Z .

3.3. Feuilletages de codimension 1. — La situation est similaire à la précédente. Pour résumer, on a la définition

Définition 29. — *Un feuilletage holomorphe singulier de codimension 1 sur une variété complexe M est la donnée d'un recouvrement ouvert $M = \cup_i U_i$, et pour chaque ouvert U_i , d'une 1-forme ω_i holomorphe intégrable, $\omega_i \wedge d\omega_i \equiv 0$, dont le lieu d'annulation est de codimension ≥ 2 , et compatibles au sens suivant : sur $U_i \cap U_j$, $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ pour une fonction holomorphe f_{ij} .*

On démontre alors, de la même manière, la proposition

Proposition 30. — *Si \mathcal{F} est un feuilletage holomorphe régulier de codimension 1 défini sur $U \setminus Z$ où $U \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert et $Z \subset U$ un*

sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 , alors \mathcal{F} est défini par une 1-forme holomorphe sur U .

Finalement, en dimension 2, les feuilletages holomorphes singuliers sont à singularités isolées et se définissent aussi bien par des 1-formes que par des champs de vecteurs.

3.4. Singularités en dimension 2. — Considérons maintenant un feuilletage holomorphe \mathcal{F} avec singularité isolée à l'origine de \mathbb{C}^2 . Concrètement, \mathcal{F} est par exemple défini par un champ de vecteur v qui, sur un voisinage de $\underline{0}$, ne s'annule qu'en $\underline{0}$. Notons (x, y) les variables complexes de \mathbb{C}^2 puis écrivons

$$v = (\alpha x + \beta y)\partial_x + (\gamma x + \delta y)\partial_y + \{\text{termes d'ordre} \geq 2\}.$$

Écrivons sous-forme matricielle

$$M_v := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

la partie linéaire de v . Considérons un changement de coordonnées $\phi : (\mathbb{C}^2, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$ et notons aussi sous forme matricielle sa différentielle en $\underline{0}$

$$D_{\underline{0}}\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors la partie linéaire de ϕ^*v est donnée par

$$M_{\phi^*v} = (D_{\underline{0}}\phi)^{-1} \cdot M_v \cdot D_{\underline{0}}\phi.$$

Ceci entraîne par exemple que les parties linéaires de v et ϕ^*v ont même valeurs propres ; autrement dit, ça a un sens de parler des valeurs propres $\{\mu_1, \mu_2\}$ d'un champ de vecteur en un point singulier, et ça ne dépend pas des coordonnées dans lesquelles on se place.

Par contre, pour toute fonction holomorphe non nulle $f(x, y)$, le champ de vecteur $f \cdot v$ définit le même feuilletage mais n'a certainement pas les mêmes valeurs propres : sa partie linéaire est multipliée par $f(\underline{0})$. Par conséquent, seule la classe $(\mu_1 : \mu_2) \in \mathbb{P}^1$ modulo multiplication par un scalaire est bien définie... et encore, à permutation près des deux valeurs propres. Le bon invariant de conjugaison, pour le feuilletage \mathcal{F} , est $\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1}$ qui est, quant à lui, bien défini dans \mathbb{P}^1 dès lorsque de v (ou

\mathcal{F}) a au moins une valeur propre non nulle. En fait, on appelle invariant de Baum-Bott le nombre

$$BB_{\underline{0}}\mathcal{F} := \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} + 2$$

qui peut se définir via la géométrie différentielle pour n'importe quelle singularité (même dégénérée, avec deux valeurs propres nulles).

Lorsque \mathcal{F} est défini par un champs de vecteurs linéaire, on parle de feuilletage linéaire. Modulo changement de coordonnées (linéaires) et multiplication par un scalaire, on peut supposer que \mathcal{F} est défini par

$$x\partial_x + \mu y\partial_y, \quad \mu \in \mathbb{C}^*, \quad \text{ou encore} \quad (x+y)\partial_x + y\partial_y.$$

On exclue ici les cas $x\partial_x$ (i.e. $\mu = 0$) et nilpotent $y\partial_x$ qui ne sont pas à singularité isolée et se ramènent tous deux, après division, à un feuilletage régulier. Concentrons-nous sur la famille paramétrée par μ . Le feuilletage est aussi défini par $\frac{dy}{dx} = \mu \frac{y}{x}$, ou encore par la 1-forme méromorphe fermée

$$\omega = \frac{dy}{y} - \mu \frac{dx}{x}$$

En intégrant, on construit une intégrale première multiforme

$$H(x, y) = \frac{y}{x^\mu}$$

Les feuilles sont toutes paramétrées par

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 ; t \mapsto (x_0 \exp(t), y_0 \exp(\mu t)).$$

Ce sont les graphes des fonctions multiformes $y(x) = y_0 \cdot x^\mu := y_0 \exp(\mu \log(x))$ où \log est par exemple la détermination principale du logarithme disons au voisinage de $x = 1$; lorsqu'on les prolonge analytiquement en tournant dans le sens direct autour de 1, on obtient une autre solution locale, celle de condition initiale $e^{2i\pi\mu}y_0$. Deux feuilles particulières sont données par les axes de coordonnées $xy = 0$ privés de l'origine, qui est la singularité. Les autres feuilles s'enroulent plus ou moins selon la valeur de μ .

Cas $\mu \in \mathbb{Q}$. On écrit $\mu = \pm \frac{p}{q}$ et l'intégrale première devient $H(x, y) = x^p y^q$ ou $\frac{x^p}{y^q}$ (selon le signe de μ). Les feuilles sont fermées (excepté en $\underline{0}$ dans le second cas) ; leur adhérence décrit un pinceau de courbes algébriques.

Cas $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Chaque feuille L (autre que les axes de coordonnées) est transverse aux droites verticales $x = x_0$; pour comprendre leur adhérence, il suffit essentiellement de comprendre leur intersection par exemple à la droite $x = 1$:

$$E := L \cap \{x = 1\} = \{(1, y_0 e^{2i\pi k \mu}) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dès que μ n'est plus rationnel, cet ensemble E est infini ; dans le cas présent $\mu \in \mathbb{R}$, la multiplication par $e^{2i\pi \mu}$ est une rotation irrationnelle et E est une orbite sous cette action. Il s'en suit que E est dense dans le cercle $|y| = |y_0|$; donc l'adhérence \overline{L} intersecte la droite $x = 1$ le long d'un cercle (réel). En fait, en étudiant le comportement radial du feuilletage (comment se comportent les feuilles au dessus des droites réelles passant par $\underline{0}$ dans l'axe des x) on voit que \overline{L} est une sous-variété analytique réelle de codimension 1... sauf au point $\underline{0}$ dans le cas $\mu > 0$, où \overline{L} a une singularité qui n'admet pas déquation analytique réelle ; topologiquement, c'est un cône de base un tore.

Cas $\mu \notin \mathbb{R}$. On parle alors de singularité hyperbolique. Les feuilles sont simplement connexes et adhèrent exactement aux deux axes de coordonnées.

