Université de Lille I
U.F.R. de Mathématiques - Laboratoire A.G.A.T. - U.M.R. 8524

Approximation diophantienne, dynamique des chambres de Weyl et répartition d'orbites de réseaux

Thèse soutenue le 13 Décembre 2002

par

François MAUCOURANT

pour obtenir le titre de

Docteur en Mathématiques Pures

Directeur de Thèse	Livio FLAMINIO	Université de Lille I
Rapporteurs	François LEDRAPPIER	École Polytechnique
	Frédéric PAULIN	École Normale Supérieure
Examinateurs	Martine BABILLOT	Université d'Orléans
	Marc BOURDON	Université de Lille I
	Yves GUIVARC'H	Université de Rennes

Numéro d'ordre: 3260

Sun Tzu dit : [..]
Maintenant, voici les cinq éléments de l’art de la guerre :
I. La mesure de l’espace.
II. L’estimation des quantités.
III. Les règles de calculs.
IV. Les comparaisons.
V. Les chances de victoire.
Les mesures de l’espace sont dérivées du terrain;
les quantités dérivent de la mesure;
les chiffres émanent des quantités;
les comparaisons découlent des chiffres,
et la victoire est le fruit des comparaisons.

Sun Tzu, *L’Art de la Guerre, VI-Vème s. av. JC.*

Introduction

Cette thèse se découpe en trois parties indépendantes, qui correspondent respectivement aux chapitres 1 à 3, au chapitre 4 et au chapitre 5.

1. Approximation diophantienne et chambres de Weyl

La première partie de cette thèse (chapitres 1 à 3) exploite la relation entre approximation diophantienne et géométrie hyperbolique, ou plus généralement la dynamique des chambres de Weyls sur les variétés de Hilbert. Une telle relation est historiquement connue depuis longtemps - on pense tout d'abord à Ford, dans les années 20, puis à H. Cohn [**Coh55**] et R. Rankin [**Ran57**] dans les années 50. Mais cette relation ne commença à être vraiment exploitée (sous une forme plus explicite que précédemment, et de manière plus systématique) qu'au début des années 80, après (entre autres) les articles de S. Dani [**Dan85**] et D. Sullivan [**Sul82**] qui montrèrent par l'exemple la fécondité du sujet. Si cette relation fut utilisée pour obtenir des résultats géométriques à partir de résultats d'approximation diophantienne connus depuis longtemps, la déduction de propriétés d'approximation diophantienne à partir de raisonnements géométriques est également possible, comme le montrèrent par exemple Beardon, Lehner, Sheingorn [**BLS86**] d'un côté, et A. Haas [**Haa86**] indépendamment, lorsqu'ils publièrent leurs preuves géométriques du théorème dû à Markoff décrivant la partie supérieure à $1/3$ du spectre de Markoff (voir le théorème 1.1). C'est dans cette deuxième optique que se place ce travail. La relation approximation diophantienne-géométrie et dynamique y est abordée d'un point de vue constante d'approximation-profondeur de pénétration dans les cusps (je ne parlerais pas de la vitesse de pénétration dans les cusps). La partie 1 donne les notions classiques d'approximation diophantienne, et sert d'introduction à la partie 2 où est définie une notion d'approximation diophantienne (homogène à une variable) pour un corps $\mathbb{K}$, extension finie de $\mathbb{Q}$, ainsi que quelques corollaires immédiats. Cette définition est une légère variation d'une définition de R. Quême [**Quê91**], et également une variation d'un cas particulier de E. Burger [**Bur92**],[**Bur93**]. Son originalité tient essentiellement à la remarque que l'on peut classer les fractions suivant le groupe de classes d'idéaux du corps choisi, idée déjà présente dans [**Swa68**]. Par exemple, lorsque l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ du corps $\mathbb{K}$ est principal, la définition est la suivante.

Soit $\pi_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to E = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ le plongement canonique de ce corps de nombre, où (r,s) désigne les nombres de plongements réels et complexes non conjugués respectivement de $\mathbb{K}$. Soit pour $z = (z_i)_{i=1,..,r+s}$ élement de E, on note

$$||z||_\infty = \sup_{i=1,..,r+s} |z_i|,$$

et

$$N(z) = \prod_{i=1}^{r} |z_i| \prod_{i=r+1}^{r+s} |z_i|^2.$$

Pour z dans E on définit

$$\nu_{\mathbb{K}}(z)^{r+2s} = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{(p,q)\in\mathcal{O}\times(\mathcal{O}-\{0\}),||z-\pi_{\mathbb{K}}(p/q)||_\infty<\epsilon} N(z-\pi_{\mathbb{K}}(p/q))N(q)^2.$$

Le spectre de Lagrange est alors

$$L_{\mathbb{K}} = \{\nu_{\mathbb{K}}(z) \,:\, z \in E - \pi_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})\}\,.$$

L'exemple des corps imaginaires quadratiques est abordé dans la partie 3. Dans la partie 4, j'introduis un "spectre"[1] issu d'une situation topologique générique, et en tire les quelques corollaires élémentaires qui en découlent. L'intérêt de cette partie est essentiellement de montrer que certaines propriétés des spectres de Markoff et Lagrange sont des conséquences purement topologiques de la correspondance géométrique, et donc valables quelle que soit l'extension finie de $\mathbb{Q}$ choisie, conséquences qui n'étaient pas toujours connues et qui dans ce cadre sont particulièrement simples.

Le chapitre 2 fait le lien entre les définitions de la partie 2 et la partie 4, à travers les théorèmes 2.2 et 2.3; cette correspondance est bien connue lorsque le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{Q}$ ou à un corps imaginaire quadratique - ici, l'originalité est de traiter de manière unifiée toutes les extensions finies de $\mathbb{Q}$ et de préciser à quelle notion d'approximation diophantienne correspondent les différents cusps de la variété $V_{\mathbb{K}}$ associée. Ces théorèmes nous permettent, par exemple, d'obtenir une nouvelle définition, géométrique cette fois, des spectres. Plus précisémment, le plongement canonique $\pi_{\mathbb{K}}$ induit un plongement de $PSL_2(\mathcal{O})$ dans $(PSL_2(\mathbb{R}))^r \times (PSL_2(\mathbb{C}))^s$, que l'on fait agir par isométries sur $(T^1\mathbb{H}^2)^r \times (T^1\mathbb{H}^3)$, le produit des espaces tangents unitaires aux espaces hyperboliques de dimension 2 et 3 respectivement. Le quotient de cet espace par cette action est noté $CW(V_{\mathbb{K}})$, la variété des chambres de Weyl sur la variété de Hilbert associée à $\mathbb{K}$. Le flot géodésique ϕ sur chaque composante du produit $(T^1\mathbb{H}^2)^r \times (T^1\mathbb{H}^3)$ passe au quotient en une action ϕ de $A = \mathbb{R}^{r+s}$ sur $CW(V_{\mathbb{K}})$. Si l'on appelle A^+ le semi-groupe de $A = \mathbb{R}_+^{r+s}$ formé par les temps positifs sur chaque composante,

1. entre guillements, ce n'est pas à priori le spectre d'un opérateur.

on peut définir l'ω-limite d'une chambe de Weyl w dans $CW(V_{\mathbb{K}})$ comme étant les sous-ensemble fermé de $CW(V_{\mathbb{K}})$ suivant :

$$\omega_+(w) = \bigcap_{\bar{t}\in A^+} \overline{\bigcup_{\bar{t}'\in A^+} \phi^{\bar{t}+\bar{t}'} w}.$$

La description géométrique du spectre de Lagrange est alors

PROPOSITION. *Il existe sur $CW(V_{\mathbb{K}})$ une fonction f à valeur dans $\mathbb{R}$, continue et propre (essentiellement une fonction de Busemann, voir la formule 5), telle que l'on ait*

$$L_{\mathbb{K}} = \left\{ \inf_{\omega_+(w)} exp(-f) \; : \; w \in CW(V_{\mathbb{K}}), \omega_+(w) \neq \emptyset \right\}.$$

J'en tire ensuite quelques corollaires immédiats, qui sont les traductions des propriétés vues dans la partie 4. En particulier, on peut remarquer que dans tous les cas où la constante de Hurwitz (définie comme $\sup L_{\mathbb{K}}$) est connue (voir partie 3), c'est la constante d'approximation d'un nombre fini de classes modulo $SL_2(\mathbb{K})$ de nombres quadratiques sur $\mathbb{K}$, et elle est isolée dans les deux spectres. Sans pour autant généraliser cette observation, les corollaires 2.7 et 3.5 donnent des restrictions à ce sujet, dans le cas général et dans le cas imaginaire quadratique respectivement. On peut résumer quelque-une de ces propriétés dans la proposition suivante - le lecteur se reportera au corps du texte pour les énoncés relatifs au spectre de Markoff $M_{\mathbb{K}}$:

PROPOSITION. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombre.*

1. *Il existe z dans E tel que*

$$\nu_K(z) = \sup L_{\mathbb{K}}.$$

2. *Si $\sup L_{\mathbb{K}}$ n'est pas un nombre algébrique, alors il existe un nombre non dénombrable de z dans E tels que $\nu_{\mathbb{K}}(z) = \sup L_{\mathbb{K}}$.*

3. *Si $\mathbb{K}$ est un corps imaginaire quadratique, et si la constante de Hurwitz $\sup L_{\mathbb{K}}$ n'est pas un nombre algébrique, alors $\sup L_{\mathbb{K}}$ n'est pas isolée dans $L_{\mathbb{K}}$.*

Je considère ensuite dans le chapitre 3 le cas où la variété est de rang 1, c'est à dire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou un corps imaginaire quadratique, pour montrer le théorème 3.4, dont voici la partie de l'énoncé qui concerne le spectre de Lagrange.

THÉORÈME (Théorème 3.4). *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$, d entier positif sans facteur carré. Notons $EQ(\mathbb{C})$ l'ensemble des nombres complexes quadratiques sur $\mathbb{K}$. Alors*

$$L_{\mathbb{K}} = \overline{\{\nu_{\mathbb{K}}(z) | z \in EQ(\mathbb{C})\}}.$$

En particulier, $L_{\mathbb{K}}$ est compact.

Dans le cadre classique $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, ce théorème est dû à T. Cusick [**Cus87**] ; la compacité du spectre de Markoff est, elle, automatique indépendamment du rang, cf lemme 1.5. La démonstration utilise en particulier le lemme de fermeture d'Anosov, dont une preuve dans le cadre d'espaces $CAT(-1)$ est fournie en annexe.
Est ensuite abordé dans la section 3 le problème de la calculabilité de la constante de Hurwitz pour un corps imaginaire quadratique quelconque, avec un algorithme proposé pour calculer des valeurs approchées de cette constante.

Une question qu'on m'a souvent posée et qui appelle quelques commentaires est celle-ci : pourquoi je ne généralise pas les propriété de fermeture du spectre de Lagrange au rang supérieur à 2, c'est-à-dire lorsque l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$ possède un groupe d'unités infini. Tout d'abord, techniquement, les outils ne fonctionnent plus (le lemme de fermeture, par exemple, est encore valable mais ne parle que de flots et ne dit rien sur les actions). Une réponse plus intéressante consiste à faire le lien avec la conjecture de Margulis concernant les ensembles fermés invariants sous l'action du groupe diagonal (et qui est essentiellement qu'il y en a peu, et qu'ils sont tous d'origine arithmétique); je pense que dans ce cas le spectre de Lagrange est discret (sauf au point 0) et est égal à l'ensemble des constantes correspondant aux nombres quadratiques sur $\mathbb{K}$ (c'est à dire correspondant aux tores compacts). Le même type de problème a été rencontré par E. Burger, qui fait la remarque qu'il ne trouve qu'un nombre dénombrable d'exemples de nombres mal approchables selon sa définition [**Bur93**].
A travers la correspondance décrite ici, on verra que la forme du spectre de Markoff en rang supérieur s'avère intimement liée à la conjecture de Margulis pour les variétés de Hilbert, conjecture dont S. Dani m'a dit qu'il ne voyait pas de preuve poindre à l'horizon, en dépit de résultats récents dans cette direction [**LW01**].

2. Alternative de Borel-Cantelli dynamique

Le chapitre 4 aborde un sujet un peu différent. D. Sullivan a montré que la vitesse d'approche d'un point à l'infini d'une variété hyperbolique de volume fini non-compacte, est, sur un rayon géodésique générique, logarithmique. Il utilisait pour cela la relation entre approximation diophantienne et vitesse d'approche d'un cusp mêlée à des techniques de la preuve du théorème de Khintchine; ce résultat a été généralisé par D. Kleinbock et G. Margulis dans le cas d'espaces de rang supérieur [**KM99**] et par S.Hersonsky et F. Paulin [**HP01a**] dans le cas des variétés à courbure strictement négative.

Par analogie, on peut reprendre le problème géométrique étudié par Sullivan en remplaçant le point à l'infini par un point quelconque de la variété hyperbolique (le rapport avec l'approximation diophantienne devenant alors également analogique). Ceci a déjà été fait par Hersonsky et Paulin [**HP01b**] en ce qui concerne l'estimation de la dimension de Hausdorff des géodésiques s'approchant exponentiellement vite d'un point fixé d'une variété compacte à courbure strictement négative. Ici, le problème est le suivant. Soit $V = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ une variété hyperbolique de volume fini. Notons T^1V l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à V, $\pi : T^1V \to V$ la projection canonique, ϕ^t le flot géodésique sur T^1V, et $B(q,r) \subset V$ la boule hyperbolique de centre $q \in V$ et de rayon r. On se donne une fonction $(r_t)_{t\geq 0}$ de $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$.

La question est de savoir, pour un point p de V fixé, quel sera la mesure de Liouville de l'ensemble des vecteurs v tels qu'il existe $t_i \to +\infty$, tels que $\pi(\phi^{t_i}v) \in B(p,r_{t_i})$, autrement dit tels que $\{t \geq 0 : \pi(\phi^t v) \in B(p,r_t)\}$ n'est pas borné.

THÉORÈME (Théorème 4.1). *(Cibles rétrécissantes) Supposons que $(r_t)_{t\geq 0}$ soit décroissante. Alors, suivant que*

$$\int_0^\infty r_t^{n-1} dt$$

diverge ou converge, presque tout ou presque aucun vecteur engendre un rayon géodésique qui rencontre pour des temps t arbitrairement grands les boules de centre p, de rayon r_t.

Le corollaire suivant semble être nouveau.

COROLLAIRE (Corollaire 4.2). *Pour tout point p dans V, pour presque tout v, on a :*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{-\ln(d(p,\pi(\phi^t v)))}{\ln(t)} = \frac{1}{n-1}$$

3. Exemples de répartitions d'orbites de réseaux

Enfin, le dernier chapitre 5 s'intéresse à des résultats de répartition semblables au théorème ergodique de Birkhoff concernant l'action d'un réseau Γ d'un groupe de Lie sur un espace homogène G/H, H sous-groupe abélien. Ces exemples sont essentiellement inspirés par l'article de F. Ledrappier [**Led99**], et des résultats proches dans l'esprit ont été indépendamment prouvés par A. Gorodnik. On donne en particulier les trois exemples suivants. Dans le premier, la dérivée de Radon-Nikodyn qui apparaît n'est pas un produit de fonctions à variables séparées (contrairement aux exemples connus jusqu'à ce jour), et dans le deuxième la convergence est remarquablement uniforme. Le troisième est un cas particulier d'un théorème plus général concernant la répartition des plats géodésiques d'un espace selon un sous-groupe discret d'isométries.

THÉORÈME (voir le Théorème 5.2). *Soit*

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on définit X comme la variété (de dimension 6) des matrices conjuguées à M_0. Elle porte une mesure (non nulle, unique à homothétie près) μ qui est $SL_3(\mathbb{R})$-invariante. Il existe une application $\delta : X^2 \to \mathbb{R}_+^*$, continue, à variables non séparées, telle que si Γ un réseau de $SL_3(\mathbb{R})$, qui agit (par conjugaison) sur X, cette action est alors ergodique, et si l'on note

$$B(T) = \{\gamma \in \Gamma \,:\, tr({}^t\gamma\gamma) \leq T^2\},$$

alors pour tout f continue à support compact de X dans $\mathbb{R}$, pour tout x dans X de Γ-orbite dense, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^2} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x) = \frac{1}{covol(\Gamma)} \int_X f(y)\delta(x,y)d\mu(y).$$

THÉORÈME (Théorème 5.3). *Soit $\mathbb{H}^n$ un espace hyperbolique, $X = \partial\mathbb{H}^n$. Soit $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ un sous-groupe discret et non élémentaire d'isométries, de mesure de Bowen-Margulis finie. Notons μ_o la mesure de Patterson-Sullivan associée au point $o \in \mathbb{H}^n$. Soient $f : \partial\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et un point $o \in \mathbb{H}^n$ fixé. Notons*

$$B(T) = \{\gamma \in \Gamma : d(\gamma o,o) < T\},$$

où d désigne la distance hyperbolique. Alors, pour tout $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma\xi) = \frac{1}{\mu_o(\partial\mathbb{H}^n)} \int_{\partial\mathbb{H}^n} f d\mu_o,$$

et cette convergence est uniforme en $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ lorsque $T \to +\infty$.