Théorème 31 (Poincaré). — *Soit v un champ de vecteur holomorphe à singularité isolée à l'origine $\underline{0}$ de \mathbb{C}^2 . On suppose la singularité hyperbolique : ses valeurs propres sont non nulles et leur quotient est non réel $\mu := \frac{\mu_1}{\mu_2} \notin \mathbb{R}$. Alors il existe un changement de coordonnées holomorphe $\phi : (\mathbb{C}^2, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$ tel que $v = \phi^* \{\mu_1 x \partial_x + \mu_2 y \partial_y\}$.*

Autrement dit, on peut éliminer les termes non linéaires par changement de coordonnées. Ce résultat reste vrai pour $\mu > 0$ excepté lorsque μ ou $\frac{1}{\mu}$ est entier, auquel cas on ne peut éliminer certains termes non linéaires (un nombre fini) ; on parle de résonance. Par contre, lorsque $\mu < 0$, viennent s'ajouter des phénomènes de divergence : ϕ existe génériquement en tant que série formelle, mais diverge aussi génériquement.

Nous avons évoqué au dessus l'invariant de Baum-Bott pour les singularités de feuilletages qui s'exprime facilement en fonction des valeurs propres dans le cas des singularités non dégénérées. Signalons deux autres invariants classiques à valeur entière plus facile à décrire en toute généralité. Un premier est l'ordre d'annulation de la 1-forme $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ à zéro isolé qui le définit :

$$\text{ord}_{\underline{0}}\mathcal{F} := \min\{\text{ord}_{\underline{0}}f, \text{ord}_{\underline{0}}g\}$$

(plus petit degré de monome non nul dans le développement de Taylor de ω en $\underline{0}$).

Un autre invariant classique des singularités de feuilletages est la **multiplicité** (ou **nombre de Milnor**, en analogie aux courbes planes). Si le feuilletage \mathcal{F} est défini par la 1-forme $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ à singularité isolée, alors on définit :

$$m_{\underline{0}}(\mathcal{F}) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, g \rangle},$$

la dimension de l'anneau local divisé par l'idéal engendré par les coefficients de ω . Puisque ω est à singularité isolée, la dimension est finie et

- $m_{\underline{0}}(\mathcal{F}) = 0$ si et seulement si \mathcal{F} est régulier en $\underline{0}$,
- $m_{\underline{0}}(\mathcal{F}) = 1$ si et seulement si \mathcal{F} est non dégénérée, avec deux valeurs propres non nulles.

L'avantage de ce second invariant est qu'il est additif : si \mathcal{F}_t est une famille à paramètre $t \in [0, 1]$ de feuilletages uniformément définie sur la boule de rayon 2 centrée en $\underline{0}$ sans singularité (pour aucun t) disons sur la sphère de rayon 1, alors la somme des multiplicités des singularités de \mathcal{F}_t à l'intérieur de la boule de rayon 1 est constante, indépendante de t .

Par exemple, la famille de feuilletages définie par

$$\omega_t = ydx + (x^k - t)dy$$

possède

- 1 singularité d'ordre 1 et de multiplicité k pour $t = 0$,
- k singularités d'ordre 1 et de multiplicité 1 pour $t \neq 0$.

3.5. Réduction des singularités. — Une partie de la théorie des singularités de feuilletages holomorphes en dimension 2 s'inspire de la théorie des singularités de courbes planes ou de fonctions. Un résultat important de la théorie est le fait qu'après un nombre fini d'éclatements, on se ramène à des singularités non dégénérées, c'est à dire ayant au moins une valeur propre non nulle.

Rappelons qu'un éclatement (en dimension 2) est localement décrit par l'éclatement standard de $\underline{0} \in \mathbb{C}^2$: c'est la donnée de

$$\Pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2 ; (x, y, (X : Y)) \mapsto (x, y)$$

où $M \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ est la surface (lisse) définie par $Xy - xY = 0$. La préimage du point (x, y) est :

- le point $(x, y, (x : y)) \in M$ lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$ et
- la droite projective $(0, 0, (X : Y))$, $(X : Y) \in \mathbb{P}^1$, lorsque $(x, y) = (0, 0)$.

La variété M est décrite par deux cartes. La première, donnée par

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow M ; (x, t) \mapsto (x, xt, (1 : t)),$$

paramétrise l'ouvert $X \neq 0$ dans M ; la seconde, donnée par

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow M ; (T, y) \mapsto (Ty, y, (T : 1)),$$

paramétrise l'ouvert $Y \neq 0$ dans M . Ainsi, M s'obtient en recollant les deux copies de \mathbb{C}^2 par l'identification $(T, y) = (\frac{1}{t}, tx)$ là où $t \neq 0$ et $T \neq 0$.

Si \mathcal{F} est un feuilletage singulier à l'origine de \mathbb{C}^2 , défini disons par une 1-forme holomorphe ω au voisinage de $(x, y) = (0, 0)$, alors $\Pi^*\omega$ est une 1-forme holomorphe qui s'annule le long de $E := \Pi^{-1}(\underline{0})$. Dans la première carte, après division par x (ou une puissance convenable), la 1-forme n'a plus que des zéros isolés. En procédant de même dans la seconde carte, on définit un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ à singularités isolées sur un voisinage de E dans M : c'est le tiré en arrière $\Pi^*\mathcal{F}$ du feuilletage en bas. Voyons ça sur un exemple.

Considérons une 1-forme polynomiale, homogène de degré $d \geq 2$:

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

avec P, Q homogènes de degré d . La singularité est dégénérée en $\underline{0}$. Après éclatement de l'origine, la 1-forme ω se relève dans la première carte en

$$\Pi^*\omega = x^d ((P(1, t) + tQ(1, t))dx + xQ(1, t)).$$

Il peut arriver deux choses :

- ou bien $P(1, t) + tQ(1, t) \equiv 0$ et le feuilletage \mathcal{F} était le feuilletage radial (en fait $\omega = h(x, y)(xdy - ydx)$ où $h(x, y)$ est homogène de degré $d - 1$) ;
- ou bien $P(1, t) + tQ(1, t) \not\equiv 0$ et le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est défini par la 1-forme holomorphe à zéros isolés $\frac{\Pi^*\omega}{x^d}$.

En fait, le polynôme $P(1, t) + tQ(1, t)$ n'est autre (à un facteur x^{d+1} près) que le polynôme homogène $H(x, y) := \omega(x\partial_x + y\partial_y) = xP(x, y) + yQ(x, y)$ de degré $d + 1$; il s'annule précisément sur le lieu de tangence entre \mathcal{F} et le champ de vecteur radial $x\partial_x + y\partial_y$. Son **cône tangent** va déterminer le lieu des singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$. En effet, le feuilletage éclaté $\tilde{\mathcal{F}}$ est défini dans la première carte par la 1-forme $h(t)dx + xQ(1, t)dt$, qui s'annule le long du diviseur exceptionnel $E : \{x = 0\}$ précisément là où h s'annule. Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ a donc $\leq d + 1$ singularités le long de E , le complément $E \setminus \{\text{singularités}\}$ formant une feuille du feuilletage ; on dit que E est invariant par $\tilde{\mathcal{F}}$.

Examinons plus en détails le cas générique où $H(x, y) = \lambda(y - t_1x) \cdots (y - t_{d+1}x)$ n'a que des facteurs simples, aucun n'étant vertical ; de manière équivalente, $h(t) = \lambda(t - t_1) \cdots (t - t_{d+1})$ a exactement $d + 1$ racines simples. Alors les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont toutes dans la première carte, données par $(x, t) = (0, t_k)$, $k = 1, \dots, d + 1$. Remarquons maintenant que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est aussi défini par la 1-forme méromorphe fermée

$$\frac{\Pi^*\omega}{x^{d+1}h(t)} = \frac{dx}{x} + \frac{Q(1, t)}{P(1, t) + tQ(1, t)}dt = \frac{dx}{x} + \sum_{k=1}^{d+1} \mu_k \frac{dt}{t - t_k}.$$

Dans le membre de droite, on a développé la fraction $\frac{Q(1, t)}{P(1, t) + tQ(1, t)}$ en éléments simples. Notons aussi que cette 1-forme est exactement le tiré en arrière par Π de la 1-forme rationnelle $\frac{\omega}{H(x, y)}$, elle aussi fermée. En comparant les termes dominants des numérateur et dénominateur de

$\frac{Q(1,t)}{P(1,t)+tQ(1,t)}$, on note par ailleurs que

$$\mu_1 + \cdots + \mu_{d+1} = 1.$$

La 1-forme $x(t-t_k)\frac{\Pi^*\omega}{x^{d+1}h(t)}$ est holomorphe à singularité isolée en $(x, t) = (0, t_k)$; en la développant en série entière au voisinage de ce point, on vérifie immédiatement que la partie linéaire (de $\tilde{\mathcal{F}}$) est donnée par

$$(t-t_k)dx + \mu_k x dt \quad \text{ou encore} \quad (t-t_k)\partial_t - \mu_k x \partial_x.$$

Notons enfin qu'en jouant sur les coefficients de P et Q , on peut choisir les μ_k arbitrairement, modulo l'unique contrainte que leur somme doit être égale à 1.

Si, au lieu d'une 1-forme polynomiale homogène de degré d , nous étions parti d'une 1-forme holomorphe

$$\omega = \omega_d + \omega_{d+1} + \omega_{d+2} + \cdots$$

s'annulant à l'ordre d , nous serions arrivé sensiblement aux mêmes conclusions : si $H(x, y) := \omega_d(x\partial_x + y\partial_y)$ n'est pas identiquement nul et n'a que des facteurs simples, alors

- le diviseur exceptionnel $E = \Pi^{-1}(\underline{0})$ est invariant par $\tilde{\mathcal{F}} = \Pi^*\mathcal{F}$,
- le cône tangent de $H = 0$ détermine les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long de E ,
- les “valeurs propres” de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont $\{1, -\mu_k\}$ où les μ_k sont déterminés à partir de ω_d comme au dessus.

Par contre, lorsque $H(x, y)$ possède un facteur multiple (ou $h(t)$ une racine multiple), il se peut que le point correspondant soit dégénéré, c'est à dire qu'il ait les deux valeurs propres nulles. Dans ce cas, on peut éclater ce nouveau point ; le résultat suivant (voir [MM80]) nous dit que cette stratégie nous amène après un nombre fini d'éclatements à un feuilletage à singularités non dégénérées.

Théorème 32 (Seidenberg). — *Étant donné un feuilletage \mathcal{F} à singularité isolée à l'origine $\underline{0}$ de \mathbb{C}^2 , il existe une application holomorphe propre*

$$\Pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$$

consistant en une suite finie d'éclatements au dessus de $\underline{0}$, telle que

- *le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}} := \Pi^*\mathcal{F}$ se prolonge le long du diviseur exceptionnel,*

- chaque singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ possède au moins une valeur propre non nulle.

La stratégie est la suivante : à chaque étape, on éclate toutes les singularités dégénérées. L'énoncé affirme qu'après un nombre fini d'étapes, il ne reste plus aucune singularité dégénérée. Il existe des énoncés plus précis, notamment concernant la position relative du feuilletage par rapport au diviseur exceptionnel. Nous n'en parlerons pas ici.

3.6. Existence de courbe invariante. — Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier à l'origine de \mathbb{C}^2 . On appelle **courbe invariante** toute courbe plane C tangente à \mathcal{F} : les branches sont des feuilles de \mathcal{F} , une fois enlevée la singularité. Si la courbe C admet pour équation $f = 0$, et si \mathcal{F} est défini par la 1-forme ω holomorphe à singularité isolée, alors sont équivalents

- C est \mathcal{F} -invariante (une courbe invariante pour \mathcal{F}),
- $\frac{df}{f} \wedge \omega$ est holomorphe (ou encore f divise $df \wedge \omega$).

Si C est lisse et transverse à l'axe des y , elle admet alors une paramétrisation $y(x)$; c'est alors une solution de l'équation différentielle associée à $\omega = 0$ en un point singulier où on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Par exemple, si \mathcal{F} est défini par $\omega = d(x^p y^q)$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, alors les deux axes de coordonnées (et leur réunion $xy = 0$) sont des courbes invariantes ; les deux composantes connexes de $\{xy = 0\} \setminus \{\underline{0}\}$ sont deux feuilles. Par contre, les autres feuilles, $x^p y^q = c$ avec $c \neq 0$, n'adhèrent pas à $\underline{0}$ et ne donnent donc pas naissance à des courbes invariantes en $\underline{0}$. Le feuilletage n'a que deux courbes invariantes irréductibles en $\underline{0}$.

Si maintenant $\omega = xdy - \mu ydx$ est hyperbolique, i.e. $\mu \notin \mathbb{R}$, alors rappelons que, en dehors des axes de coordonnées, toutes les feuilles accumulent ces axes et en particulier l'origine. Elles ne sont cependant pas analytiques en $\underline{0}$ et ne donnent pas non plus naissance à une courbe invariante. De nouveau, seuls les axes de coordonnées sont des courbes invariantes.

Regardons enfin le cas où $\omega = d(x^p/y^q)$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors dans ce cas, chaque feuille donne naissance à une courbe invariante $x^p = cy^q$; on a donc une infinité de courbes invariantes.

Dans chacun de ces cas, on voit que le feuilletage a deux courbes invariantes lisses et transverses. En ce sens, les singularités non dégénérées sont un analogue pour les feuilletages des croisements ordinaires pour les courbes planes.