THÉORÈME (voir le théorème 5.4). *Soit* $\mathbb{H}^n$ *un espace hyperbolique,* X *l'espace des géodésiques orientées de* $\mathbb{H}^n$*,* μ *une mesure* $SO(n,1)$*-invariante sur* X*, et* o *un point de* $\mathbb{H}^n$*. Il existe* c *tel que si* Γ *est un réseau de* $\mathbb{H}^n$*, et si on définit*

$$B(T) = \{\gamma \in \Gamma \,:\, d(o,\gamma o) \leq T\},$$

alors pour toute fonction f *dans* $L^1(\mu)$ *et* μ*-presque tout* x *dans* X*, on a*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x) = \frac{c}{covol(\Gamma)} \int_X f d\mu.$$

On remarquera que, dans le premier et troisième exemple, le cardinal de $B(T)$ n'est pas asymptotique à la normalisation de la somme. Il ne s'agit pas ici de moyennes.

Remarques finales. Le théorème 3.4 a fait l'objet d'un article accepté pour publication à la revue *Ergodic theory and dynamical systems* [**Mau02**].

Remerciements

Je remercie de tout coeur Livio de m'avoir patiemment guidé le long du chemin initiatique menant aux secrets et arcanes de la géométrie dynamique contemporaine.
Je remercie aussi l'équipe de géométrie dynamique du laboratoire AGAT, et plus particulièrement Cornelia Drutu, Marc Bourdon et Youssef Hantout pour les nombreux échanges mathématiques que j'ai pu avoir avec eux, qui ont été très stimulants pour mon travail.
En dehors du laboratoire, Nimish Shah nous a apporté beaucoup en venant nous exposer à Lille la théorie de Ratner; mes discussions avec lui ont toujours été très intéressantes et je l'en remercie.
Je suis infiniment redevable et reconnaissant envers Frédéric Paulin pour la foule de corrections, critiques et suggestions qu'il a apporté au manuscript original, ainsi qu'à mon article, sans lesquelles certains passages seraient restés incompréhensibles.

Quand à mes collègues de bureau, Jean-Paul, Pierre-Marie et Habiba, ils ont toujours su être là pour venir prendre un café, matière première essentielle à la production de théorèmes. Enfin, ce travail ne serait pas sans le soutien moral d'Axelle.

Table des matières

CHAPITRE 1

Cadre général de l'étude

1. Cadre classique

L'objet de cette partie est d'introduire, pour le lecteur non initié, quelques résultats classiques de l'approximation diophantienne homogène à une variable. Le lecteur averti trouvera cependant dans ces rappels les motivations des généralisations qui suivront. Mes références principales sur ce sujet sont Cassels [**Cas57**] et Cusick-Flahive [**CF89**].

L'approximation diophantienne traite de la manière dont on peut approcher un nombre réel par les nombres rationnels. Un théorème, dû à Dirichlet, affirme que pour tout réel irrationnel x, on peut trouver une infinité de fractions p/q telles que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| q^2 \leq 1.$$

La question de savoir à quel point ce résultat est optimal conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 1.1. *Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. On définit la* **constante de meilleure approximation de** x *par la formule :*

$$\nu(x) = \liminf_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\},|q|\to\infty} \left| x - \frac{p}{q} \right| q^2$$

Le **spectre de Lagrange** *est par définition l'ensemble des $\nu(x)$ pour x parcourant $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Il sera noté $L_{\mathbb{Q}}$.*

Ce spectre est parfois appelé spectre de Hurwitz, et pour certains auteurs le spectre est l'ensemble $1/L_{\mathbb{Q}}$. Il est apparu que l'étude de cet ensemble est fortement liée à l'étude des minima de formes quadratiques, et a amené Markoff à s'intéresser aux objets suivants.

DÉFINITION 1.2. *Désignons par $FQ(\mathbb{R})$ l'ensemble des formes quadratiques réelles à deux variables, indéfinies et non dégénérées. Si $q \in FQ(\mathbb{R})$ s'écrit*

$$q(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2,$$

on définit le discriminant de q

$$\Delta(q) = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0,$$

et la quantité

$$\mu(q) = \inf_{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{(0,0)\}} \frac{|q(x,y)|}{\sqrt{|\Delta(q)|}}$$

L'ensemble des $\mu(q)$, pour q parcourant $FQ(\mathbb{R})$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ appelé **spectre de Markoff** *, noté $M_{\mathbb{Q}}$.*

Dans la suite, $FQ(\mathbb{R})$ ne désignera pas exactement la même chose mais plutôt les classes d'équivalence de formes quadratiques selon la relation de proportionnalité, cette confusion étant destinée à alléger les notations (mais ne change pas $\mu(q)$, ni $M_{\mathbb{Q}}$).

De nombreux auteurs ont essayé de décrire ces spectres. Le théorème suivant rassemble de nombreux résultats qui en donnent une vue partielle, essentiellement sur la partie inférieure et supérieure.

THÉORÈME 1.1. *Les deux spectres admettent la description commune suivante :*

1. *(Korkine-Zolotareff, 1873; Markoff, 1879; Hurwitz, 1891)*

$$L_{\mathbb{Q}}\cap\,]1/3;+\infty[\, = M_{\mathbb{Q}}\cap\,]1/3;+\infty[\, = \{\nu_m\},$$

où, pour m un nombre entier tel qu'il existe m_1,m_2 entiers plus petits que m vérifiant l'équation

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2,$$

on a

$$\nu_m := \frac{m}{\sqrt{9m^2-4}}.$$

Il existe une infinité de telles solutions.Les trois premières valeurs sont

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \nu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \nu_3 = \frac{5}{\sqrt{221}}.$$

2. *(Hall, 1947; Freiman, 1975) Il existe $c > 0$ tel que*

$$[0;c] \subset L_{\mathbb{Q}} \cap M_{\mathbb{Q}},$$

c pouvant être pris égal à $1/5$, et on connaît explicement sa valeur optimale.

3. *(Tornheim, 1955; Freiman, 1968)*

$$L_{\mathbb{Q}} \subset M_{\mathbb{Q}},$$

et l'inclusion est stricte.

4. *(Cusick, 1975) Le spectre de Lagrange $L_{\mathbb{Q}}$ est l'adhérence de l'ensemble des constantes d'approximation des nombres réels quadratiques sur $\mathbb{Q}$. Le spectre de Markoff $M_{\mathbb{Q}}$ est l'adhérence des $\mu(q)$ où q est de la forme*

$$q(x,y) = (x\alpha - y)(x\beta - y),$$

avec α et β deux nombres réels quadratiques sur $\mathbb{Q}$.

2. Approximation diophantienne dans les corps de nombres

Dans ce paragraphe, je définis une notion d'approximation diophantienne homogène à une variable pour un corps de nombres quelconque. On se réfèrera au livre de Samuel [**Sam67**] pour les notions de théorie algébrique des nombres.

Soit $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{Q}$. Les différents plongements de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ non conjugués par la conjugaison complexe seront respectivements notés $\sigma_1,..,\sigma_r$ et $\sigma_{r+1},..,\sigma_{r+s}$. Dans toute la suite, on notera $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = r + 2s$ et $n = r + s$.

Le plongement canonique de K est alors :

$$\pi_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to E = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s,$$
$$x \mapsto (\sigma_1(x),..,\sigma_{r+s}(x)).$$

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. On sait que $\pi_{\mathbb{K}}(\mathcal{O})$ est un réseau de E, et que $\pi_{\mathbb{K}}$ donne lieu à un plongement :

$$\overline{\pi_{\mathbb{K}}} : PSL_2(\mathbb{K}) \to G = \prod_{i=1}^{r} PSL_2(\mathbb{R}) \times \prod_{i=1}^{s} PSL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(E).$$

On notera $\Gamma_{\mathbb{K}} = \overline{\pi_{\mathbb{K}}}(PSL_2(\mathcal{O}))$. Il est facile de voir que c'est un sous-groupe discret du groupe de Lie G. Il est bien connu que c'est en fait un réseau (par exemple [**Bor69**], théorème 13.1 et son corollaire 13.2, ainsi que l'exemple 7.16). Dans toute la suite, nous écrirons les éléments de ces groupes comme des matrices bien qu'en réalité ce soient des éléments de $PSL_2(.)$. Nous noterons aussi

$$\overline{E} = \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times \prod_{i=1+r}^{n} (\mathbb{C} \cup \{\infty\}),$$

sur lequel G agit par le produit des actions projectives sur chacun des termes. On notera encore ∞ le point $(\infty))_{i=1..n}$ de $\overline{E}$.

Le groupe des classes d'idéaux fractionnaires de $\mathbb{K}$ sera noté $C(\mathbb{K})$, et son cardinal $h(\mathbb{K})$. Le théorème de Dirichlet nous dit que $\mathcal{O}^{\times}$ est isomorphe au produit $\mathbb{Z}^{r+s-1} \times$

$\mu(\mathbb{K})$, où $\mu(\mathbb{K})$ désigne le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans $\mathbb{K}$. Nous noterons $w(\mathbb{K})$ le cardinal de $\mu(\mathbb{K})$. La **norme** d'un élément x de $\mathbb{K}$ est par définition :

$$N_{\mathbb{K}}(x) = \prod_{\sigma:\mathbb{K}\to\mathbb{C}} \sigma(x) = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i(x) \times \prod_{i=r+1}^{r+s} |\sigma_i(x)|^2,$$

où le premier produit désigne le produit sur tous les plongements $\mathbb{K} \to \mathbb{C}$. On notera $\Delta_{\mathbb{K}}$ le discriminant de $\mathcal{O}$.
La classe de l'idéal engendré par x et y sera notée $\langle x,y \rangle$.

On a posé une fois pour toute $n = r + s$. Pour $z = (z_1,..,z_n) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$, on notera la norme sup usuelle

$$||z||_\infty = \sup_i |z_i|,$$

et

$$N(z) = \prod_{i=1}^{r} |z_i| \prod_{i=r+1}^{n} |z_i|^2.$$

Remarquons que N est simplement le prolongement de la valeur absolue de la norme de $\mathbb{K}$ via le plongement $\pi_{\mathbb{K}}$, ou plus exactement

$$N(\pi_{\mathbb{K}}(x)) = |N_{\mathbb{K}}(x)|.$$

Ce n'est bien sûr pas une norme au sens usuel; cependant nous continuerons à l'appeler ainsi. Remarquons que E possède une structure d'anneau produit (non intègre), qui respecte le plongement $\pi_{\mathbb{K}}$; ainsi, on notera a/b, pour $a,b \in E$, $N(b) \neq 0$, le quotient terme à terme dans chaque espace du produit E. Par abus de notation, on considèra $\mathbb{K}$ et $\mathcal{O}$ comme des sous-anneaux de E, et on négligera d'écrire $\pi_{\mathbb{K}}$.

Soit $P \subset C(\mathbb{K})$ un ensemble **non vide** de classes.

On pose $C^P_\epsilon(z) = \{(p,q) \in \mathcal{O}^2 |\ \ ||z - \pi_{\mathbb{K}}(p/q)||_\infty < \epsilon, \langle p,q \rangle \in P\}$.

DÉFINITION 1.3. *Soit $z = (z_1,..,z_n) \in E$. On définit*

$$\nu_P(z) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\inf_{(p,q)\in C^P_\epsilon(z)} N_{\mathbb{K}}(q)^2 N\left(z - \pi_{\mathbb{K}}\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right)^{1/[\mathbb{K}:Q]},$$

qu'on appelle **constante de meilleure approximation de z par P dans $\mathbb{K}$.**

Lorsque $P = C(\mathbb{K})$ (en particulier si $\mathcal{O}$ est principal), on pourra négliger l'indice P et écrire simplement $\nu_{\mathbb{K}}$. Le lecteur remarquera que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K}$ une extension quadratique imaginaire, cette définition correspond aux définitions usuelles, avec $P = C(\mathbb{K})$ ou bien P le singleton donné par la classe des idéaux principaux, suivant les auteurs. Dans le cas présent, nous pouvons la raffiner en considérant des idéaux non principaux. Cette idée n'est pas complètement nouvelle, elle apparaît par exemple dans les travaux de Swan [**Swa68**] dans le cas $\mathbb{K}$ imaginaire quadratique. Le lemme et son corollaire suivant permettront de se ramener à des suites de forme bien particulière dans la définition de ν_P.

LEMME 1.1 ([**Fre90**] page 37, lemme 3.5_2). *Soit $I = \langle u,v\rangle = \langle p,q\rangle$ un idéal entier. Alors il existe*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathcal{O})$$

telle que :

$$u = ap + bq,$$
$$v = cp + bq.$$

□

COROLLAIRE 1.2. *Si $P = \{I\}$ est un singleton, que I est un idéal entier de norme minimale dans sa classe, et que $I = \langle p,q\rangle$, alors $\nu_P(z)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}$ est la borne inférieure des nombres de la forme*

$$\liminf_{k\to\infty} N\left(z - \frac{a_{M_k}p + b_{M_k}q}{c_{M_k}p + d_{M_k}q}\right) N(c_{M_k}p + d_{M_k}q)^2,$$

pour une suite de matrices $(M_k)_k$ dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$, de coefficients $a_{M_k}, b_{M_k}, c_{M_k}, d_{M_k}$, vérifiant que

$$\frac{a_{M_k}p + b_{M_k}q}{c_{M_k}p + d_{M_k}q}$$

tend vers z pour la norme $|| \quad ||_\infty$. □

Dans le cas où $n = r + s = 1$, remarquons que la dernière condition n'est pas nécessaire.

DÉFINITION 1.4. *On appelera* **spectre de Lagrange de** $\mathbb{K}$ **par rapport à** P *l'ensemble*

$$L_P = \{\nu_P(z) | z \in E - \pi_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})\}.$$

On notera simplement $L_{\mathbb{K}}$ lorsque $P = C(\mathbb{K})$

Nous n'avons pas encore prouvé que ces spectres soient bornés (mais c'est le cas). Cependant on appelera

$$C_{\mathbb{K}} = \sup L_{\mathbb{K}}$$

la **constante de Hurwitz du corps** $\mathbb{K}$.

Tournons-nous maintenant vers les formes quadratiques, pour définir un spectre de Markoff. Pour tout $1 \leq i \leq r$ (resp. $r < i \leq r + s$), donnons-nous une forme quadratique q_i à deux variables, et à coefficients réels (resp. complexe), indéfinie et non dégénérée (resp. non dégénerée). Notons[1] $FQ(E)$ l'ensemble de applications

$$q : E^2 \to E,$$

qui s'écrivent

$$q\,(x_i,y_i) = (q_i(x_i,y_i))_{1 \leq i \leq n}\,,$$

modulo l'action par homothétie de $(\mathbb{R}^*)^r \times (\mathbb{C}^*)^s$. Un tel q sera appelé par abus de langage **une forme quadratique**. Le discriminant de l'un de ses représentants est par définition le produit pondéré des discriminants

$$\Delta(q) = \prod_{i=1}^{r} (\beta_i^2 - 4\alpha_i\gamma_i) \prod_{i=r+1}^{n} (\beta_i^2 - 4\alpha_i\gamma_i)^2,$$

où l'on a noté

$$q_i(x,y) = \alpha_i x^2 + \beta_i xy + \gamma_i y^2.$$

De façon équivalente, en utilisant la structure d'anneau de E, on peut dire q est une forme quadratique à coefficients dans E, $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, où a,b,c sont dans E, les classes d'équivalences sont modulo la multiplication par E^* (l'ensemble des éléments de E de norme non nulle), et le discriminant $\Delta(q) = N(b^2 - 4ac)$ est supposé non nul, $\sigma_i(b^2 - 4ac) > 0$ pour tout i compris entre 1 et r, σ_i étant ici le prolongement (par continuité) de l'application déjà notée σ_i de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

DÉFINITION 1.5.

$$\mu_P(q) = \left(\inf_{(x,y) \in \pi_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}^2 - \{0,0\})} \frac{N(q(x,y))}{|\Delta(q)|^{\frac{1}{2}}} \right)^{1/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}$$

Cette application est bien définie, c'est-à-dire que c'est une fonction invariante sous l'action des homothéties, indépendante du représentant choisi. Nous obtenons ici un autre corollaire du lemme 1.1 :

COROLLAIRE 1.3. *Si $P = \{I\}$ est un singleton, que I est un idéal entier de norme minimale dans sa classe, et que $I = \langle p,q \rangle$, alors*

$$\mu_P(q)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} = \inf_{M \in \Gamma_{\mathbb{K}}} \frac{N(q(a_M p + b_M q, c_M p + d_M q))}{\sqrt{|\Delta(q)|}},$$

1. Cette notation n'est pas tout à fait exacte, puisque $FQ(E)$ dépend en fait de (r,s)

où les coefficients de M sont notés a_M,b_M,c_M et d_M. □

DÉFINITION 1.6. *On appellera* **spectre de Markoff de $\mathbb{K}$ par rapport à** P *l'ensemble*

$$M_P = \{\mu_P(q) | q \in FQ(E)\}.$$

On note encore cet ensemble $M_{\mathbb{K}}$ lorsque $P = C(\mathbb{K})$.

Muni de ces définitions, il est très facile de voir que l'on a les relations suivantes lorsque l'on fait varier P ou $\mathbb{K}$:

(1) $$\nu_P(z) = \inf_{I \in P} \nu_{\{I\}}(z),$$

(2) $$\mu_P(q) = \inf_{I \in P} \mu_{\{I\}}(z).$$

Si $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ est une extension galoisienne, on a un plongement naturel des espaces vectoriels associés :

$$\pi_{E'/E} : E \to E'.$$

Il est alors facile de voir que, pour $x \in E$, on a

$$\nu_{\mathbb{K}'}(\pi_{E'/E}(x)) \leq \nu_{\mathbb{K}}(x),$$

et des formules semblables correspondant au morphisme $C(\mathbb{K}) \to C(\mathbb{K}')$.

DÉFINITION 1.7. *Soit $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ une extension quadratique, et (r,s),(r',s') les signatures respectives de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$. Si $r' = 2r$ (et donc $s' = 2s$), l'extension $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ sera qualifiée de* **réelle**. *Si x est dans une extension quadratique réelle de $\mathbb{K}$, comme on peut rassembler par paire les plongements de $\mathbb{K}'$ à l'aide du groupe de Galois d'ordre 2 de $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$, on peut lui associer 2^n points de E de façon naturelle en choisissant pour chaque terme du produit de E l'un des deux morphismes de la paire associée. Les points de E ainsi obtenus définissent l'ensemble des* **nombres quadratiques** *de E, et ces ensembles de 2^n points de E les ensembles de nombres quadratiques* **conjugués**.

Ces points quadratiques sont exactement les éléments de E vérifiant une équation quadratique dans E à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les points de E ainsi obtenus sont les analogues des nombres quadratiques réels dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, et ils bénéficient des mêmes propriétés (voir par ex. le lemme 2.2).
Maintenant, remarquons comme précisé dans l'introduction que les définitions précédentes sont très proches d'un cas particulier de la situation étudiée par Edward Burger,

et proches également d'une définition de Roland Quême. La majoration dans le théorème 1 de l'article [**Bur92**] reste valable dans notre cas, et on en déduit une majoration "à la Dirichlet"

$$C_{\mathbb{K}} \leq \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s}|\Delta_{\mathbb{K}}|\right)^{1/m}.$$

La majoration issue de l'article de R. Quême s'avère meilleure dans notre cas (on rappelle que $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$) :

PROPOSITION 1.2. [**Quê91**]

$$C_{\mathbb{K}} \leq \left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2s}\frac{m!^2}{m^{2m}}|\Delta_{\mathbb{K}}|\right)^{1/m}.$$

Il existe une notion de multiplicité pour un élément d'un des deux spectres. Il faut tout d'abord remarquer que ν_P et μ_P sont invariants sous les actions respectives de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ sur $\overline{E}$ et $FQ(E)$. Ceci sera prouvé dans la suite (Corollaire 2.4), l'action de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ sur $\overline{E}$ étant l'action projective sur chacun des facteurs via les homomorphismes σ_i, et l'action sur les formes quadratiques étant donnée par

$$(\gamma.q)(x,y) := q(\gamma^{-1}(x,y)),$$

pour $q \in FQ(E)$, $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}}$ une matrice de coefficients a,b,c,d et $x,y \in E$, l'action de γ^{-1} sur E^2 étant l'action linéaire matricielle. L'ensemble des z de $\overline{E}$ tels que $\nu_P(z) = c$, où c est une constante fixé, est donc la réunion d'ensemble de classes modulo l'action de $\Gamma_{\mathbb{K}}$, et il en est de même des q dans $FQ(E)$ tels que $\mu_P(z) = c$.

DÉFINITION 1.8. *On appelle* **multiplicité de** c *dans* L_P *(resp.* M_P*) le cardinal de l'ensemble des classes modulo l'action de* $\Gamma_{\mathbb{K}}$ *dont la réunion est* $\nu_P^{-1}(c)$ *(resp.* $\mu_P^{-1}(c)$*).*

Exemple 1 : $1/3$ est de multiplicité $\aleph_1$ dans $L_{\mathbb{Q}}$ et $M_{\mathbb{Q}}$ [**Cas57**].
Exemple 2 : La *conjecture de l'unicité* affirme que tout élément $> 1/3$ de $L_{\mathbb{Q}}$ est de multiplicité 1 ([**Cas57**], p 33).

On se servira de cette notion au paragraphe 4.

3. Corps imaginaires quadratiques

Soit d un entier positif sans facteur carré, et soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Il existe une abondante littérature sur l'approximation diophantienne dans $\mathbb{K}$, et quelques constantes d'Hurwitz ont été calculées, ainsi que parfois la partie supérieure du spectre (i.e. la partie discrète avant le premier point d'accumulation). Cette partie est dédiée au rappel des propriétés connues dans ce cas. En voici la liste pour les corps dont l'anneau est principal, résumées dans un tableau, avec lorsque j'ai pu le retrouver dans la littérature un point x tel que $\nu_{\mathbb{K}}(x) = C_d$ la constante d'Hurwitz, et une matrice loxodromique de $SL_2(\mathcal{O})$ stabilisant x. Ce tableau complète celui de Hersonsky et Paulin [**HP02**]. Certaines matrices M ont été calculées en suivant la preuve du lemme 2.2 à partir du x présent dans la bibliographie, et pour d'autres valeurs c'est x qui a été déduit de M.

d	C_d	x	M
1	$1/\sqrt{3}$	$(1+i\sqrt{3})/2$	$\begin{bmatrix} 2-i & 2i \\ -2i & 2+i \end{bmatrix}$
2	$1/\sqrt{2}$	$(1+i)\sqrt{2}/2$	$\begin{bmatrix} 3-2i\sqrt{2} & -4 \\ -4 & 3+2i\sqrt{2} \end{bmatrix}$
3	$1/\sqrt[4]{13}$	$(1-i\sqrt{3})/4$ $+(1-3i\sqrt{3})\frac{\sqrt{(19-27i\sqrt{3})/2}}{28}$	$\begin{bmatrix} i\sqrt{3}-1 & -(5+i\sqrt{3})/2 \\ (1+3i\sqrt{3})/2 & (i\sqrt{3}-7)/2 \end{bmatrix}$
7	$1/\sqrt[4]{8}$	-	-
11	$2/\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5}+i\sqrt{11})/4$	$\begin{bmatrix} (5+i\sqrt{11})/2 & (3-i\sqrt{11})/2 \\ 2 & (1-i\sqrt{11})/2 \end{bmatrix}$
19	1	$(1+i\sqrt{19})(1+1/\sqrt{5})/2$	-
43	?	?	?
67	?	?	?
163	?	?	?

Dans certains cas, la partie supérieure du spectre a été identifiée par Asmus Schmidt [**Sch75**],[**Sch78**],[**Sch83**], par exemple

$$L_{\mathbb{Q}(i)} \cap\,]1/2; +\infty[\, = M_{\mathbb{Q}(i)} \cap\,]1/2; +\infty[\, = \{\nu_m\}_m,$$

avec ν_m une suite tendant vers $1/2$, mais il n'existe pas d'interprétation géométrique connue comme dans le cas standard $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ où tout élément des spectres $> 1/3$ correspond à une géodésique simple sur un revêtement particulier de la surface modulaire [**Haa86**], [**BLS86**].

La propriété suivante semble spécifique au cas $r + s = 1$ (le cas de rang 1).

PROPOSITION 1.3. *Pour $q \in FQ(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, et tout $\mathbb{K}$ imaginaire quadratique:*

$$\mu_{\mathbb{Q}}(q) = \mu_{\mathbb{K}}(q) = \mu_{\{\mathcal{O}\}}(q),$$

$$\nu_{\mathbb{Q}}(x) = \nu_{\mathbb{K}}(x) = \nu_{\{\mathcal{O}\}}(x).$$

Ainsi le spectre de Lagrange de $\mathbb{Q}$ est inclus dans le spectre de Lagrange de $\mathbb{K}$, et de même pour le spectre de Markoff.

PREUVE. On a $\nu_{\mathbb{Q}}(x) \geq \nu_{\mathbb{K}}(x)$, et $\mu_{\mathbb{Q}}(q) \geq \mu_{\mathbb{K}}(x)$, et il nous faut montrer les inégalités inverses. Montrons d'abord l'assertion concernant la constante d'approximation. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$, d entier positif sans facteurs carrés, alors suivant que d est congru à trois modulo quatre ou non, l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers est respectivement $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(i\sqrt{d}+1)$ ou $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$. Dans les deux cas, on peut conclure que la partie imaginaire d'un élément de $\mathcal{O} - \mathbb{Z}$ est plus grande en valeur absolue que $\sqrt{3}/2$. Ainsi, si x est réel, p,q dans $\mathcal{O}$ tels que p/q n'est pas réel, alors on a l'inégalité

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\Im\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{|\Im(\overline{q}p)|}{|q|^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{|q|^2}.$$

Comme $\nu_{\mathbb{Q}}(x) \leq 1/\sqrt{5} < \sqrt{3}/2$, il ne nous reste à prouver, pour conclure que $\nu_{\mathbb{Q}}(x) = \nu_{\mathbb{K}}(x)$, que si p/q, fraction de $\mathbb{K}$, approche x sur l'axe réel, on peut prendre p,q entiers. En effet, $\mathbb{K} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$, et donc si p/q est réel, alors $p/q = p'/q'$, où p'/q' est une fraction irréductible rationnelle. Comme $N(p)N(q') = N(p')N(q)$ se réecrit $N(p)q'^2 = p'^2N(q)$, on en déduit que q'^2 divise $N(q)$ puisque p' et q' sont premiers entre eux. Ainsi $|q'| \leq |q|$ et p'/q' constitue une approximation de x au moins aussi bonne que p/q, au sens que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| |q|^2 \geq \left|x - \frac{p'}{q'}\right| |q'|^2.$$

Maintenant, venons-en aux formes quadratiques. Si q est une forme quadratique binaire non dégénérée, non définie, on peut tout d'abord supposer (quitte à échanger les variables) que q s'écrit

$$q(x,y) = (yz - x)(yz' - x),$$

où z,z' sont deux réels (distincts). Alors pour x,y complexes, et y non nul, on a

$$|q(x,y)|^2 = |y|^4|z-\frac{x}{y}|^2|z'-\frac{x}{y}|^2 = |y|^4((z-\Re(x/y))^2+(\Im(x/y))^2)((z'-\Re(x/y))^2+(\Im(x/y))^2),$$

et donc

$$|q(x,y)|^2 \geq |y|^4(\Im(x/y))^2((z - \Re(x/y))^2 + (z' - \Re(x/y))^2).$$

Or pour tout s réel, on a l'inégalité $(z-s)^2+(z'-s)^2 \geq (z-z')^2/2$. Ainsi, pour tout x,y, y non nul, on a

$$|q(x,y)| \geq |y|^2 |\Im(x/y)| \frac{|z-z'|}{\sqrt{2}}.$$

De même que précédemment, si x,y sont dans $\mathcal{O}$, si y est non nul et si x/y n'est pas réel, alors

$$|\Im(x/y)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2|y|^2},$$

et ainsi

$$|q(x,y)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{|\Delta(q)|} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{|\Delta(q)|},$$

et donc $|q(x,y)| \geq \mu_{\mathbb{Q}}(q)\sqrt{|\Delta(q)|}$. Nous pouvons toujours nous ramener au cas où y est non nul, et dans le cas où x/y est réel, c'est alors un rationnel, s'écrivant comme fraction irréductible x'/y' dans $\mathbb{Z}$, et nous pouvons montrer de même que précédemment que $|q(x',y')| \leq |q(x,y)|$.

□

Le théorème suivant est une application directe des travaux de Hersonsky et Paulin aux définitions introduites précédemment. Il sera généralisé par la suite.

THÉORÈME 1.4. **[HP02]** *Tous les spectres L_P et M_P sont bornés. On a de plus*

$$\sup L_{\mathbb{K}} = \sup M_{\mathbb{K}}.$$

Il faut également faire remarquer que l'approximation diophantienne dans le corps des quaternions peut rentrer dans le cadre de rang 1 (voir [**Sch69**]).

4. Spectres des hauteurs d'un espace

Soit X un espace topologique localement compact, A un groupe topologique abélien agissant continuement sur X, A^+ un semi-groupe qui engendre A, et $f: X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et propre. L'objet de cette partie est de faire une étude sommaire de quantités ν_f,μ_f et d'ensembles $L(f),M(f)$ définis un peu plus loin. L'un des buts du chapitre 2 sera justement de voir que les spectres L_P,M_P vus dans la partie 2 sont issus d'une définition comme celle qui suit, et bénéficient donc de certaines propriétés, qui sont données dans les lemmes suivants.
Pour x dans X, notons

$$\omega_+(x) = \bigcap_{a \in A^+} \overline{\bigcup_{b \in A^+} (ab).x},$$

qu'on peut appeler **l'ensemble oméga-limite de** x.

DÉFINITION 1.9. *Soit $x \in X$, on définit $\nu(x)$ et $\mu(x)$ par*

$$\nu_f(x) = \exp\left(-\sup_{\omega_+(x)} f\right),$$

$$\mu_f(x) = \exp\left(-\sup_{Ax} f\right).$$

On définit les L,M-spectres de f comme les sous-ensembles de $\mathbb{R}_+$

$$L(f) = \{\nu_f(x) | x \in X\},$$

$$M(f) = \{\mu_f(x) | x \in X\}.$$

Déduisons-en maintenant quelques propriétés élémentaires.