Une autre observation importante est

Proposition 33. — Soit $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ une équation différentielle avec second membre méromorphe au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 . Supposons que $\underline{0}$ soit un point d'indétermination du second membre, i.e. un point singulier du feuilletage associé. Si c'est une singularité hyperbolique, alors il existe au moins une solution holomorphe locale $y(x)$ satisfaisant $y(0) = 0$.

En effet, une singularité hyperbolique ayant deux courbes invariantes lisses et transverses, l'une au moins n'est pas verticale et peut être paramétrée par la variable x . Par contre, une singularité non dégénérée peut n'avoir qu'une seule courbe invariante ; c'est le cas des singularités de Poincaré-Dulac

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky + x^k}{x}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Le champ de vecteur associé $x\partial_x + ky\partial_y + x^k\partial_y$ a pour valeurs propres $\{1, k\}$. On intègre l'équation différentielle ci-dessus par la méthode de variation de la constante et on trouve que toute solution s'écrit

$$y(x) = (c + \log(x))x^k, \quad c \in \mathbb{C}$$

et a une infinité de détermination arbitrairement proche de $x = 0$; aucune de ces solutions ne donne lieu à une courbe invariante. La seule courbe invariante est donnée par l'axe vertical. En fait, on a le (voir [MM80]) :

Théorème 34 (Briot-Bouquet). — Soit v un champ de vecteur holomorphe à singularité isolée dont la partie linéaire est de la forme $v = x\partial_x + \mu y\partial_y + \dots$. Si $\mu \notin \mathbb{N}_{\leq 2}$, alors il existe une courbe lisse invariante, dont la tangente en $\underline{0}$ est donnée par l'axe des x .

On en déduit que toute singularité non dégénérée a au moins une courbe (lisse) invariante en remarquant que si $\mu \in \mathbb{N}_{\leq 2}$, alors le théorème s'applique après permutation des deux variables x et y ($\frac{1}{\mu}$ ne peut pas être entier). Pour être tout à fait rigoureux, il reste le cas où la partie linéaire n'est pas diagonalisable ($\mu = 1$) ; mais dans ce cas, Poincaré et Dulac montrent qu'on peut linéariser le champ de vecteur par changement de coordonnées holomorphe : on est ramené au modèle de la liste ci-dessus avec $k = 1$ pour lequel il y a une courbe invariante.

Il aura fallu attendre un siècle pour que l'existence d'une courbe invariante soit démontrée en toute généralité [CS82] :

Théorème 35 (Camacho-Sad). — *Soit \mathcal{F} un feuilletage à singularité isolée à l'origine de \mathbb{C}^2 . Alors il existe une courbe invariante.*

Par conséquent, toute équation $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ à second membre méromorphe admet, en tout point $x = x_0$, et pour toute condition initiale $y = y_0$ tels que f et g soient définis en (x_0, y_0) et $x - x_0$ ne divise pas g , une solution **algébroïde** $y(x) = h((x - x_0)^{1/k})$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et h holomorphe) satisfaisant $y(x_0) = y_0$.

Démontrons l'existence d'une courbe invariante dans le cas particulier des feuilletages que nous avons éclaté plus haut en section 3.5 : on suppose \mathcal{F} donné par $\omega = \omega_d + \dots$ où ω_d est homogène de degré d et $H := \omega_d(x\partial_x + y\partial_y)$ non identiquement nul, ayant $d + 1$ racines simples. En reprenant les notations plus haut, on a, après éclatement et dans la première carte, $d + 1$ singularités $(x, t) = (0, t_k)$ dont les parties linéaires sont respectivement données par $(t - t_k)\partial_t - \mu_k x\partial_x$, $k = 1, \dots, d + 1$. Lorsque $\mu_k \notin \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}^*}$, la singularité possède deux courbes invariantes, l'une d'entre-elles étant le diviseur exceptionnel E qui est invariant ; l'autre, disons C_k , est donc transverse au diviseur exceptionnel et descend en une courbe analytique lisse à l'origine de \mathbb{C}^2 . Ainsi, pour des μ_k suffisamment génériques (rappelons qu'ils ne sont liés que par la seule relation $\mu_1 + \dots + \mu_{d+1} = 1$), le feuilletage \mathcal{F} a $d + 1$ courbes lisses invariantes et elles sont deux-à-deux transverses. Si l'on ne suppose plus les μ_k génériques, nous voulons montrer qu'au moins une des $d + 1$ singularités possède une courbe invariante dans la direction ∂_x . Si ce n'était pas le

cas, par Briot-Bouquet, on aurait $-\frac{1}{\mu_k} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ pour $k = 1, \dots, d+1$; mais ceci contredirait alors la relation $\mu_1 + \dots + \mu_{d+1} = 1$, CQFD.

Pour démontrer leur théorème dans le cas général, Camacho et Sad commencent par réduire les singularités à l'aide du théorème de Seidenberg : après éclatements, le diviseur exceptionnel E , préimage de $\underline{0}$, est une courbe à croisements normaux, union finie de courbes irréductibles lisses $E = E_1 \cup \dots \cup E_N$, toutes isomorphes à \mathbb{P}^1 . Le feuilletage éclaté $\tilde{\mathcal{F}}$ n'a que des singularités non dégénérées. Si une des composantes E_i n'est pas invariante, alors on trouvera un morceau de feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ transverse à E_i qui se projettera une courbe \mathcal{F} -invariante en $\underline{0}$. On peut donc supposer toutes les composantes E_i invariantes par $\tilde{\mathcal{F}}$. Il faut alors montrer qu'il existe au moins une singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la partie lisse du diviseur E qui ait une valeur propre pour laquelle on peut conclure à l'aide de Briot-Bouquet à l'existence d'une courbe $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante transverse à E . L'ingrédient fondamental de la preuve, qui sera utilisé dans un contexte différent lors de la prochaine section, est la formule de l'indice de Camacho-Sad qui généralise la relation $\mu_1 + \dots + \mu_{d+1} = 1$ utilisée dans le cas particulier au dessus.

Soit \mathcal{F} un feuilletage à singularité isolée en $\underline{0}$ et C une courbe lisse \mathcal{F} -invariante, disons $y = 0$ pour simplifier. Alors \mathcal{F} est défini par

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

où $f(x, y)$ est méromorphe, s'annulant le long de C . Ainsi, on peut écrire $f(x, y) = y\tilde{f}(x, y)$ et ré-écrire

$$\frac{dy}{y} = \tilde{f}(x, y)dx$$

avec \tilde{f} holomorphe en restriction à $C \setminus \{0\}$. En particulier, la restriction $\tilde{f}(x, 0)dx$ est une 1-forme méromorphe sur C ; son résidu est l'**indice de Camacho-Sad** :

$$CS_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C) := \text{Res}_{x=0} \tilde{f}(x, 0)dx.$$

Si \mathcal{F} est une singularité non dégénérée, disons définie par $v = x\partial_x + \mu y\partial_y + \dots$, alors $CS_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C) = \mu$; mais la définition au dessus est aussi valide dans le cas dégénéré.