LEMME 1.4. *Si Δ désigne la différence symétrique d'ensembles, on a :*

$$M(f)\Delta\{\inf_{y \in Y} e^{-f(y)} | Y \neq \emptyset, AY = Y\} \subset \{0\},$$

$$M(f)\Delta\{\inf_{y \in Y} e^{-f(y)} | Y \neq \emptyset, \overline{AY} = Y\} \subset \{0\},$$

et

$$L(f) \subset M(f)$$

PREUVE. L'inclusion

$$M(f) \subset \{\inf_{y \in Y} e^{-f(y)} | Y, AY = Y\}$$

est claire car les orbites sont des ensembles invariants. Reste à voir que

$$\{\inf_{y \in Y} e^{-f(y)} | Y, AY = Y\} \subset M(f) \cup \{0\}.$$

Soit Y un ensemble invariant non vide tel que $\inf_{y \in Y} e^{-f(y)} > 0$, alors $\sup_Y f < +\infty$. Or

$$f(\overline{Y}) \subset \overline{f(Y)}$$

car f est continue, donc comme f est propre il existe $y \in \overline{Y}$ tel que $f(y) = \sup_Y f$. Or $Ay \subset \overline{Y}$ par continuité de l'action de A, et donc

$$\sup_{Ay} f = \sup_{Y} f,$$

ce qui conclut la preuve de la première assertion, la deuxième en découle après la remarque que pour tout ensemble Y, on a

$$\sup_{Y} f = \sup_{\overline{Y}} f.$$

Pour la dernière assertion, comme $\omega_+(x)$ est un ensemble invariant, il nous faut juste vérifier que $0 \in L(f)$ implique $0 \in M(f)$. Or, s'il existe x tel que

$$\sup_{\omega_+(x)} f = +\infty,$$

alors comme

$$\omega_+(x) \subset \overline{Ax},$$

et que $\sup_{Ax} f = \sup_{\overline{Ax}} f$, on a aussi $\sup_{Ax} f = +\infty$. □

LEMME 1.5. *$M(f) \cup \{0\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. De plus, si $\mu \in M(f) - \{0\}$, alors il existe $x \in X$ tel que $f(x) = -\ln(\mu)$ et $\mu_f(x) = \mu$.*

PREUVE. Soit $(Ax_i)_i$ une suite d'orbites telles que $\mu_i = \mu_f(x_i)$ converge vers $\mu > 0 \in \mathbb{R}$. Quitte à translater x_i, nous pouvons supposer que

$$-\ln(\mu_i) - 1/i \leq f(x_i) \leq -\ln(\mu_i,)$$

et à partir d'un certain rang que $|\ln(\mu_i) - \ln(\mu)| < 1$. Comme x_i est dans le compact $f^{-1}([-\ln(\mu) - 2, -\ln(\mu) + 1])$, la suite x_i admet un point d'accumulation x. Ainsi $f(x) = -\ln(\mu)$ par continuité de f. De plus, pour tout $a \in A$,

$$f(ax) = \lim_{i\to\infty} f(ax_i) \leq \limsup_{i\to\infty} \mu_i = \mu$$

et donc

$$\sup_{Ax} f = \mu.$$

La deuxième assertion se déduit de la preuve de la première, en considérant la suite constante égale à n'importe quelle orbite incluse dans $\mu_f^{-1}(\mu)$. □

LEMME 1.6. *Supposons que f est minorée, alors*

$$\sup L_f = \sup M_f.$$

Notons C_f cette borne supérieure commune. On l'appellera la ***constante d'Hurwitz de*** (X,f)*. Alors il existe $x \in X$, tel que :*

$$\mu_f(x) = \nu_f(x) = C_f.$$

PREUVE. Soit β un minorant de f. Regardons les ensembles

$$K_\alpha = \bigcap_{a \in A} af^{-1}([\beta;\alpha]).$$

C'est une suite croissante d'ensembles compacts (éventuellement vides) et invariants, car f est propre. Ainsi, il existe une constante $\alpha_0 \in [\beta;+\infty]$ telle que $K_\alpha = \emptyset$ si et seulement si $\alpha < \alpha_0$, car si

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha | K_\alpha \neq \emptyset\},$$

on a

$$K_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha > \alpha_0} K_\alpha,$$

qui est donc non vide. Posons $C_f = exp(-\alpha_0)$. Soit $x \in X$, posons $\alpha = \sup_{\omega+(x)} f$, et $\alpha' = \sup_{Ax} f$. Alors $\omega_+(x) \subset K_\alpha$ et $Ax \subset K_{\alpha'}$, et donc $\alpha \geq \alpha_0$. D'autre part, si $x \in K_{\alpha_0}$, Ax et $\omega_+(x)$ sont des sous-ensembles de K_{α_0} et donc

$$\nu_f(x) = \mu_f(x) = C_f.$$

□

LEMME 1.7. *Soit μ une mesure finie sur X de support X, supposons que f n'est pas majorée et que l'action de A sur (X,μ) soit ergodique. Alors pour μ-presque tout $x \in X$, $\nu_f(x) = \mu_f(x) = 0$.*

PREUVE. Comme μ_f et ν_f sont des fonctions mesurables et invariantes sous l'action de A, ces fonctions sont constantes presque partout. Soient c_1,c_2 ces constantes. Soit $U_\alpha = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$, comme pour tout $x \in U_\alpha$,

$$exp(-f(x)) < e^{-\alpha},$$

et que U_α est de mesure strictement positive par hypothèse sur f et μ, on a $c_1 < e^{-\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$ et donc $c_1 = 0$. Par le lemme de récurrence de Poincaré, presque tout $x \in U_\alpha$ vérifie $x \in \omega_+(x)$, et de même $c_2 = 0$. □

Dans la suite, nous supposerons que A est σ-compact, c'est à dire réunion dénombrable de compacts.

Le lemme suivant est probablement connu.

LEMME 1.8. *Soit $Y \subset X$ un ensemble A-invariant compact minimal. Alors soit Y est une orbite compacte, soit Y est réunion d'un ensemble non dénombrable d'orbites disjointes.*

PREUVE. C'est une application directe du théorème de Baire. En effet, Y étant A-invariant, on peut toujours l'écrire comme réunion d'orbite disjointes :

$$Y = \bigsqcup_{y \in Z} Ay.$$

Il nous faut montrer que Z dénombrable implique que Z est un singleton. Supposons donc que Z est dénombrable. Mais si $A = \cup_k A_k$ où chaque A_k est compact, on a :

$$Y = \bigcup_{y \in Z, k} A_k y.$$

Si tous les $A_k y$ sont d'intérieur vide dans Y, alors par le théorème de Baire Y est d'intérieur vide dans Y. Donc il existe y dans Z et k tel que $A_k y$ n'est pas d'intérieur vide. Soit donc U un ouvert non vide de Y contenu dans $A_k y$, $AU = Y$ car le complémentaire de AU dans Y est un fermé invariant, qui est nécessairement vide par minimalité de Y. Donc $Ay = Y$, et donc

$$Z = \{y\}.$$

□

COROLLAIRE 1.5. *Supposons que f est minorée, et que $\mu_f^{-1}(C_f)$ ne contienne pas d'orbite compacte. Alors $\mu_f^{-1}(C_f)$ est une réunion non dénombrable d'orbites.*

PREUVE. Reprenons les notations de la preuve du lemme 1.6. Soit Y un compact invariant minimal inclus dans K_{α_0}, alors l'application du lemme 1.8 conclut. □

CHAPITRE 2

L'équivalence des définitions

1. La variété de Hilbert

J'introduis dans cette section la variété de Hilbert associée à $\mathbb{K}$, ainsi que la variété des chambres de Weyl, avec toutes les définitions et remarques qui vont avec. Nous noterons $\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}^3$ respectivement, le plan hyperbolique et l'espace hyperbolique de dimension 3. On note :

$$\Omega = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{H}^2 \times \prod_{i=r+1}^{r+s} \mathbb{H}^3,$$

espace sur lequel G agit à gauche. Un point de Ω sera repéré par ses coordonnées dans le modèle du demi-plan (resp. demi-espace) supérieur dans chaque élément du produit: $x = (z_i,t_i)_{i=1,..,n}$ où $z_i \in \mathbb{R}$ si $1 \leq i \leq r$, $z_i \in \mathbb{C}$ si $i > r$, et $t_i > 0$. Nous noterons $V_{\mathbb{K}}$ l'orbifolde quotient (variété de Hilbert) $\Gamma_{\mathbb{K}}\backslash\Omega$, et $\pi_{V_{\mathbb{K}}}$ le revêtement d'orbifold : $\Omega \to V_{\mathbb{K}}$. Par *élément loxodromique* de $PSL_2(E)$, on entend une application qui a exactement 2^n points fixes dans $\overline{E}$. Par *point parabolique* d'un sous-groupe discret Γ de $PSL_2(E)$, on entend un point de $\overline{E}$ qui est l'unique point fixe (dans $\overline{E}$) d'une application γ de Γ. Par *cusp* de $\Gamma\backslash\Omega$, on entend une classe modulo l'action de Γ de points paraboliques de $\overline{E}$. L'espace $\overline{E}$ sera parfois désigné comme *la frontière de Furstenberg* de Ω.

Nous rappelons le théorème bien connu suivant, et qui pourra être trouvé dans [**Fre90**], par exemple.

THÉORÈME 2.1. *L'application* $(\mathbb{K}\cup\infty) \to C(\mathbb{K})$, $x \mapsto \langle 1,x\rangle$, *induit une bijection naturelle* $\Gamma_{\mathbb{K}}\backslash(\mathbb{K}\cup\infty) \to C(\mathbb{K})$ *de l'ensemble des cusps de* $V_{\mathbb{K}}$ *dans le groupe de classe d'idéaux fractionnaires de* $\mathcal{O}$.

Dans le résultat précédent, on convient que l'idéal engendré par $(1,\infty)$ est égal à $\mathcal{O}$. Pour la définition du bord de Ω, on se réfèrera à [**Bal95**]. Un ouvert dense U de $\partial\Omega$, invariant par le groupe G, peut être décrit de la façon suivante :

$$U = \{(z,\theta) | z \in \overline{E}, \theta \in S^{n-1} \cap]0,1]^n\},$$

le plongement i (que l'on considèrera comme une identification) dans $\partial\Omega$ étant donné par

$$i(z,\theta) = \lim_{t\to+\infty} ((z_i, e^{-\alpha_i t}))_i,$$

avec $\theta = (\alpha_1,..,\alpha_n)$, $\sum_i \alpha_i^2 = 1$. Cette expression est valable si tous les z_i sont finis. Sinon, on remplace dans l'expression précédente le terme correspondant à un $z_i = \infty$ par $(0,e^{\alpha_i t})$. L'action de G est ici $g(z,\theta) = (gz,\theta)$.

Il est facile de vérifier que l'image de ce plongement est bien un ouvert dense du bord : c'est en fait l'ensemble $\partial\Omega_{reg}$ des points réguliers du bord. Ainsi, nous parlerons d'un point de $\overline{E}$ comme d'une classe asymptotique de chambres de Weyl de Ω. Rappelons que la fonction de Busemann est définie pour ξ un point du bord $\partial\Omega$ et deux points x,y de Ω comme la limite

$$B_\xi(x,y) = \lim_{t\to+\infty} d(r(t),x) - t,$$

où $r(t)$ désigne le rayon géodésique infini partant de y vers ξ. Soit $\xi_0 \in U$ le point à l'infini régulier (∞,θ), et soit $x_0 \in \Omega$ le point $(0,1)_{i=1,..,r+S}$. Soit $x = (z_i,h_i)_i$ un point de Ω. On a alors la formule suivante pour la fonction de Busemann du point ξ_0

LEMME 2.1.

$$e^{-B_{\xi_0}(x,x_0)} = \prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i}.$$

□

Soit $\rho : \Gamma \to G$ une représentation d'un groupe Γ, et $\pi_V : \Omega \to V = \rho(\Gamma)\backslash\Omega$ la projection canonique. On peut définir une "fonction de Busemann" sur V de la façon suivante. Soit $\zeta \in \partial\Omega$ un point parabolique, $\tilde{p}$ dans Ω, et q dans V

DÉFINITION 2.1. *On pose*

$$B^\rho_\zeta(q,\tilde{p}) := \inf_{\tilde{q}|\pi_V(\tilde{q})=q} B_\zeta(\tilde{q},\tilde{p}),$$

où la fonction dans le deuxième terme est la fonction de Busemann sur Ω*.*

On se référera ici à l'article de H.C. Im Hof [**IH85**] pour la description générale de l'action sur les chambres de Weyls. Dans notre cas, le sous-groupe abélien de G, $A = (\mathbb{R}_+^*)^n$ identifié au groupe matriciel

$$A = \left\{ \left(\left[\begin{array}{cc} e^{t_i} & 0 \\ 0 & e^{-t_i} \end{array} \right] \right)_{i=1,..,n} : t_i > 0 \right\},$$

agit sur la variété $CW(\Omega)$ des chambres de Weyl de Ω, qui est le produit des $T^1\mathbb{H}^2$, $T^1\mathbb{H}^3$, les espaces tangents unitaires des espaces hyperboliques.

Etant donnée une orbifolde quotient $V = \Gamma(V)\backslash\Omega$, de volume fini et de cusps $C(V)$, cette action descend en une action sur l'ensemble $CW(V) = \Gamma(V)\backslash CW(\Omega)$ des chambres de Weyl de l'orbifolde V. On se fixe dans la suite le semi-groupe $A^+ = \{(t_1,..,t_n) : t_i > 0\} \subset A$, qui est l'intérieur d'une chambre de Weyl standard.

DÉFINITION 2.2. *On dira que deux chambres de Weyl de Ω sont* **asymptotes** *si elles définissent le même point de la frontière de Furstenberg. On dira que deux chambres de Weyl de V sont asymptotes si elles ont deux relevés asymptotes. En particulier, si $w,w' \in CW(V)$ sont asymptotes, alors :*

$$\omega_+(w) = \omega_+(w').$$

On a bien sûr un revêtement naturel $\pi_{CW} : CW(V) \to V$ qui à une chambre de Weyl de V associe son point base. On utilisera la paramétrisation de Hopf suivante pour les chambres de Weyls de Ω : notons $(E \times E)^*$ l'ensemble des (z,z') dans E tels que $N(z - z') \neq 0$. Il existe une bijection :

$$CW(\Omega) \to (E \times E)^* \times A,$$

qui est la bijection déduite par produit des paramétrisations de Hopf de $T^1\mathbb{H}^2$ et $T^1\mathbb{H}^3$. La mesure de Liouville sur $CW(\Omega)$ s'exprime à l'aide de cette paramétrisation

$$dw = 2^{r+2s}\frac{dzdz'da}{N(z-z')^2}. \tag{3}$$

Enfin, la propriété suivante peut être vue comme une généralisation du *théorème de Lagrange* : un réel est quadratique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si son développement en fraction continue est périodique.[1]

LEMME 2.2. *Les plats de Ω qui se projettent sur des tores plats compacts dans $V_{\mathbb{K}}$ sont exactement ceux dont les 2^n points à l'infini sont des nombres quadratiques conjugués (voir définition 1.7).*

PREUVE. Si on considère les 2^n points à l'infini d'un relevé d'un tore compact, il existe une matrice loxodromique γ de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ (en fait un sous-groupe abélien de rang n) stabilisant chacun de ces points à l'infini. Si $((x_i)_i,(y_i)_i) \in E^2$ décrivent ces points (au sens que la i-ème coordonnée d'un point à l'infini est soit x_i, soit y_i), alors l'équation

1. Il est sans doute déjà connu mais je ne lui connais pas de référence. D'autres exemples similaires sont par exemple dans [**LW01**].

décrivant ces points fixes $\gamma z = z$ nous donne pour chaque coordonnées une équation du second degré d'inconnue z,

$$\sigma_i(c)z^2 + \sigma_i(d-a)z - \sigma_i(b) = 0,$$

à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont x_i et y_i sont solutions, et ainsi c'est un ensemble de nombres quadratiques conjugués (on a le bon nombre d'équations à coefficients réels).

Réciproquement, si un ensemble rectangulaire de 2^n points de E est un ensemble de nombres quadratiques conjugués, ils sont issus d'un nombre x dans $\mathbb{K}'$, $\mathbb{K}'$ extension réelle de degré 2 de $\mathbb{K}$. De par le théorème des unités de Dirichlet, le facteur abélien libre du groupe des unités de $\mathbb{K}'$ est de rang $2r+2s-1 = 2n-1$, et le facteur abélien libre du groupe des unités de $\mathbb{K}$ est de rang $r+s-1 = n-1$. Comme la norme relative (cf [**Sam67**]) satisfait

$$N_{\mathbb{K}'/\mathbb{Q}}(u) = N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(N_{\mathbb{K}'/\mathbb{K}}(u)),$$

on en déduit que le facteur abélien libre du groupe $\ker(N_{\mathbb{K}'/\mathbb{K}})$ des éléments de norme relative pour l'extension $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ égale à 1 est de rang n. Soit $u \in \ker(N_{\mathbb{K}'/\mathbb{K}})$, qui ne soit pas de torsion. Soit $M \subset \mathbb{K}'$ le $\mathcal{O}$-module de base $(1,x)$. Comme M est commensurable à $\mathcal{O}'$ (en le sens que leur intersection est un sous-groupe d'indice fini de chacun d'eux), et que la multiplication par u stabilise $\mathcal{O}'$, il existe $k > 0$ tel que la multiplication par u^k stabilise M. Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

la transposée de la matrice de multiplication par u^k dans la base $(x,1)$. Comme $xu^k = ax+b$ et $u^k = cx+d$, on a pour tout z dans l'ensemble des points conjugués

$$A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{zu^k}{u^k} = z,$$

équation qui est à lire comme une équation dans E. Comme A est de déterminant $1 = N_{\mathbb{K}'/\mathbb{K}}(u^k)$ et n'est pas de torsion, ses valeurs propres dans chaque coordonnées i sont distinctes de 1 et -1, et c'est bien un élément loxodromique de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ stabilisant tout point de l'ensemble rectangulaire de départ. Il y a donc un groupe de rang n ainsi engendré par les différents éléments u de $\ker(N_{\mathbb{K}'/\mathbb{K}})$. Comme le stabilisateur dans G du plat défini par les 2^n points conjugués admet un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{R}^n$, le sous-groupe formé précedemment en est un réseau et le quotient est compact. $\square$

2. La correspondance géométrique

Dans cette section, on relie les quantités diophantiennes et dynamiques introduites dans les parties précédentes. On fixe le point à l'infini :

$$\xi_0 = \left((\infty)_{i=1,..,n},\, \theta_0 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{r+4s}} \right)_{i=1,..,r}, \left(\frac{2}{\sqrt{r+4s}} \right)_{i=r+1,..,n} \right) \right),$$

et le point de référence $x_0 = (0,1)_{i=1,..,n}$ dans Ω. Traitons tout d'abord le cas des 'formes quadratiques'. Le lemme suivant fait le lien entre plats et produits de formes quadratiques.

LEMME 2.3. *Il existe une bijection canonique G-équivariante $q \mapsto G(q)$ entre $FQ(E)$ et l'ensemble des plats totalement géodésiques maximaux non orientés de Ω.*

Nous pourrions simplement remarquer que $PSL_2(\mathbb{R})$ (resp $PSL_2(\mathbb{C})$) agit transitivement sur $FQ(\mathbb{R})$ (resp. $FQ(\mathbb{C})$) et que le stabilisateur de $q(x,y) = xy$ est égal au stabilisateur de la géodésique non orientée, non pointée, reliant les deux points de $\partial\mathbb{H}^2$ (resp $\partial\mathbb{H}^3$) 0 et ∞, sous l'action du même groupe vu comme groupe d'isométrie de $\mathbb{H}^2$ (resp $\mathbb{H}^3$). Il en est ainsi de même pour l'action produit de G sur les ensembles produits. Mais il n'est sans doute pas inutile de décrire un peu plus cette bijection.

A tout $q = (q_i)_i$ dans $FQ(E)$, on associe le plat géodésique $G(q)$ (sans orientation) ayant pour points à l'infini les points de coordonnées $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$, où ξ_i est racine de l'équation $q_i(z,1) = 0$. En général, il y en a toujours 2 distinctes. Si $q_i(z,1)$ est de degré 1, on prend comme points à l'infini la racine et $\infty \in \partial\mathbb{H}^2$ ou $\partial\mathbb{H}^3$. Cette manière de définir nous donne ainsi toujours 2^n points à l'infini. Il y en a en effet autant que de chambres de Weyls.

Réciproquement, à un plat géodésique P non orienté de Ω, en notant ξ_i,ξ_i' ses points à l'infini dans le i-ième facteur, on considère la forme quadratique $q(P) = (q_i)_i$ avec

$$q_i(x,y) = (y\xi_i - x)(y\xi_i' - x),$$

ou éventuellement $q_i(x,y) = (y\xi_i - x)y$ si un des points à l'infini est $\infty \in \partial\Omega$.

Venons-en maintenant aux "nombres" de E.

LEMME 2.4. *Il existe une bijection canonique $z \mapsto R(z)$ entre $\overline{E}$ et l'ensemble des classes asymptotiques de chambres de Weyl de Ω, qui est G-équivariante.*

Comme précédemment, cette bijection est claire sur chaque H^2 et H^3, un point du bord étant par définition une classe (faiblement) asymptotique de rayons géodésiques, et s'obtient ensuite par produit. Plus explicitement, nous nous intéresserons au passage au quotient par $\Gamma_{\mathbb{K}}$ de cette bijection.

A un élément z de $\overline{E}$, on associe la classe asymptotique $R(z)$ de chambres de Weyl de $V_{\mathbb{K}}$ à laquelle appartient toute chambre dont un relevé a pour point à l'infini z. Réciproquement, à une chambre de Weyl de $V_{\mathbb{K}}$, on peut associer la classe modulo $\Gamma_{\mathbb{K}}$ de point à l'infini dans $\overline{E}$ d'un relevé de cette chambre au produit de demi-espaces supérieurs. En particulier les éléments de $\mathbb{K}$ sont associés aux chambres de Weyl qui se terminent dans les cusps en respectant l'indexation de $\mathbb{K}$ et des cusps selon $C(\mathbb{K})$, c'est à dire en respectant l'association du théorème 2.1. Soit w une chambre de Weyl de $R(z)$, alors l'ω-limite positive $\omega_+(w)$ ne dépend en fait que de $R(z)$, ce qui justifie l'écriture de cet ensemble comme $\omega_+(R(z))$.

Il sera dans la suite plus commode d'associer à un élément de $\overline{E}$, non pas une classe asymptotique, mais un représentant de cette classe. A un élément $z = (z_1,..,z_n)$ dans E on associe la chambre de Weyl $W_0(z)$ dans Ω définie par:

$$W_0(z) = \{(z_i,e^{-t_i})|t_i \geq 0\},$$

et le plat maximal contenant $W_0(z)$, défini par

$$p_0(z) = \{(z_i,t_i)|t_i > 0\},$$

et on notera $W(z)$ l'image de $W_0(z)$ dans $V_{\mathbb{K}}$.

Le lemme suivant, qui sera par la suite appliqué à différentes représentations de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ reliées chacune à un cusp, nous permettra de faire le lien avec l'approximation diophantienne.

Soit

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \right)_{i=1,..,n} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(E).$$

LEMME 2.5 (Lemme fondamental). *Avec les notations précédentes sur z,x_0,γ,ξ_0, on a :*

$$\min_{x\in\gamma^{-1}p_0(z)} \exp(B_{\xi_0}(x,x_0)) = \left(N(C)^2 N\left(\frac{A}{C} - z\right) 2^{r+2s} \right)^{\frac{1}{\sqrt{r+4s}}}$$

De plus, l'unique point x réalisant le minimum vérifie

$$\gamma x = \left(z_i, \left| z_i - \frac{a_i}{c_i} \right| \right)_i . \tag{4}$$

PREUVE. Soit x dans $\gamma^{-1}p_0(z)$, notons $x = (u_i,h_i)_{i=1,..,n}$.
On sait (ou bien l'on calcule) que dans chaque facteur du produit Ω (c'est à dire dans

chaque copie de H^2 ou H^3), l'horosphère centrée en $\frac{a_i}{c_i}$), image par $\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}$ d'une horosphère centrée en l'infini de hauteur euclidienne h_i, est de rayon euclidien r_i avec :

$$\frac{1}{2h_i|c_i|^2} = r_i$$

On regarde les cercles (resp. sphères) tangents aux bords des $\mathbb{H}^2$, (resp. $\mathbb{H}^3$) en les points a_i/c_i et passant par les projections sur chaque composante de γx. Ils sont de rayon euclidien r_i. On note $\gamma x = (z_i,t_i)_{i=1,..,n}$. Le théorème de Pythagore nous dit que

$$r_i^2 = (t_i - r_i)^2 + |z_i - \frac{a_i}{c_i}|^2.$$

C'est à dire qu'on a les égalités :

$$r_i = \frac{1}{2}(t_i + \frac{|z_i - \frac{a_i}{c_i}|^2}{t_i})$$

Et donc :

$$\frac{1}{2h_i|c_i|^2} = \frac{1}{2}(t_i + \frac{|z_i - \frac{a_i}{c_i}|^2}{t_i})$$

Ainsi, le produit des n égalités précédentes ou de leur carré, suivant qu'elles correspondent à un facteur réel ou complexe, nous donne :

$$\left((\prod_{i=1}^{r} h_i)(\prod_{i=r+1}^{s} h_i^2) N(c)^2 \right)^{-1} = \prod_{i=1}^{r} \left(t_i + \frac{|z_i - \frac{a_i}{c_i}|^2}{t_i} \right) \left(\prod_{i=r+1}^{n} \left(t_i + \frac{|z_i - \frac{a_i}{c_i}|^2}{t_i} \right) \right)^2$$

Ou encore, en utilisant la formule pour la fonction de Busemann sur Ω :

$$\exp(B_{\xi_0}(x,x_0))^{\sqrt{r+4s}} N(c)^{-2} = \prod_{i=1}^{r} (t_i + \frac{|z_i - \frac{a_i}{c_i}|^2}{t_i}) \left(\prod_{i=r+1}^{n} (t_i + \frac{|z_i - \frac{a_i}{c_i})|^2}{t_i}) \right)^2$$

Le i-ème terme du produit de gauche est minimisé lorsque $t_i = |z_i - \frac{a_i}{c_i}|$ et l'unique minimum est atteint pour $x = \gamma^{-1}((z_i,t_i)_{i=1,..,n})$, et alors :

$$exp(\sqrt{r+4s} B_{\xi_0}(x,x_0)) = N(z - \frac{a}{c}) N(c)^2 2^{r+2s}.$$

□

Le lemme suivant est l'analogue du précédent pour les formes quadratiques.

PROPOSITION 2.6. *Soient* $q \in FQ(E)$ *et* ρ *un morphisme d'un groupe* Γ *dans* G, *d'image discrète. Alors*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \frac{N(q(d, -c))}{\sqrt{|\Delta(q)|}} = 2^{-[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \inf_{p \in \pi_V(G(q))} e^{\sqrt{r+4s} B^{\rho}_{\xi_0}(p,x_0)},$$

où

$$\rho(\gamma) = \left(\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \right)_{i=1,..,n} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(E).$$

PREUVE. Montrons d'abord la première affirmation. Écrivons

$$q_i(x,y) = (y\eta_i - x)(y\eta_i' - x).$$

Par le lemme 2.1, on a, en posant $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{r+4s}}$ si $i \leq r$, $\alpha_i = \frac{2}{sqrtr+4s}$ sinon,

$$\sup_{p \in G(q)} e^{-B_{\xi_0}(p,x_0)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} |\eta_i - \eta_i'| \right)^{\alpha_i},$$

et de même,

$$\sup_{p \in \rho(\gamma) G(q)} e^{-B_{\xi_0}(p,x_0)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \frac{|\eta_i - \eta_i'|}{|(c_i\eta_i + d_i)(c_i\eta_i' + d_i)|} \right)^{\alpha_i}.$$

On obtient, d'après les valeurs de α_i et après avoir remarqué que $|\eta_i - \eta_i'|^2 = |\Delta(q_i)|$,

$$2^{-[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \inf_{p \in \rho(\gamma) G(q)} e^{\sqrt{r+4s} B_{\xi_0}(p,x_0)} = \frac{N(q(-d,c))}{\sqrt{|\Delta(q)|}}.$$

En passant à l'infimum sur tous les γ dans Γ, on obtient bien l'égalité annoncée.

□

3. Application au cas des variétés de Hilbert

Dans cette partie, on établit que les quantités diophantiennes définies dans la partie 2 sont égales aux quantités géométriques définies dans la partie 4, pour une certaine fonction f et le fibré des chambres de Weyls de la variété de Hilbert correspondante.

Fixons le corps $\mathbb{K}$, extension finie de $\mathbb{Q}$, et commençons par décrire certaines représentations du groupe $\Gamma_{\mathbb{K}}$. Soit une classe $\overline{I}$ dans $C(\mathbb{K})$, dont on choisit un représentant I, qui soit un idéal entier de norme minimale parmi les représentants de cette classe.

Soient p,q dans $\mathcal{O}$ deux éléments qui engendrent I. Il existe alors μ et ν dans I^{-1} tels que

$$p\nu + q\mu = 1.$$

Soit M l'élément de G défini par

$$M = \overline{\pi_{\mathbb{K}}}\left(\begin{bmatrix} p & -\mu \\ q & \nu \end{bmatrix}\right).$$

Alors

$$M^{-1} = \overline{\pi_{\mathbb{K}}}\left(\begin{bmatrix} \nu & \mu \\ -q & p \end{bmatrix}\right).$$

On pose $\Gamma_M = M^{-1}\Gamma_{\mathbb{K}}M$, et $\rho(\gamma) = M^{-1}\gamma M$. Un élément g dans Γ_M s'écrit

$$g = \overline{\pi}_{\mathbb{K}}\left(\begin{bmatrix} p\nu a + p\mu c + q\nu b + q\mu d & -\mu\nu a - \mu^2 c + \nu^2 b + \mu\nu d \\ -pqa + p^2 c - q^2 b + pqd & \mu qa - \mu pc - q\nu b + p\nu d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \overline{\pi}_{\mathbb{K}}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right),$$

avec

$$\gamma = MgM^{-1} = \overline{\pi}_{\mathbb{K}}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \in \Gamma_{\mathbb{K}}.$$

3.0.1. *Formes quadratiques et plats.* Rappelons que $\pi_{CW} : CW(V_{\mathbb{K}}) \to V_{\mathbb{K}}$ est la projection canonique. Fixons I,M,p,q comme dans la partie précédente. Notons $\rho_0 : \Gamma_{\mathbb{K}} \to G$ l'inclusion. On définit une application $f_I : CW(V_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{R}$ par

$$f_I(w) = -\frac{\sqrt{r+4s}}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} B^{\rho_0}_{(p/q,\theta_0)}(\pi_{CW}(w),x_0)$$

$$+\ln(2) + \frac{\sqrt{r+4s}}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} B_{\xi_0}(x_0,M^{-1}x_0). \tag{5}$$

Cette fonction est continue et propre sur $CW(V_{\mathbb{K}})$. Si P est une partie non vide de $C(\mathbb{K})$, notons

$$f_P = \sup_{I\in P} f_I.$$

Si $P = C(\mathbb{K})$, on pose $f_{\mathbb{K}} = f_{C(\mathbb{K})}$. Nous allons maintenant relier explicitement les objets de la partie 4 appliquées à $(CW(V_{\mathbb{K}}),f_P)$ avec les quantités diophantiennes.

THÉORÈME 2.2. *Les définitions arithmétiques et géométriques de* μ *coïncident. En d'autres termes, pour tout* q *dans* $FQ(E)$,

$$\mu_P(q) = \mu_{f_P}(\pi_{V_{\mathbb{K}}}(G(q))). \tag{6}$$

PREUVE. D'après la formule 2, et la définition de f_P, il nous suffit de le prouver pour P un singleton. Soit donc $P = \{I\}$. Soit ρ la représentation décrite précédemment, et soit q dans $FQ(E)$, $\rho(\gamma^{-1})$ dans Γ_M. Ecrivons

$$\rho(\gamma) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

$$M \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} = M\rho(\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}M,$$

et donc

$$M \begin{bmatrix} D \\ -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$q(M(D,-C)) = q(cp+dq,ap+bq),$$

d'où, par la proposition 2.6,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_{\mathbb{K}}} \frac{N(q(cp+dq,ap+bq))}{\sqrt{|\Delta(q)|}} = 2^{-[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \inf_{p\in\pi_V(G(M^{-1}q)} e^{\sqrt{r+4s}B^{\rho}_{\xi_0}(p,x_0)}.$$

Le corollaire 1.3 nous permet ainsi d'affirmer que

$$2^{-[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \inf_{p\in\pi_V(M^{-1}G(q))} e^{\sqrt{r+4s}B^{\rho}_{\xi_0}(p,x_0)} = \mu_P(q)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}.$$

Maintenant exprimons la relation de cocycle de la fonction de Busemann

$$B^{\rho}_{\xi_0}(p,x_0) = B^{\rho_0}_{M\xi_0}(Mp,Mx_0) = B^{\rho_0}_{M\xi_0}(Mp,x_0) - B_{M\xi_0}(Mx_0,x_0)$$

$$= B^{\rho_0}_{M\xi_0}(Mp,x_0) - B_{\xi_0}(x_0,M^{-1}x_0)$$

Ce qui, avec la remarque $\pi_V(M^{-1}G(q)) = \pi_{V_{\mathbb{K}}}(G(q))$, conclut la preuve.

□

3.0.2. *Approximation diophantienne et ω-limites.*

THÉORÈME 2.3. *Les définitions arithmétiques et géométriques de ν coïncident. En d'autres termes, pour tout z dans $E - \mathbb{K}$,*

$$\nu_P(z) = \nu_{f_P}(W(z)). \tag{7}$$

PREUVE. De même que dans la preuve précédente, la formule 1 nous permet de supposer que P est un singleton. Soit $P = \{I\}$, et ρ la représentation définie précédemment. Tout d'abord, montrons que

$$\nu_{\{I\}}(z) \geq \nu_{f_I}(W(z)).$$

D'après le corollaire 1.2, il existe une suite

$$\gamma_l = \overline{pi}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{bmatrix} \in \Gamma_{\mathbb{K}},$$

tels que, lorsque $l \to +\infty$,

$$\left\| z - \frac{a_l p + b_l q}{c_l p + d_l q} \right\|_\infty \to 0, \tag{8}$$

et

$$N\left(z - \frac{a_l p + b_l q}{c_l p + d_l q}\right) N(c_l p + d_l q)^2 \to \nu_{\{I\}}(z)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}. \tag{9}$$

Soit x_l le point de $\rho(\gamma_l)^{-1} p_0(M^{-1}z)$ réalisant le minimum dans le lemme 2.5, appliqué à la transformation $M^{-1}\gamma_l M$. On obtient :

$$\exp(\sqrt{r+4s} B_{\xi_0}(x_l, x_0)) = N(C_l)^2 N\left(M^{-1}\gamma_l M(\infty) - M^{-1}z\right) 2^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]},$$

car $A_l / C_l = M\gamma_l M^{-1}(\infty)$. Or, on peut calculer que

$$C_l = (pc_l + qd_l)(p - q\gamma_l M(\infty)),$$

et

$$N\left(M^{-1}\gamma_l M(\infty) - M^{-1}z\right) = \frac{N(z - \gamma_l M(\infty))}{N(-qz+p) N(-q\gamma_l M(\infty) + p)}.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\exp(\sqrt{r+4s} B_{(p/q,\theta_0)}(Mx_l, Mx_0)) \\ &= N(pc_l + qd_l)^2 N\left(\gamma_l M(\infty) - z\right) \frac{N(p - q\gamma_l M(\infty))}{N(p - qz)} 2^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}, \end{aligned}$$

Lorsque $l \to \infty$, l'expression précédente tend vers $(2\nu_{\{I\}}(z))^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}$, de par les expressions 8 et 9. La suite $\rho(\gamma_l)x_l$ converge vers $M^{-1}z$ dans $W_0(M^{-1}(z))$ d'après l'équation 4. Donc l'ensemble des points d'accumulation de $\pi_{V_{\mathbb{K}}}(Mx_l)_l$ est contenu dans $\pi_{CW}(\omega_+(MW(M^{-1}z))) = \pi_{CW}(\omega_+(W(z)))$, et donc par continuité de f, on obtient bien $\nu_{\{I\}}(z) \geq \nu_{f_I}(W(z))$.