Dans un cadre plus global, lorsqu'un feuilletage singulier \mathcal{F} admet une courbe lisse et compacte C invariante, la **formule de Camacho-Sad** relie l'**auto-intersection** de C avec la somme des indices des points singuliers de \mathcal{F} le long de C . L'auto-intersection, notée $C \cdot C$, est un entier (positif ou négatif) mesurant le nombre d'intersections entre C et une petite déformation C^∞ de C ; en la supposant transverse à C , on peut compter les points d'intersection avec signe (on a l'orientation complexe naturelle). Une autre façon de le définir est de considérer le fibré normal de C dans la surface ambiante S : c'est le quotient du fibré $TS|_C$ tangent à S restreint à C par le sous-fibré $TC \subset TS|_C$ tangent à C

$$N_C := TS|_C/TC$$

Alors $C \cdot C$ n'est autre que le degré du fibré normal N_C (ou encore sa première classe de Chern pour ceux qui connaissent). Par exemple, le diviseur exceptionnel E après un éclatement de l'origine est d'auto-intersection -1 . Par ailleurs, lorsqu'on éclate un point d'une courbe C , son éclatée stricte $\tilde{C} := \Pi^{-1}(C) \setminus E$ a pour auto-intersection $\tilde{C} \cdot \tilde{C} = C \cdot C - 1$. Ceci permet de suivre les auto-intersections de chaque composante E_i du diviseur exceptionnel le long du processus de réduction des singularités.

Lemme 36 (Camacho-Sad). — *Soit \mathcal{F} un feuilletage à singularités isolées sur une surface complexe S et $C \subset S$ une courbe complexe lisse et compacte, invariante par \mathcal{F} . Alors on a*

$$C \cdot C = \sum_{p \in C} CS_p(\mathcal{F}, C).$$

Notons que la somme de droite est en fait finie puisque $CS_p(\mathcal{F}, C) = 0$ pour tout point régulier du feuilletage \mathcal{F} .

Lorsque C est la fibre d'une fibration holomorphe sur \mathcal{S} , localement triviale au voisinage de C , alors le lemme précédent se ramène facilement au théorème des résidus. En effet, si l'on note $y : S \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ cette submersion avec disons $C = \{y = 0\}$, alors on peut décrire globalement le feuilletage par une équation différentielle de la forme $\frac{dy}{y} = f dx$ où f est une fonction méromorphe sur S , et holomorphe en un point

générique de C (C n'est pas un pôle de f). Alors la formule de Camacho-Sad n'est autre que le théorème de résidus appliqué à la 1-forme $f dx|_C$ méromorphe sur C .

La fin de la preuve du théorème de Camacho-Sad est une combinatoire globale sur le diviseur exceptionnel $E = E_1 \cup \dots \cup E_N$ jouant sur les contraintes données sur chaque composante E_i par la formule de Camacho-Sad afin de montrer l'existence d'un indice permettant de conclure par Briot-Bouquet. Citons [Tom99] où l'argument combinatoire est simplifié, et [Can97] pour une preuve courte et algorithmique, à l'aide du polygône de Newton.

3.7. Feuilletages polynomiaux. — Il y a peu d'ouvrages sur le sujet. Citons le livre de Jouanolou [Jou79] qui date un peu, et attendons la sortie prochaine du livre de Dominique Cerveau, Julie Déserti et Alcides Lins Neto.

Considérons maintenant la version globale, algébrique, de la question précédente. Étant donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

à second membre rationnel, existe-t-il une solution rationnelle $y = R(x)$? ou encore algébrique⁽¹⁾ ? et comment la trouver ?

Avant de préciser plus les choses, rappelons ce qui se passe pour l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x), \quad A, B, C \in \mathbb{C}(x).$$

En général, cette équation n'a pas de solution $y(x)$ rationnelle, ni même algébrique. Un exemple est donné par les équations de Poincaré-Dulac (voir section 3.6) ; par contre, il y a toujours la "solution verticale" $x = 0$. L'algorithme de Kovacic (implémenté sur le logiciel Maple) permet, étend donnée une équation de Riccati explicite, de décider en temps fini si elle possède une solution rationnelle, et si oui, d'en donner une explicite. La

⁽¹⁾Par fonction algébrique, on entend une fonction analytique multiforme $y(x)$ définie implicitement par une équation polynomiale $P(x, y(x)) = 0$.

difficulté dans ce genre de problème est de borner le degré de la solution rationnelle ; une fois qu'on a une borne, disons d , il suffit de substituer

$$y(x) = \frac{a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0}{b_d x^d + \cdots + b_1 x + b_0}$$

dans l'équation, en déduire les équations imposées sur les coefficients a_k et b_k puis les résoudre, par exemple avec Maple. Mais on ne sait pas en général borner *a priori* le degré d'une solution (supposant qu'elle existe) à partir de l'équation. C'est le **problème de Poincaré**. Par exemple, rappelons que l'équation différentielle linéaire $\frac{dy}{dx} = p \frac{y}{x}$ possède les solutions algébriques $y(x) = cx^p$ qui sont de degré arbitrairement élevé lorsque $p \rightarrow +\infty$. Plaçons nous dans un cadre où ce problème a bien été étudié.

Une équation polynomiale comme au dessus définit un feuilletage \mathcal{F} à singularités isolées dans \mathbb{C}^2 , qui se prolonge à \mathbb{P}^2 vu comme compactification de \mathbb{C}^2 . Précisons ceci. On définit \mathbb{P}^2 comme l'espace des droites vectorielles de \mathbb{C}^3 . Notons (X, Y, Z) les coordonnées de \mathbb{C}^3 ; un élément de \mathbb{P}^2 est la donnée d'un point (X, Y, Z) distinct de l'origine, modulo homothétie. Lorsque $Z \neq 0$, la droite vectorielle intersecte le plan $Z = 1$ en un point et un seul ; autrement dit $(X, Y, Z) \sim (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, 1) =: (x, y, 1)$. Dans la suite, l'ouvert de \mathbb{P}^2 paramétré par

$$\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2 ; (x, y) \mapsto (x : y : 1)$$

sera appelée carte principale. Le plan projectif \mathbb{P}^2 est recouvert par 3 cartes, les deux autres étant définies de la même manière en choisissant les points tels que $X \neq 0$ (respectivement $Y \neq 0$). Par exemple, lorsque $x \neq 0$, le point $(x : y : 1)$ représente aussi le point $(1 : \frac{y}{x} : \frac{1}{x})$ de la seconde carte :

$$\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2 ; (z, w) \mapsto (1 : w : z)$$

et le changement de carte est donc donné par

$$(z, w) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z}\right)$$

(là où $x \neq 0$ et $z \neq 0$). Étant donnée une 1-forme polynomiale $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, disons à zéros isolés, on peut effectuer le changement de carte donné par $(x : y : 1) = (1 : \frac{y}{x} : \frac{1}{x}) =: (1 : w : z)$.

En substituant $(x, y) := (\frac{1}{z}, \frac{w}{z})$, et en supposant P et Q de degré d , on obtient

$$z^{d+2}\omega = \left(\tilde{Q}(z, w)zdw - (\tilde{P}(z, w) + w\tilde{Q}(z, w))dz \right)$$

où $\tilde{P}(z, w) := z^d P(\frac{1}{z}, \frac{w}{z})$ et $\tilde{Q}(z, w) := z^d Q(\frac{1}{z}, \frac{w}{z})$ sont polynomiaux de degré $\leq d$. Ainsi on prolonge le feuilletage \mathcal{F} dans chacune des 3 cartes recouvrant \mathbb{P}^2 en un feuilletage global à singularités isolées. Notons que si l'on part d'une 1-forme ω générique de degré d , on obtient dans les autres cartes une 1-forme qui sera de degré $d + 1$, mais dont la partie homogène de degré $d + 1$ est radiale (multiple de $zdw - wdz$). Nous allons comprendre pourquoi en adoptant un point de vue plus naturel, celui des coordonnées homogènes.

On peut définir un feuilletage singulier sur \mathbb{P}^2 par coordonnées homogènes. En effet, un tel feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{P}^2 induit un "feuilletage conique" $\underline{\mathcal{F}}$ de codimension 1 sur \mathbb{C}^3 : chaque feuille locale de \mathcal{F} définit une famille de droites dans \mathbb{C}^3 décrivant (localement) une hypersurface. La structure conique vient du fait que le feuilletage $\underline{\mathcal{F}}$ (ou encore chacune de ses feuilles) est lui-même feuilleté par les droites issues de l'origine : pour tout point $p \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, la droite issue de l'origine ($\underline{0}p$) est contenue dans la feuille passant par p . Un tel feuilletage est défini par une 1-forme

$$\tilde{\omega} = A(X, Y, Z)dX + B(X, Y, Z)dY + C(X, Y, Z)dZ$$

qui est invariante par homothéties : ceci se traduit par le fait que les coefficients de $\tilde{\omega}$ sont homogènes de même degré, disons $d+1$ (ce décalage sera naturel plus loin). Le fait qu'il ait une structure conique impose que $\tilde{\omega}(X\partial_X + Y\partial_Y + Z\partial_Z) = XA + YB + ZC \equiv 0$. Cette dernière condition entraîne automatiquement que la 1-forme $\tilde{\Omega}$ est intégrable au sens de Frobenius $\tilde{\omega} \wedge d\tilde{\omega} = 0$. Ceci étant, on retrouve le feuilletage \mathcal{F} dans la carte principale par restriction de $\tilde{\omega}$ au plan $Z = 1$:

$$\omega := \tilde{\omega}|_{Z=1} = A(x, y, 1)dx + B(x, y, 1)dy.$$

Maintenant, remarquons que la condition $XA + YB + ZC \equiv 0$ pour $Z = 0$ nous dit que la partie homogène de plus haut degré $d + 1$ de ω doit être radiale, multiple de $xdy - ydx$. Dire que cette partie de degré $d + 1$ est nulle, c'est exactement dire que la droite à l'infini $Z = 0$ est invariante par \mathcal{F} , ce qu'on ne souhaite pas imposer en général, surtout

si l'on veut travailler modulo $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$, le groupe d'automorphismes linéaires de \mathbb{P}^2 .

Finalement, un **feuilletage de degré** d de \mathbb{P}^2 est défini dans la carte principale par une 1-forme

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy + H(x, y)(xdy - ydx)$$

où P et Q sont des polynômes de degré d et H un polynôme homogène de degré d . Réciproquement, la 1-forme homogène $\tilde{\omega} = AdX + BdY + CdZ$ (de degré $d + 1$) est donnée par

$$\begin{cases} A(X, Y, Z) = Z^d \left(ZP\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - YH\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right) \\ B(X, Y, Z) = Z^d \left(ZQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + XH\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right) \\ C(X, Y, Z) = Z^d \left(-XP\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - YQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right) \end{cases}$$

Le degré d du feuilletage est caractérisé géométriquement par le nombre de points de tangences entre une droite générique de \mathbb{P}^2 et le feuilletage \mathcal{F} . Ceci est la raison pour laquelle nous avons choisi le décalage $d + 1$ pour le degré de $\tilde{\omega}$.

Énonçons, sans les démontrer, quelques propriétés.

Lemme 37. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré d de \mathbb{P}^2 . Alors il y a $d^2 + d + 1$ singularités comptées avec multiplicité :*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} m_p \mathcal{F} = d^2 + d + 1.$$

En particulier, tout feuilletage de \mathbb{P}^2 est singulier. Un autre résultat classique [BB72] :

Lemme 38 (Baum-Bott). — *Soit \mathcal{F} un feuilletage de degré d de \mathbb{P}^2 . Alors la somme des indices de Baum-Bott des singularités de \mathcal{F} est donnée par :*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} BB_p \mathcal{F} = (d + 2)^2.$$

degré 0 Tout feuilletage de degré 0 est, à transformation linéaire de \mathbb{P}^2 près, le feuilletage horizontal $dy = 0$. Il a une seule singularité à l'infini, radiale. Ici, toutes les feuilles sont des droites, donc algébriques.

degré 1 Tout feuilletage de degré 1 est, à transformation linéaire de \mathbb{P}^2 près, le feuilletage défini par $v = x\partial_x + \mu y\partial_y$ pour un $\mu \in \mathbb{C}^*$. Il a 3

droites invariantes, à savoir les axes de coordonnées projectives $XYZ = 0$ ($x = 0$, $y = 0$ et la droite à l'infini $Z = 0$). Il a 3 singularités, précisément aux points d'intersection de ces 3 droites. Les autres feuilles sont (d'adhérences) algébriques lorsque $\mu \in \mathbb{Q}$, et transcendantes sinon.

degré ≥ 2 À partir du degré 2, de nombreuses questions restent ouvertes. L'une des plus fameuses est le **problème du minimal exceptionnel** [CLNS88], de nature plutôt dynamique : *est-il vrai que toute feuille d'un feuilletage \mathbb{F} de \mathbb{P}^2 adhère à un point singulier ?* On sait que cette propriété est vérifiée par “un ouvert de feuilletages” ; précisons ceci.