Montrons maintenant la réciproque :

$$\nu_{\{I\}}(z) \leq \nu_{f_I}(W(z)).$$

Soit w_l une suite de sous-chambres de Weyls dans $MW_0(M^{-1}z)$ dont les points-bases x_l tendent vers z pour la topologie euclidienne, tels que $\exp(-f_I(\pi w_l)) \to \nu_{f_I}(W(z)))$, π étant ici la projection $CW(\Omega) \to CW(V_{\mathbb{K}})$. On pose $y_l = M^{-1}x_l$. Ainsi, d'après la définition de $B^{\rho}_{\xi_0}$ et le lemme 2.5, il existe une suite g_l de Γ_M telle que :

$$\exp(\sqrt{r+4s}B^{\rho}_{\xi_0}(g_l y_l,x_0)) \geq N(C_l)^2 N\left(\frac{A_l}{C_l} - M^{-1}z\right)2^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}.$$

De plus, quitte à changer y_l grâce au lemme 2.5, on peut supposer qu'il y a égalité, et l'équation 4 nous dit alors que

$$\left|\left|g_l(\infty) - M^{-1}z\right|\right|_\infty \to 0.$$

Mais on peut écrire, en posant $\gamma_l = Mg_lM^{-1}$,

$$exp(\sqrt{r+4s}B^{\rho}_{\xi_0}(M^{-1}\gamma_l x_l,x_0)) = 2^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\left(\frac{N(\frac{p}{q} - \gamma_l(\frac{p}{q}))}{N(z-\frac{p}{q})}\right)\left(N(c_l p + qd_l)^2 N\left(\gamma_l(p/q) - z\right)\right),$$

tout comme dans la première partie de la preuve. En passant à la limite, on obtient l'inégalité annoncée, car $||z - \gamma_l(p/q)||_\infty$ tend bien vers 0.

□

4. Quelques corollaires

Nous énonçons maintenant quelques conséquences directes des théorèmes 2.2 et 2.3. Le premier est bien connu lorsque $n = 1$, mais mérite d'être noté. On n'avait jusqu'alors pas précisé de mesure sur $FQ(E)$, mais comme $FQ(E)$ s'identifie naturellement à l'espace des plats de Ω, il existe ainsi une mesure G-invariante sur cet espace issue de la mesure de Haar de G.

COROLLAIRE 2.4. *Les fonctions ν_P et μ_P sur $\overline{E}$ et $FQ(E)$ sont $\Gamma_{\mathbb{K}}$-invariantes. Elles sont nulles presques partout.*

PREUVE. L'invariance résulte des formules 6 et 7. La deuxième partie se déduit du lemme 1.7 de la façon suivante; soit $F \subset E$ un ensemble de mesure finie et positive tel que ν_P est constant sur F. L'ensemble des chambres $w \in CW(V_{\mathbb{K}})$ telles que w admet un relevé à Ω ayant pour point à l'infini positif un élément de F est de mesure non nulle d'après la formule 3, et on applique alors le lemme 1.7. □

Ce corollaire est l'analogue du résultat de Tornheim. J'ignore si l'inclusion est stricte.

COROLLAIRE 2.5. *Pour tout $P \subset C(\mathbb{K})$ non vide, on a :*

$$L_P \subset M_P$$

PREUVE. C'est l'application directe du lemme 1.4. □

Le corollaire suivant généralise le théorème 1.4.

COROLLAIRE 2.6. *La définition suivante de $C_{\mathbb{K}}$ a bien un sens*

$$C_{\mathbb{K}} = \sup L_{\mathbb{K}} = \sup M_{\mathbb{K}}.$$

Et il existe q dans $FQ(E)$, et z dans E tels que

$$\mu_{\mathbb{K}}(q) = \nu_{\mathbb{K}}(z) = C_{\mathbb{K}}.$$

Si P est non vide, L_P et M_P sont bornées.

PREUVE. La première partie est l'application directe du lemme 1.6, il n'y a qu'à vérifier que $f_{C(\mathbb{K})}$ est bien minorée. La dernière assertion découle du fait topologique suivant : il existe un compact K de $V_{\mathbb{K}}$ intersectant tout plat géodésique, car un voisinage horosphérique suffisamment petit ne contient aucun plat entier. □

COROLLAIRE 2.7. *Si la constante de Hurwitz n'est pas atteinte par un "nombre" de E 'quadratique réel', alors sa multiplicité est non dénombrable dans chacun des deux spectres. C'est en particulier le cas si ce n'est pas un nombre algébrique.*

PREUVE. Si la constante de Hurwitz n'est pas atteinte par un "nombre quadratique réel" de E, d'après le lemme 2.2, le corollaire 1.5 s'applique et la multiplicité est non dénombrable dans le spectre de Markoff. Remarquons qu'un plat de Ω et à fortiori de $V_{\mathbb{K}}$ peut être donné par des points antipodaux dans le rectangle des 2^n points à l'infini. Si elle était de multiplicité dénombrable dans le spectre de Lagrange, en particulier l'ensemble des points à l'infini des plats donnant lieu à la constante de Hurwitz serait dénombrable, mais ces plats sont inclus dans ceux définis grâce à des paires de points de cet ensemble, ce qui nous donne un nombre dénombrable, contredisant la conclusion sur la multiplicité du spectre de Markoff. Pour la dernière assertion, on peut calculer que la constante d'approximation d'un nombre quadratique de $\mathbb{K}$ dans E est toujours algébrique (voir [**HP02**]). $\square$

CHAPITRE 3

Le cas de rang 1

1. Un théorème sur les spectres dans les espaces $CAT(-1)$

Soit Ω un espace métrique simplement connexe, complet et localement compact, géodésique et $CAT(-1)$ (référence [**Bal95**]). Notons $T^1\Omega$ l'ensemble des plongements isométriques de $\mathbb{R}$ dans Ω, il est naturellement muni d'une action ϕ^t de $\mathbb{R}$ qui consiste à translater l'isométrie et d'une involution $v \mapsto -v$, qui change le signe du temps.

Soit Γ un sous-groupe discret du groupe $Isom(\Omega)$ des isométries de Ω, notons $V = \Gamma\backslash\Omega$ et $T^1V = \Gamma\backslash T^1\Omega$ les espaces quotients. Pour v dans T^1V, on note $\omega_+(v)$ son ensemble ω-limite positif, i.e. l'ensemble des points d'accumulation de $\phi^t v$ lorsque $t \to +\infty$. Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit $f : T^1V \to \mathbb{R}$ une fonction continue et propre. Soit J_0 l'ensemble des vecteurs périodiques de T^1V, et J l'ensemble des vecteurs de T^1V tels que $\omega_+(v)$ et $\omega_+(-v)$ soient chacun vide ou bien une orbite périodique. Alors*

1.
$$\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) | v \in T^1V\} = \overline{\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) | v \in J\}},$$

2.
$$\mathbb{R} \cap \{\limsup_{t\to+\infty} f(\phi^t v) | v \in T^1V\} = \overline{\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) | v \in J_0\}}.$$

Autrement dit, avec les notations de la partie 4,

$$\ln(M(f)) = \mathbb{R} \cap \overline{\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t(v)) | v \in J\}},$$
$$\ln(L(f)) = \overline{\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t(v)) | v \in J_0\}}.$$

(Les adhérences sont prises dans $\mathbb{R}$, et non pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.)

Soient $\pi : T^1\Omega \to \Omega$ et $\pi : T^1V \to V$ les projections canoniques, et $\partial\Omega$ le bord de Ω (voir [**Bal95**]). La paramétrisation de Hopf nous permet de faire l'identification :

$$T^1\Omega = ((\partial\Omega \times \partial\Omega) - diag) \times \mathbb{R}.$$

Si $v \in T^1\Omega$, nous noterons v_+ et v_- les éléments de $\partial\Omega$ tels que $v = (v_+,v_-,t)$ pour un certain t dans $\mathbb{R}$. Ce sont les extrémités en $+\infty$ et $-\infty$ de la géodésique définie par v .

Nous utiliserons sur $T^1\Omega$ la distance d suivante : si $v,v' \in T^1\Omega$, alors

$$d(v,v') = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} d(\pi\phi^t v,\pi\phi^t v')e^{-|t|}dt.$$

Cette distance a l'avantage d'être convexe, i.e. l'application de la variable t

$$t \mapsto d(\phi^t v,\phi^t v')$$

est convexe, car intégrale positive de fonctions convexes. En particulier, si $v_+ = v'_+$, alors cette application est décroissante. Notons encore que cette distance est invariante par isométrie, et induit donc une distance sur T^1V, encore notée d. Les distances d sont invariantes par renversement du temps, et satisfont $d(\phi^t v,\phi^s v) = |t-s|$.

Nous utiliserons dans la suite la version du lemme de fermeture d'Anosov [**Ano69**] ci-dessous.

THÉORÈME 3.2 (Lemme de fermeture, cas non compact $CAT(-1)$). *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *et* $T > 0$ *tel que pour tout* $v \in T^1V$ *et* $t \geq T$ *tels que* $d(v,\phi^t(v)) < \delta$, *il existe* $\gamma \in \Gamma$, *loxodromique,* $w \in T^1V$, *et* $t' > 0$ *tels que la géodésique fermée de* V *associée à* γ *soit* $(w(s))_{s\in[0,t']}$, $|t-t'| < \epsilon$, $\phi^{t'}(w) = w$, *et pour tout* $s \in [0,t]$, $d(\phi^s(w),\phi^s(v)) < \epsilon$. *De plus,* $\delta(\epsilon)$ *et* $T(\epsilon)$ *ne dépendent pas de* Γ *ni de* Ω, *et ont des valeurs explicites.*

PREUVE. Cette version du lemme de fermeture d'Anosov est prouvée en appendice A. □

PREUVE DE L'ASSERTION 1 DU THÉORÈME 3.1. Montrons d'abord que l'ensemble $\mathbb{R}\cap\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v)|v \in T^1V\}$ est fermé. Ensuite, il nous suffira pour conclure de montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v)|v \in J\}$ en est une partie dense. Soit $(\phi^{\mathbb{R}}v_i)_i$ une suite d'orbites telles que $\mu_i = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v_i)$ converge vers $\mu \in \mathbb{R}$. Quitte à translater v_i à l'aide du flot, nous pouvons supposer que $\mu_i - 1/i \leq f(v_i) \leq \mu_i$, et à partir d'un certain rang que $|\mu_i - \mu| < 1$. Comme v_i est dans le compact $f^{-1}([\mu-2,\mu+1])$, la suite v_i admet un point d'accumulation v. Ainsi $f(v) = \mu$ par continuité de f. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\phi^t v) = \lim_{i\to\infty} f(\phi^t v_i) \leq \limsup_{i\to\infty} \mu_i = \mu,$$

et donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) = \mu.$$

Montrons maintenant que $\mathbb{R}\cap\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v)|v \in J\}$ est un sous ensemble dense de $\mathbb{R}\cap\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v)|v \in T^1V\}$. Soit $\phi^{\mathbb{R}}v$ une orbite du flot géodésique, telle que

$\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) < +\infty$. Soit K le 1-voisinage fermé de $f^{-1}([\mu-1,\mu+1])$, qui est compact. Soit $\delta(\epsilon)$ le module de continuité de f sur K, c'est à dire

$$\delta(\epsilon) = \sup_{x,y\in K, d(x,y)\leq\epsilon} |f(x) - f(y)|.$$

Prenons $\epsilon > 0$ tel que $\delta(2\epsilon) + 2\epsilon < 1$. Quitte à opérer une translation, nous pouvons imposer $|\mu - f(v)| < \epsilon$.

Supposons d'abord que $\omega_+(v) \neq \emptyset$. Soit $w \in \omega_+(v)$, $\tilde{w} \in T^1\Omega$ un relevé de w, et $U \subset U'$ deux voisinages ouverts de $\tilde{w} \in T^1\Omega$, de diamètre plus petit que ϵ, vérifiant que pour tout $v^{(1)},v^{(2)} \in U$, il existe $v^{(3)} \in U'$ tel que $v_+^{(3)} = v_+^{(1)}$ et $v_-^{(3)} = v_-^{(2)}$.

En appliquant le lemme de fermeture d'Anosov, il existe $T_1 > T_2 > 0$, aussi grands que l'on veut, et une géodésique périodique de longueur T avec $|T - (T_1 - T_2)| < \epsilon$, ayant un vecteur unitaire tangent v' tel que pour tout $t \in [0,T]$

$$d(\phi^{t+T_1} v, \phi^t v') < \epsilon,$$

et que $v',\phi^{T_1} v$ aient des relevés $\tilde{v'},\phi^{T_1}\tilde{v}$ dans U.

Il existe ainsi $\tilde{w_0}$ dans U' tel que $(\tilde{w_0})_+ = (\tilde{v}')_+$ et $(\tilde{w_0})_- = (\tilde{v})_-$. En particulier, pour $t \geq 0$, on a les inégalités

$$d(\phi^t w_0, \phi^t v') \leq d(\phi^t \tilde{w_0}, \phi^t \tilde{v}') \leq d(\tilde{w_0}, \tilde{v}') \leq \epsilon,$$

car $\tilde{w_0},\tilde{v}'$ sont tous deux dans U'. De même, pour $t \leq 0$,

$$d(\phi^t w_0, \phi^{t+T_1} v) \leq d(\tilde{w_0}, \phi^{T_1}\tilde{v}) \leq \epsilon,$$

car $\tilde{w_0},\phi^{T_1}\tilde{v}$ sont tous deux dans U'. Ainsi, en vertu des inégalités précédentes, l'orbite de w_0 est contenue dans le 2ϵ-voisinage de l'orbite de v, car l'orbite de v' est contenue dans le ϵ-voisinage de l'orbite de v. Comme $d(\phi^{-T_1} w_0, v) \leq \epsilon$ et $|\mu - f(v)| \leq \epsilon$, on a

$$|f(\phi^{-T_1} w_0) - \mu| \leq \delta(\epsilon) + \epsilon < 1.$$

En particulier, $\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t w_0) \geq \mu - \delta(\epsilon) - \epsilon$, et l'ensemble $f(\phi^{\mathbb{R}} w_0) \cap [\mu-1,\mu+1]$ est non vide. De plus, si $\phi^t w_0 \in f^{-1}([\mu-1,\mu+1])$, il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $d(\phi^t w_0, \phi^{t'} v) \leq 2\epsilon$, et alors $\phi^{t'} v$ est dans K et

$$f(\phi^t w_0) \leq f(\phi^{t'} v) + \delta(2\epsilon) \leq \mu + \delta(2\epsilon).$$

Comme $f(\phi^{\mathbb{R}}(w_0))$ est connexe, on peut en conclure que

$$f(\phi^{\mathbb{R}} w_0) \subset]-\infty, \mu + \delta(2\epsilon)].$$

D'où, finalement :

$$|\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t w_0) - \mu| \leq \delta(2\epsilon) + \epsilon.$$

Nous avons ainsi obtenu une nouvelle géodésique $\phi^{\mathbb{R}}(w_0)$, telle que l'ω-limite positive soit une orbite périodique, et sur laquelle la borne supérieure de f est aussi proche que l'on veut de celle sur la géodésique initiale, car f est uniformément continue sur K. Si $\omega_+(v) = \emptyset$, prenons $w_0 = v$. Appliquons la même technique à partir de l'orbite $\phi^{\mathbb{R}}(-w_0)$, nous pouvons obtenir une troisième orbite, dont les ω-limites positive et négative sont chacune soit périodique, soit vide, et sur laquelle la borne supérieure de f est aussi proche que l'on veut de celle sur la géodésique initiale. Ce qui conclut la preuve.

□

Preuve de l'assertion 2 du théorème 3.1. Montrons d'abord l'inclusion du terme de gauche dans celui de droite. Soit $w \in T^1V$ tel que $\omega_+(w) \neq \emptyset$ et $\nu = \limsup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t w) < +\infty$. Comme $f^{-1}([\nu-1,\nu])$ est compact, et qu'un ensemble ω-limite est fermé, il existe $v \in \omega_+(w)$ tel que $f(v) = \nu$.

Nous reprenons ici un argument très proche de celui de Sa'ar Hersonsky et Frédéric Paulin dans [**HP02**], où ils démontrent que la constante d'Hurwitz peut se calculer uniquement à l'aide de la profondeur de pénétration des géodésiques périodiques.

Soit $\delta > 0$. Il existe $T_1,T_2 > 0$, $T_1 - T_2$ aussi grand que l'on veut, tel que les vecteurs $v_i = \phi^{T_i} w \in T^1V$ vérifient $d(v_i,v) < \delta$. Soit $\epsilon > 0$, il existe, par le lemme de fermeture d'Anosov, pourvu que $T_1 - T_2$ soit suffisamment grand, un δ tel qu'il existe une orbite périodique $g(t)$ de période T avec $|T - (T_1 - T_2)| < \epsilon$, telle que pour tout $t \in [0,T]$,

$$d(g(t),\phi^{t+T_2} w) < \epsilon.$$

Par des techniques de continuité uniforme semblables à celles de la preuve de la proposition précédente, nous obtenons une orbite périodique sur laquelle la borne supérieure de f est aussi proche que l'on veut de celle sur l'ensemble ω-limite initial.

La deuxième étape, indépendante, consiste à démontrer la réciproque :

$$\overline{\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) | v \in J_0\}} \subset \{\sup_{v\in\omega_+(w)} f(v) | w \in T^1V,\, \omega_+(w) \neq \emptyset\}.$$

Soit une suite $\mathcal{G}_i$ de géodésiques périodiques orientées, $T^1\mathcal{G}_i$ l'ensemble des applications localement isométriques de $\mathbb{R}$ dans V, d'image $\mathcal{G}_i$ et respectant l'orientation de $\mathcal{G}_i$, telle que $\nu_i = \sup_{v\in T^1\mathcal{G}_i} f(v)$ converge vers $\nu \in \mathbb{R}$. Nous extrairons librement des sous-suites de $\mathcal{G}_i$, tout en continuant à noter la suite de la même manière. Par compacité de $f^{-1}([\nu-1,\nu+1])$, les ensembles $T^1\mathcal{G}_i$ ont un point d'accumulation (lorsque i tend vers l'infini) v, tel que $f(v) = \nu$. Ainsi, il nous suffit, pour conclure la démonstration, de construire un vecteur w vérifiant :

$$v \in \omega_+(w) \subset \bigcap_{i>0} \overline{\bigcup_{j>i} T^1\mathcal{G}_j} \ .$$

Soit $\tilde{v}$ un relevé de v dans $T^1\Omega$, posons $\epsilon_i = 2^{-i}$. On peut trouver :

$$B_i = V_i \times W_i \times]t_0 + \epsilon_i, t_0 + \epsilon_i[,$$

une suite décroissante de voisinages de $\tilde{v}$, V_i, W_i des ouverts relativement compacts de fermetures disjointes, et telle que $\cap_i B_i = \{\tilde{v}\}$, et que chaque B_i soit inclus dans une boule de $T^1\Omega$ de rayon $2\epsilon_i$. Désignons par $\gamma_i \in \Gamma$ la transformation telle que pour tout $v_i \in T^1\mathcal{G}_i$, on ait $\gamma_i(v_i) = \phi^{l_i}(v_i)$, où l_i est la longueur de $\mathcal{G}_i$.

On peut alors supposer que $\pi^{-1}(T^1\mathcal{G}_i) \cap B_i \neq \emptyset$. Soit donc $v_i \in T^1\mathcal{G}_i \cap B_i$. Comme le point à l'infini attractif de γ_i est dans V_i, quitte à considérer un itéré de γ_i, on peut supposer que $\gamma_i(\overline{V_i}) \subset V_i$, et de même $\overline{W_{i-1}} \subset \gamma_i(W_i)$.

Considérons la suite $V_i' = \gamma_1\gamma_2...\gamma_i(V_i)$, avec $V_0' = V_1$. Remarquons tout d'abord que cette suite est décroissante au sens de l'inclusion : comme $\gamma_{i+1}(V_{i+1}) \subset V_{i+1} \subset V_i$, c'est évident. De même, $W_i' = \gamma_1\gamma_2...\gamma_i(W_i)$ est une suite croissante. Soit $\xi \in \cap_{i>0}\overline{V_i'} \neq \emptyset$, soit $\eta \in W_1$. On pose $w = (\xi, \eta, t_0) \in B_1$.
Montrons maintenant par récurrence qu'il existe $L_i \in [-16\epsilon_i + l_i, 16\epsilon_i + l_i]$, tel que :

$$\phi^{L_1+L_2+...+L_i}(w) \in \gamma_1...\gamma_i(B_i),$$

En effet, c'est vrai pour $i = 0$ avec $B_0 = B_1$. Supposons que ce soit vrai pour i, et posons

$$v'_{i+1} = \gamma_1...\gamma_i(v_{i+1}) \in \gamma_1...\gamma_i(B_{i+1}).$$

On a alors :

$$\phi^{l_{i+1}}(v'_{i+1}) = (\gamma_1...\gamma_i)\gamma_{i+1}(\gamma_1...\gamma_i)^{-1}(v'_{i+1}) \in \gamma_1...\gamma_i\gamma_{i+1}(B_{i+1}).$$

Comme $\xi \in \gamma_1...\gamma_{i+1}(V_{i+1})$ et $\eta \in W_1 \subset \gamma_1...\gamma_{i+1}(W_{i+1})$, il existe T tel que $\phi^T(w) \in \gamma_1...\gamma_{i+1}(B_{i+1})$. Comme les B_i sont de diamètre $< 2\epsilon_i$, l'inégalité triangulaire appliquée aux points v'_{i+1}, $\phi^{l_{i+1}}(v'_{i+1})$, $\phi^{L_1+...+L_i}(w)$ et $\phi^T(w)$ nous donne

$$|T - (L_1 + .. + L_i) - l_{i+1}| < 4(\epsilon_i + \epsilon_{i+1}) < 16\epsilon_{i+1}.$$

Ainsi on pose $L_{i+1} = T - (L_1 + .. + L_i)$.

Il ne reste qu'à vérifier que w vérifie bien les propriétés annoncées, mais c'est facile car ainsi pour tout $t \in [L_1 + .. + L_i, L_1 + .. + L_i + L_{i+1}]$, la projection de $\phi^t(w)$ sur

T^1V est à distance $< 20\epsilon_i$ de $T^1\mathcal{G}_i$, et les projections de $\phi^{L_1+..+L_i}(w)$ nous donnent une suite d'adhérence v.

$\square$

Ainsi, dans le cas d'un espace $CAT(-1)$, on a la propriété suivante, dont la deuxième assertion se démontre de la même manière que dans le corollaire 2.7.

COROLLAIRE 3.3. *Supposons f minorée. Si C_f est isolée dans L_f, alors il existe un vecteur périodique v tel que*

$$\mu_f(v) = \nu_f(v) = C_f. \tag{10}$$

Si, au contraire, il n'existe aucun vecteur périodique vérifiant 10, alors il existe un nombre non dénombrable de vecteurs v d'orbites disjointes et deux à deux non faiblement asymptotes tels que 10 ait lieu (et C_f n'est pas isolée, ni dans L_f ni dans M_f).
$\square$

2. Application au cas arithmétique de rang 1

J'applique ici le théorème précédent à la situation où $r + s = n = 1$, c'est à dire lorsque $V_{\mathbb{K}}$ est une orbifolde de Bianchi.

Soit $EQ(E)$ l'ensemble des éléments de $E - \mathbb{K}$ algébriques de degré 2 sur $\mathbb{K}$, et G_P l'ensemble des géodésiques (non orientées ni pointées) de $V_{\mathbb{K}}$ dont les relevés sur Ω ont des points à l'infini qui soient dans $EQ(E)$ ou bien des éléments p/q de $\mathbb{K}$ tels que $\langle p,q\rangle \notin P$. Notons Q_P l'ensemble des formes quadratiques correspondantes, c'est à dire de la forme :

$$q(x,y) = \lambda(x - \alpha y)(x - \beta y),$$

où $\lambda \in E - \{0\}$, α,β sont soit quadratiques, soit rationnels avec la condition exprimée ci-dessus. L'interprétation dynamique de ces définitions est donnée dans le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Les éléments de G_P sont les géodésiques non orientées (vues comme paire d'orbites opposées, de la forme $g = (\phi^{\mathbb{R}}(v)) \cup (\phi^{\mathbb{R}}(-v))$), avec $\omega_+(v)$ (resp. $\omega_-(v)$) soit vide, soit périodique, et telles que pour tout I dans P, on a*

$$\mu_{f_I}(g) > 0.$$

PREUVE. Si $\omega_+(v) = \emptyset$, et si un relevé $\tilde{v} \in \Omega$ de v s'écrit $v = (v_+,v_-,t)$, alors $v_+ = p/q \in \mathbb{K}$, avec $\langle p,q\rangle \notin P$. En effet, un vecteur qui sort de tout compact sous l'action du flot a une orbite nécessairement orthogonale à une horosphère, centrée en un certain $p/q \in \mathbb{K}$. Si $\langle p,q\rangle \in P$, alors la géodésique vérifie clairement $\mu_{f_I}(g) = 0$. La réciproque est facile. $\square$

Ce théorème a déjà été démontré par Cusick [**Cus87**] dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Cependant, l'approche dynamique permet plus de souplesse, puisque qu'elle n'utilise pas de codage du type fractions continues; or leur théorie dépend énormément de $\mathbb{K}$.

THÉORÈME 3.4.

$$M_P = \overline{\{\mu_P(q) | q \in Q_P\}},$$

$$L_P = \overline{\{\nu_P(x) | x \in EQ(E)\}}.$$

En particulier, L_P et M_P sont fermés.

PREUVE. Nous appliquons le théorème 3.1 à la fonction f_P sur $T^1V_{\mathbb{K}}$. Cette fonction est continue et propre, et on pourra remarquer que c'est le minimum parmi une famille finie de fonctions de Busemann. Le résultat est donc immédiat, au vu des lemmes 2.2 et 3.1, modulo la vérification que 0 appartient bien aux deux spectres, et est bien dans l'adhérence des ensembles ci-dessus; mais c'est vrai car presque toute orbite est dense, ainsi que presque toute ω-limite positive, et l'ensemble des vecteurs périodiques est dense. $\square$

Le corollaire 3.3 s'applique, et se traduit si $\mathbb{K}$ est imaginaire quadratique par :

COROLLAIRE 3.5. *Si $C_{\mathbb{K}}$ est isolée dans $L_{\mathbb{K}}$, alors il existe un nombre complexe z, quadratique sur $\mathbb{K}$, et une forme quadratique complexe q à coefficients dans $\mathcal{O}$ tels que*

$$\mu_{\mathbb{K}}(q) = \nu_{\mathbb{K}}(z) = C_{\mathbb{K}}. \tag{11}$$

Dans le cas contraire où il n'existe pas de z quadratique tel que $\nu_{\mathbb{K}}(z) = C_{\mathbb{K}}$, ou bien s'il n'existe pas de q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\mu_{\mathbb{K}}(q) = C_{\mathbb{K}}$, alors la multiplicité de $C_{\mathbb{K}}$ est non dénombrable dans les deux spectres et $C_{\mathbb{K}}$ n'est pas isolée, ni dans $L_{\mathbb{K}}$ ni dans $M_{\mathbb{K}}$. $\square$

Pour conclure cette partie, donnons un indice que l'inclusion $L_P \subset M_P$ pourrait bien être stricte. Pour que ce soit vrai, il faut déjà que les fermetures d'orbites ne soient pas toutes des ω-limites. Rappelons-nous des ensembles J et J_0 du théorème 3.1, V étant ici une variété hyperbolique. On remarquera que l'exemple dû à Freiman d'élément de $M_{\mathbb{Q}} - L_{\mathbb{Q}}$ est du type de celui décrit dans cette proposition [**Cus87**].

PROPOSITION 3.2. *Soit $v \in J - J_0$ tel que $\omega_+(v) \neq -\omega_+(-v)$. Alors la fermeture de l'orbite de v n'est pas un ensemble ω-limite.*

PREUVE. Supposons d'abord que $\omega_+(v), -\omega_+(-v)$ soient des orbites périodiques distinctes. Choisissons un voisinage tubulaire dans T^1V de l'orbite de v, suffisamment petit pour qu'il ait une forme de monture de lunettes dont les branches soient cassées, c'est à dire topologiquement deux tores pleins $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ reliés par un cylindre plein $\mathcal{C}$, la géodésique engendrée par v allant de $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{T}_2$, et tel que pour tout $w \in \mathcal{C}$, le germe de rayon géodésique engendré par w soit rentre dans $\mathcal{T}_2$, soit sort de la paire de lunettes $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{C}$. Procédons par l'absurde, et supposons que l'adhérence de la géodésique engendrée par v soit égale à $\omega_+(v')$ pour un certain v', alors il existe $T > 0$ tel que $\phi^{[T;+\infty[}(v')$ soit inclus dans le voisinage tubulaire. Soit s tel que $\phi^s(v) \in \mathcal{C}$, alors il existe $t > T$ tel que $\phi^t(v')$ arbitrairement proche de $\phi^s(v)$, et en particulier $\phi^t(v') \in \mathcal{C}$. Dans le futur, le rayon engendré par $\phi^t(v')$ est ainsi coincé dans $\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{C}$ et ne visitera plus jamais $\mathcal{T}_1$, ce qui est une contradiction avec le fait que la géodésique engendrée par v est dans l'ω-limite de v'. Si $\omega_+(v), -\omega_+(-v)$ ne sont pas tous deux périodiques, l'un d'eux seulement est vide et la preuve fonctionne de même, en prenant pour $\mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_2$ un cylindre plein. □

3. Sur la constante de Hurwitz

Soit $\mathbb{K}$ un corps imaginaire quadratique sur $\mathbb{Q}$. Dans [**HP02**] est démontrée la formule suivante pour $C_{\{\mathcal{O}\}}$

$$C_{\mathcal{O}} = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}}, loxodromique} \max_{\gamma' \in \Gamma_{\mathbb{K}}} \frac{\sqrt{tr(\gamma)^2 - 4}}{2|c(\gamma'\gamma\gamma'^{-1})|}, \tag{12}$$

où $c(\gamma)$ désigne l'élément de la deuxième ligne, première colonne de la matrice γ. En effet, si g est une géodésique périodique de $V_{\mathbb{K}}$ de vecteur directeur v, et si on désigne par $\Gamma(g)$ l'ensemble des γ dans Γ correspondant à g, alors

$$\mu_{f_{\mathcal{O}}}(g) = \max_{\gamma \in \Gamma(g)} \frac{\sqrt{tr(\gamma)^2 - 4}}{2|c(\gamma)|}. \tag{13}$$

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. *Il existe un algorithme (explicite) qui, étant donné $\epsilon > 0$, calcule explicitement une matrice M dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$ loxodromique et z dans $\mathbb{C}$ tel que $Mz = z$ et*

$$C_{\mathbb{K}} - \epsilon \leq \nu_{\mathbb{K}}(z) \leq C_{\mathbb{K}}.$$

Comme on ne connaît pas de constante de Hurwitz qui ne soit pas donnée par une classe de conjugaison de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ (c'est-à-dire que l'$\inf$ est un $\min$ dans la formule 12), et qui ne soit pas isolée dans le spectre de Markoff, on peut s'attendre à ce que pour

ϵ suffisamment petit, la valeur approchée donnée par l'algorithme soit en fait *exacte*. Malheureusement, je ne connaît pas de critère permettant de détecter si c'est le cas. La première étape consiste à trouver un sous-groupe de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ d'indice fini sans torsion; un sous-groupe de congruence modulo un élément p de $\mathcal{O}$, fera l'affaire pourvu que la seule racine de l'unité dans $\mathbb{K}$ congrue à 1 modulo p soit 1. Notons

$$\Gamma[p] = \ker\left(SL_2(\mathcal{O}) \to SL_2(\mathcal{O}/p\mathcal{O})\right),$$

ce sous-groupe distingué. Remarquons que $p = 5$, par exemple, convient toujours. Nous aurons besoin du lemme suivant, qui est une adaptation du lemme des tiroirs, auquel on rajoute le lemme de fermeture. Notons $v(r)$ le volume dans $T^1\mathbb{H}^n$ des boules de centre un vecteur et de rayon r, pour la distance définie précedemment.