L'espace $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ des feuilletages de degré d sur \mathbb{P}^2 est naturellement paramétré par l'espace des équations, par exemple affines $Pdx + Qdy + H(xdy - ydx) = 0$ où $P, Q, H \in \mathbb{C}[x, y]$ sont polynomiales de degré d , H étant homogène. Comme l'équation est bien définie à une constante multiplicative près, l'espace des feuilletages de degré d s'identifie à l'espace projectif obtenu en projectivant l'espace vectoriel des triplets (P, Q, H) . Puisque l'espace des polynômes (resp. homogènes) de degré d est de dimension $\frac{(d+2)(d+1)}{2}$ (resp. $d + 1$), on obtient

$$\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{P}^N, \quad N = d^2 + 4d + 2.$$

En vérité, $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ s'identifie plutôt un ouvert dans cet espace projectif, puisqu'il faut supprimer les équations qui vont donner un feuilletage de degré $< d$: ceci arrive lorsque la 1-forme $\omega = Pdx + Qdy + H(xdy - ydx)$ se décompose en $\omega_d = F_{d_1}\omega_{d_2}$, $d_1 + d_2 \leq d$, où F_{d_1} est un facteur polynomial de degré d_1 et ω_{d_2} définit un feuilletage de degré d_2 . Pour chaque paire (d_1, d_2) , l'ensemble des feuilletages qui se décomposent ainsi forme un sous-ensemble algébrique de dimension $\frac{(d_1+2)(d_1+1)}{2} + d_2^2 + 4d_2 + 2$ qu'il faut supprimer. Ainsi,

Proposition 39. — *L'espace $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ des feuilletages de degré d sur \mathbb{P}^2 s'identifie à un ouvert de Zariski de \mathbb{P}^N , $N = d^2 + 4d + 2$.*

Maintenant, on peut considérer la topologie usuelle de \mathbb{P}^2 en tant que variété différentiable et la topologie induite sur $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$. On parlera alors d'ouverts de $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ pour la topologie usuelle (ou transcendante). On peut aussi considérer la topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ où les fermés

sont les sous-ensembles algébriques sur \mathbb{C} (sous-ensembles finis, courbes complexes et \mathbb{P}^2 tout entier) ; on parle alors d'ouvert de Zariski de $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$. Enfin, on peut aussi considérer $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ comme variété algébrique réelle de dimension 4 et parler d'ouverts de Zariski réels de $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$; un tel ouvert est dense, de mesure totale par rapport à la mesure de Lebesgue dans chacune des cartes affines.

Ainsi, on peut démontrer [LNS96] :

Théorème 40. — [Lins Neto - Soares] *Pour tout $d \geq 2$, il existe un ouvert de Zariski réel $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ tel que tout $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ satisfait :*

- \mathcal{F} a exactement $d^2 + d + 1$ singularités (deux-à-deux distinctes), toutes hyperboliques ($\mu \notin \mathbb{R}$) ;
- \mathcal{F} n'a aucune courbe algébrique invariante.

Le premier point se montre par des arguments de perturbation standards. Nous donnerons plus loin quelques ingrédients de la démonstration du second point.

Si on revient à la question de nature dynamique au dessus, on a un résultat un peu plus faible :

Théorème 41 (Mjuller, Loray-Rebello). — *Pour tout $d \geq 2$, il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ pour la topologie usuelle (transcendante) tel que tout $\mathcal{F} \in \mathcal{V}$ satisfait :*

- \mathcal{F} a exactement $d^2 + d + 1$ singularités (deux-à-deux distinctes), toutes hyperboliques ($\mu \notin \mathbb{R}$) ;
- toute feuille de \mathcal{F} est dense dans \mathbb{P}^2 .

Ce résultat vient tout d'abord des idées développées par Ilyashenko [Il'78] et a formellement été démontré par Mjuller [Mju75] ; nous l'avons redémontré avec Julio Rebello plus tard [LR03] avec généralisation en dimension supérieure. En particulier, toute feuille accumule au moins un point singulier. Mais on ne sait pas, par exemple, si cette description reste vraie pour un ensemble dense ? voire de mesure totale ?

Revenons au problème d'existence de courbe invariante. Jouanolou a donné le premier exemple explicite de feuilletage sans courbe algébrique invariante [Jou79] ; il donne un exemple en chaque degré $d \geq 2$. Fixons d et notons \mathcal{F}_J ce feuilletage. Un argument standard permet de voir que

l'ensemble des feuilletages de degré d admettant une courbe algébrique de degré k invariante est une sous-variété algébrique $Z_k \subset \mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$. En effet, une telle courbe est définie par $F = 0$ pour un polynôme F de degré k ; le fait qu'elle soit invariante se traduit par $dF \wedge \omega = FGdx \wedge dy$ pour un polynôme G de degré d . Dans l'espace des triplets (ω, F, G) (espace des coefficients), l'égalité $dF \wedge \omega = FGdx \wedge dy$ définit une sous-variété algébrique. Sa projection sur l'espace $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ des ω est donc aussi une sous-variété algébrique, c'est Z_k ; notons $U_k = \mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2) \setminus Z_k$ son complémentaire : c'est l'ensemble des feuilletages n'admettant pas de courbe de degré $\leq k$ invariante. Ainsi, l'espace des feuilletages sans courbes algébrique invariante est l'intersection

$$U_\infty := \bigcap_{k \geq 0} U_k.$$

Ces ouverts sont emboîtés, chacun d'eux est dense et, d'après Jouanolou, leur intersection est non vide. D'après le théorème de Baire, U_∞ est dense dans $\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$; cet ensemble est même de mesure totale. Pour montrer qu'il contient un ouvert de Zariski réel, il faut d'autres arguments. Pour cela, commençons par énoncer un résultat, obtenu en dimension $d = 2$ par Adolfo Guillot dans sa thèse, et généralisé plus tard en dimension arbitraire par Lins Neto et Pereira [LNP06].

Si l'on considère un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$ ayant exactement $d^2 + d + 1$ points singuliers, on peut lui associer la collection $\{b_1, \dots, b_{d^2+d+1}\}$ des invariants de Baum-Bott, $b_i = \mu_i + \frac{1}{\mu_i} + 2$, ce qui définit un point de la puissance symétrique $\mathbb{C}^{(d^2+d+1)}$ de \mathbb{C} . C'est l'application de Baum-Bott. Concrètement, les coordonnées de $\mathbb{C}^{(d^2+d+1)}$ sont les polynômes symétriques élémentaires $s_1 = \sum_i b_i$, $s_2 = \sum_{i < j} b_i b_j$, ... , $s_{d^2+d+1} = \prod_i b_i$. L'image est contenue dans l'hyperplan H_{BB} défini par la relation de Baum-Bott $s_1 = (d + 2)^2$.

Théorème 42 (Guillot, Lins Neto-Pereira). — *L'application de Baum-Bott définit une application rationnelle et dominante :*

$$\mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2) \dashrightarrow H_{BB} \subset \mathbb{C}^{(d^2+d+1)}$$

Ceci signifie en particulier que l'application localement surjective au voisinage d'un feuilletage \mathcal{F} comme au dessus, là où elle est bien définie.

Autrement-dit, toute déformation des μ_i satisfaisant la relation $\sum_i \mu_i + \frac{1}{\mu_i} + 2 = (d+2)^2$ est réalisable par une déformation du feuilletage \mathcal{F} . Il est alors facile de déduire l'existence d'un feuilletage dont toutes les singularités sont hyperboliques, et même de démontrer, par des arguments analogues à ceux employés au dessus, que cette condition est satisfaite pour un ouvert de Zariski réel $V \subset \mathcal{F}^d(\mathbb{P}^2)$. En effet, il suffit de faire en sorte qu'aucun des b_i ne soit réel.

Supposons maintenant $\mathcal{F} \in V$ comme au dessus : \mathcal{F} a exactement $d^2 + d + 1$ singularités hyperboliques. La formule de Camacho-Sad nous dit que si une courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ irréductible de degré k et invariante par \mathcal{F} , alors

$$\sum_{p \in C} CS_p(\mathcal{F}, C) = C \cdot C$$

D'abord, $C \cdot C$ est le nombre d'intersection de C avec une courbe C' proche, de degré k : par le théorème de Bézout, on a donc $C \cdot C = k^2$. Par ailleurs, il faut bien comprendre ce que signifie la somme à gauche lorsque C est singulière. En un point régulier du feuilletage, la courbe C est une feuille locale, donc non singulière. Par contre, à chaque point singulier p_i de \mathcal{F} que la courbe C rencontre, la courbe induit une courbe locale invariante qui peut être singulière, non nécessairement irréductible. Puisque la singularité p_i est hyperbolique, il n'y a que deux courbes irréductibles invariantes, toutes deux lisses et transverses. Les invariants de Camacho-Sad sont μ_i et $\frac{1}{\mu_i}$. Si la courbe est lisse en p_i , elle ne passe que par une des deux branches locales invariantes et l'invariant de Camacho-Sad correspondant sera ou bien μ_i , ou bien $\frac{1}{\mu_i}$ selon la branche. Si, par contre, C n'est pas lisse en p_i , alors ceci signifie que C "passe par les deux branches invariantes locales", et on doit sommer les deux invariants de Camacho-Sad : dans ce cas, la contribution de p_i à la somme est $\mu_i + \frac{1}{\mu_i}$.

Finalement, si un feuilletage \mathcal{F} appartient à l'ouvert V au dessus, on peut décider si elle possède ou non une courbe invariante. En effet, il suffit de considérer toutes les sommes

$$\sum_{i \in I} \mu_i + \sum_{j \in J} \frac{1}{\mu_j} = k^2$$

qui sont des carrés où $I, J \subset \{1, \dots, d^2 + d + 1\}$. Il y en a un nombre fini et les entiers k apparaissant ainsi sont les seuls degrés possibles pour une

courbe invariante par \mathcal{F} . On peut alors vérifier avec un logiciel de calcul formel pour chacun de ces degrés si oui ou non il existe une courbe, et si oui la donner.

En fait, si on a des singularités plus dégénérées, on pourra réduire les singularités par éclatements et appliquer la méthode précédentes marchera dans beaucoup de cas. La vraie difficulté vient des singularités “dicritiques”, ayant une infinité de courbes invariantes locales ; c’est pas exemple le cas des singularités radiales. Dans ce cas, on ne peut pas borner le degré car la courbe invariante pourrait passer par un nombre arbitraire de branches locales, ce qui à chaque fois contribue par un invariant de Camacho-Sad positif.

Pour arriver au théorème au dessus, il faut un peu plus. Et on a le résultat suivant [CLN91] :

Théorème 43 (Cerveau-LinsNeto). — *Si une courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ à singularités nodales est invariante par une feuilletage \mathcal{F} de degré d , alors on a :*

$$\deg(C) \leq d + 2.$$

La preuve utilise d’autres outils de géométrie différentielle ; nous n’en dirons pas plus. Par contre, la conséquence immédiate est que, dans l’ouvert V au dessus, il suffit de supprimer les sous-variétés Z_k , $k \leq d+2$, lieu des feuilletages ayant une courbe invariante de degré k , pour exclure l’existence de courbe invariante. Ainsi on obtient l’ouvert \mathcal{V} Zariski dense réel du théorème

Signalons le résultat plus général [Car94]:

Théorème 44 (Carnicer). — *Si un feuilletage \mathcal{F} de degré d de \mathbb{P}^2 n’a pas de singularité dicritique, alors toute courbe invariante est de degré $k \leq d + 2$.*

Ce dernier résultat a l’avantage de ne rien supposer *a priori* sur la courbe invariante.

Références

- [BB72] P. BAUM & R. BOTT – “Singularities of holomorphic foliations”, *J. Differential Geometry* **7** (1972), p. 279–342.

- [Can97] J. CANO – “Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 9, p. 2649–2650.
- [Car94] M. M. CARNICER – “The Poincaré problem in the nondicritical case”, *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), no. 2, p. 289–294.
- [CLN85] C. CAMACHO & A. LINS NETO – *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985, Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [CLN91] D. CERVEAU & A. LINS NETO – “Holomorphic foliations in $\mathbb{C}P(2)$ having an invariant algebraic curve”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **41** (1991), no. 4, p. 883–903.
- [CLNS88] C. CAMACHO, A. LINS NETO & P. SAD – “Minimal sets of foliations on complex projective spaces”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 68, p. 187–203 (1989).
- [CM82] D. CERVEAU & J.-F. MATTEI – *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque, vol. 97, Société Mathématique de France, Paris, 1982, With an English summary.
- [CS82] C. CAMACHO & P. SAD – “Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields”, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 3, p. 579–595.
- [God91] C. GODBILLON – *Feuilletages*, Progress in Mathematics, vol. 98, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.
- [Il’78] Y. S. IL’YASHENKO – “Topology of phase portraits of analytic differential equations on a complex projective plane”, *Trudy Sem. Petrovsk.* (1978), no. 4, p. 83–136.
- [IY08] Y. ILYASHENKO & S. YAKOVENKO – *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [Jou79] J. P. JOUANOLOU – *Équations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 708, Springer, Berlin, 1979.
- [LNP06] A. LINS NETO & J. V. PEREIRA – “The generic rank of the Baum-Bott map for foliations of the projective plane”, *Compos. Math.* **142** (2006), no. 6, p. 1549–1586.
- [LNS96] A. LINS NETO & M. G. SOARES – “Algebraic solutions of one-dimensional foliations”, *J. Differential Geom.* **43** (1996), no. 3, p. 652–673.
- [LR03] F. LORAY & J. C. REBELO – “Minimal, rigid foliations by curves on $\mathbb{C}P^n$ ”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **5** (2003), no. 2, p. 147–201.

- [Mju75] B. MJULLER – “The density of the solutions of a certain equation in \mathbf{CP}^2 ”, *Mat. Sb. (N.S.)* **98(140)** (1975), no. 3(11), p. 363–377, 495.
- [MM80] J.-F. MATTEI & R. MOUSSU – “Holonomie et intégrales premières”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 4, p. 469–523.
- [Tom99] M. TOMA – “A short proof of a theorem of Camacho and Sad”, *Enseign. Math. (2)* **45** (1999), no. 3-4, p. 311–316.

Septembre 2012

FRANK LORAY, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France)

E-mail : frank.loray@univ-rennes1.fr

Url : <http://perso.univ-rennes1.fr/frank.loray>