LEMME 3.4. *Soit $V = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ une variété hyperbolique, avec Γ sans torsion. Soit $v \in T^1V$, tel que pour tout $t \geq 0$, le rayon d'injectivité en $\pi(\phi^t v)$ est au moins ϵ_1. Alors pour tout ϵ dans $]0,\epsilon_1[$, soient $\delta = \delta(\epsilon)$ et $T = T(\epsilon)$ donnés par le lemme de fermeture 3.2, il existe $t_1 < t_2$ dans $[0,L]$, où L désigne*

$$L = \delta\left(([T/\delta]+2)\frac{\mu(T^1V)}{v(\delta/2)} + 1\right). \tag{14}$$

et $w \in T^1V$, $T_0 > 0$, tels que pour tout $t \in [0,T_0]$,

$$d_{T^1V}(\phi^{t+t_1}v,\phi^t w) < \epsilon,$$

$|T_0 + t_1 - t_2| < \epsilon$ et $\phi^{T_0}w = w$.

PREUVE. Soient $\delta,T > 0$ les constantes données par le lemme de fermeture d'Anosov, qui sont fonction de ϵ, données par exemple explicitement dans le corollaire A.1.

Considérons pour i entier naturel les vecteurs $v_i = \phi^{i\delta}v$, et les voisinages B_i qui sont les boules de centre v_i et de rayon $\delta/2$. Leur volume est $v(\delta/2)$, il est indépendant de i à cause de l'hypothèse sur le rayon d'injectivité et parce qu'il n'y a pas de torsion . Et donc, si on pose

$$m = \left[([T/\delta]+2)\frac{\mu(T^1V)}{v(\delta/2)}\right] + 1,$$

il existe un point de T^1V qui appartient à au moins $[T/\delta]+2$ boules B_i. Donc il existe $i < j \leq m$, tels que

$$d_{T^1V}(v_i,v_j) \leq \delta,$$

et $|i-j| \geq [T/\delta]+1$. Ainsi $\delta|i-j| > T$. Nous pouvons ainsi appliquer directement le lemme de fermeture 3.2 qui permet de conclure. De plus, on peut prendre

$$L_\epsilon = \delta\left(([T/\delta]+2)\frac{\mu(T^1V)}{v(\delta/2)}+1\right).$$

□

COROLLAIRE 3.6. *Supposons que l'on connaisse* $0 < \nu_0 \leq C_{\mathbb{K}}$. *Soit* ϵ_1 *le minimum du rayon d'injectivité aux relevés à* $\Gamma[k]\backslash\mathbb{H}^3$ *des points-bases des vecteurs* $v \in T^1V_{\mathbb{K}}$ *tels que*

$$f_{\mathbb{K}}(v) \leq -\ln(\nu_0).$$

Pour tout $\epsilon \in]0,\epsilon_1[$, *il existe* $L > 0$ *donné par la formule 14 avec* $\mu(T^1V_{\mathbb{K}})$ *remplacé par* $\mu(T^1V_K)\,[\Gamma_{\mathbb{K}} : \Gamma[k]]$, *tel que si* $v_1,\ldots,v_k \in T^1V_{\mathbb{K}}$ *sont des vecteurs tangents à (respectivement) toutes les géodésiques périodiques de longueur au plus* L, *alors*

$$-\ln(C_{\mathbb{K}}) \leq \inf_{i=1,\ldots,k} -\ln(\nu_{f_{\mathbb{K}}}(v_i)) \leq -\ln(C_{\mathbb{K}})+2\epsilon.$$

PREUVE. L'inégalité de gauche est triviale. Montrons celle de droite. Comme la constante d'Hurwitz est atteinte (lemme 1.6), il existe $v \in T^1V_{\mathbb{K}}$ tel que $\mu_{\mathbb{K}}(v) = C_{\mathbb{K}}$, et appliquons le lemme 3.4 à la variété $\Gamma[k]\backslash\mathbb{H}^3$, un vecteur v' relevé de v, et ϵ. C'est légitime d'après le choix de ϵ_1. Nous obtenons un vecteur w' que nous projetons en w sur $T^1V_{\mathbb{K}}$. Le vecteur w est nécessairement de la forme $\pm\phi^t(v_i)$ pour certains t,i, car il est périodique de période L. Comme l'orbite de w est contenue dans un ϵ-voisinage de l'orbite de v, et que $f_{\mathbb{K}}$ est 2-lipschitzienne, car $(r,s) = (1,0)$ ou $(0,1)$ et les fonctions de Busemann sont 1-lipshitziennes, on obtient ainsi l'inégalité annoncée. □

Nous pouvons faire les remarques suivantes. La première est celle qui sera de loin la plus difficile à implémenter.

REMARQUE 3.1. *Il existe un algorithme* (A_1) *qui étant donné* $T > 0$, *fournit une liste finie de matrices* $M_1,..,M_l$ *de* $\Gamma_{\mathbb{K}}$ *telle que pour toute matrice* M *de* $\Gamma_{\mathbb{K}}$ *de trace* t *de module inférieur à* T *et loxodromique (c'est à dire* t^2-4 *n'est pas de module* 1*), il existe* i *tel que* M *est conjuguée dans* $\Gamma_{\mathbb{K}}$ *à l'une des matrices* M_i.

PREUVE. Tout d'abord, il n'y a qu'un nombre fini de traces possibles. Remarquons ensuite que si M, loxodromique, est de trace t, soit (x_1,x_2) un vecteur propre de M de valeur propre $u_t = (t+\sqrt{t^2-4})/2$. En écrivant l'équation matricielle on remarque que, si on note A_t l'anneau des entiers de $\mathbb{K}[\sqrt{t^2-4}]$, alors le sous-$\mathcal{O}$-module de $\mathbb{C}$ engendré par x_1,x_2 est un A_t-module, défini à une constante multiplicative près à partir du choix de u_t, et de plus la matrice de multiplication par u_t dans la $\mathcal{O}$-base (x_1,x_2) est la transposée de M. Il est facile de voir que si M' est de trace t également, alors M est conjugué à M' dans $GL_2(\mathcal{O})$ si et seulement si les deux modules obtenus (à partir de la même valeur propre u_t) sont égaux modulo une homothétie. Comme on peut toujours prendre $x_1,x_2 \in \mathbb{K}[\sqrt{t^2-4}]$, on peut aussi supposer $x_1,x_2 \in A_t$ et le module $\langle x_1,x_2 \rangle$, qui est un idéal de A_t, peut être supposé d'indice $< B_t$ par des techniques classiques de théorie des nombres (voir la finitude du groupe de classes d'idéaux [**BC67**],[**Sam67**]), où B_t est une constante dépendant uniquement de A_t.

A partir de ces données, un algorithme (qui n'a pas prétention à être optimal) peut être le suivant : on calcule tous les B_t correspondants aux A_t pour $|t| \leq T$. On énumère ensuite à l'aide d'une $\mathbb{Z}$-base du $\mathbb{Z}$-module libre de rang 4 qu'est A_t tous ses sous-groupes d'indice $< B_t$ (la redondance n'est pas gênante pour la théorie de l'algorithme). Puis on élimine ceux qui ne sont pas des A_t-modules (en multipliant leurs générateurs par un des 4 générateur de A_t et en vérifiant que les changements de base obtenus sont bien à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Pour chacun de ces modules, on calcule la matrice M de multiplication par u_t dans une $\mathcal{O}$-base, qui est de déterminant 1 et donc dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$. On rajoute alors à la liste $N_1^{-1}\,{}^tMN_1,..,N_{w(\mathbb{K})}^{-1}\,{}^tMN_{w(\mathbb{K})}$ où $N_1,..N_{w(k)}$ sont des représentants préalablement choisis des classes de $GL_2(\mathcal{O})$ modulo $SL_2(\mathcal{O})$.

□

Il est probable que l'on puisse calculer les $\nu_{\{\mathcal{O}\}}(z_i)$, pour z_i point fixe de l'action de M_i, uniquement à l'aide des idéaux calculés ci-dessus, en calculant l'élément de cet idéal de norme minimale. Néanmoins, il existe une méthode plus géométrique pour déterminer le maximum dans la formule 13.

REMARQUE 3.2. *Etant donné une matrice M loxodromique dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$, il est possible de calculer explicitement la constante d'approximation liée à cette matrice, c'est-à-dire $\nu_P(z)$, où z est point fixe de l'action projective de M dans $\mathbb{C}$.*

PREUVE. Faisons-le pour $P = \{\mathcal{O}\}$. Soit
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}),$$
notons $t = a+d$ sa trace, et choisissons une fois pour toute une racine carrée complexe $\sqrt{t^2-4}$. Les deux points fixes de M sont
$$z,z' = \frac{a-d \pm \sqrt{t^2-4}}{2c},$$

et la géodésique g reliant z et z' est périodique de longueur

$$2\left|\ln\left(\left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right|\right)\right|,$$

que l'on peut majorer par $2\ln(\rho)$, où ρ est défini par :

$$\rho = |t| + \sqrt{|t^2-4|},$$

car $|\ln(x)| \leq \ln(x+1/x)$ pour tout $x > 0$, et

$$\left|\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right|^{-1} = \left|\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right| \leq \frac{1}{2}(|t| + \sqrt{|t^2-4|}).$$

Soit $x \in H^3$ le point de la géodésique à la verticale du milieu , $m = (a-d)/2c$ du segment $[z,z']$. L'argument est le suivant : la constante d'approximation de cette géodésique g est égale à $1/2h$, où h est la hauteur de la plus haute (dans le modèle du demi-espace) géodésique de la forme γg, $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}}$. Soit $\gamma_0 g$ une géodésique, et soit y le point le plus haut de cette géodésique. Comme l'intervalle I de longueur $2\ln(\rho)$ centré en x contient un domaine fondamental pour la projection de g dans $V_{\mathbb{K}}$, il existe $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}}$ tel que $\gamma\gamma_0 g = g$ et $\gamma y \in I$, notons alors $p/q = \gamma(\infty) \in \mathbb{K}$ et $r(p/q)$ le rayon de l'horosphère centrée en p/q et tangente en γy à g. L'intervalle I peut se décrire comme l'arc de cercle euclidien des points $x' \in g$ tels que l'angle euclidien θ entre les demi-droites $[m,x)$ et $[m,x')$ vérifie :

$$cos(\theta) \geq \frac{2}{\rho+\rho^{-1}}.$$

En effet, la relation entre la distance hyperbolique $d(x,x')$, pour x' dans g, et l'angle θ est

$$\tanh(d(x,x')/2) = \tan(\theta/2),$$

et en utilisant la relation trigonométrique

$$cos(\theta) = \frac{1-\tan(\theta/2)^2}{1+\tan(\theta/2)^2},$$

nous obtenons la relation désirée. Puisque γy est dans l'intervalle I, le rayon $r(p/q)$ vérifie

$$r(p/q) \geq \frac{|z-z'|}{2}\frac{2}{\rho+\rho^{-1}}.$$

Comme $h \geq \frac{|z-z'|}{2}$, et $r(p/q) = 1/(2h|q|^2)$, nous avons en combinant ces inégalités
$$|q|^2 \leq \frac{\rho + \rho^{-1}}{|z-z'|^2},$$
qui s'écrit encore
$$|q|^2 \leq \frac{|c|^2}{|t^2-4|}(\rho + \rho^{-1}).$$

Remarquons que le nombre de q dans $\mathcal{O}$ vérifiant cette inégalité est fini. D'autre part, si l'on pose :
$$u(s) = \frac{2s+d-a}{\sqrt{t^2-4}},$$
on peut calculer (voir la partie B en annexe):
$$r(p/q) = \frac{|z-z'|}{4}\sqrt{(1+|u(p/q)|^2)^2 - 4\Re(u(p/q))^2}.$$
On a donc une deuxième minoration de $r(p,q)$ qui s'exprime
$$r(p/q) \geq \frac{|z-z'|}{4}\left|1-|u(p/q)|^2\right|.$$
En utilisant cette fois la majoration
$$r(p/q) \leq \frac{1}{|z-z'|\,|q|^2} \leq \frac{1}{|z-z'|},$$
car $|q| \geq 1$, nous obtenons
$$\left|1-|u(p/q)|^2\right| \leq \frac{4}{|z-z'|^2}.$$
En exprimant $u(p/q)$ en fonction de p/q, z,z' et m, on obtient
$$\left|\frac{p}{q} - m\right|^2 \leq 1 + \frac{|z-z'|^2}{4}.$$
Pour q fixé, il n'y a qu'un nombre fini de p tels que cette dernière inégalité soit vraie. Donc, les couples $(p,q) \in \mathcal{O}^2$ tels que $\langle p,q\rangle$ est dans la classe de $\mathcal{O}$, satisfaisant les deux inégalités est un ensemble F_M fini et calculable explicitement. Ainsi, on a la formule suivante pour calculer $\nu_{\{\mathcal{O}\}}(z)$:
$$\nu_{\{\mathcal{O}\}}(z) = \inf\left(\left(\inf_{(p,q)\in F_M} r(p/q)|q|^2\right), \frac{|c|}{\sqrt{|t^2-4|}}\right).$$

□

En conclusion, les remarques 3.1 et 3.2 montrent que tout dans le corollaire 3.6 est explicitement calculable. Nous pouvons toujours prendre

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

puis calculer ϵ_1. Le calcul de δ,T est donné par le corollaire A.1, celui de L par le lemme 3.4, puis le calcul des matrices $(M_i)_{1\leq i\leq k}$ par la remarque 3.1 et celui de leur constante d'approximation associée par la remarque 3.2. La fonction v qui apparaît dans le calcul de L doit être estimée indépendamment.

CHAPITRE 4

Lemme de Borel-Cantelli et loi de puissance

1. Énoncé des résultats

L'objet de ce chapitre (qui devrait s'appeler Borel-Cantelli-Khintchine-Sullivan) est de prouver un analogue du théorème de Khintchine dans le cadre dynamique suivant : soit $V = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ une variété hyperbolique de volume fini. Notons T^1V l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à V, $\pi : T^1V \to V$ la projection canonique, ϕ^t le flot géodésique sur T^1V, et $B(q,r) \subset V$ la boule hyperbolique de centre $q \in V$ et de rayon r. On se donne une fonction $(r_t)_{t\geq 0}$ décroissante de $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$.

La question est de savoir, pour un point p de V fixé, quel sera la mesure de Liouville de l'ensemble des vecteurs v tels qu'il existe $t_i \to +\infty$, tels que $\pi(\phi^{t_i}v) \in B(p,r_{t_i})$, autrement dit tels que $\{t \geq 0 : \pi(\phi^t v) \in B(p,r_t)\}$ n'est pas borné.

THÉORÈME 4.1. *(Cibles rétrécissantes) Supposons que $(r_t)_{t\geq 0}$ soit décroissante. Alors, suivant que*

$$\int_0^\infty r_t^{n-1}dt$$

diverge ou converge, presque tout ou presque aucun vecteur engendre un rayon géodésique qui rencontre pour des temps t arbitrairement grands les boules de centre p, de rayon r_t.

COROLLAIRE 4.2. *(Loi de puissance pour les points) Pour tout p de V, pour presque tout v, on a :*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{-\ln(d(p,\pi(\phi^t v)))}{\ln(t)} = \frac{1}{n-1}$$

On pourrait se poser une question légèrement différente, à savoir quelle est la mesure de Liouville de l'ensemble des vecteurs v tels que $\{t \geq 0 : \pi(\phi^t v) \in B(p,r_t)\}$ soit de mesure de Lebesgue infinie.

PROPOSITION 4.1. *Supposons que $(r_t)_{t\geq 0}$ soit décroissante. Alors, suivant que*

$$\int_0^\infty r_t^n dt$$

diverge ou converge, presque tout ou presque aucun vecteur engendre un rayon géodésique qui passe un temps infini dans les boules de centre p, de rayon r_t. $\square$

La preuve n'est qu'une légère modification de la preuve du théorème 4.1. J'ignore si de tels résultats sont encores vrais lorsques la variété considérée est de courbure variable strictement négative, pour la mesure de Liouville ou bien celle de Bowen-Margulis. Parmi les améliorations possibles, je compte rédiger et publier une version où la variété pourra être hyperbolique complexe, quaternionique ou bien le plan hyperbolique de Cayley, et où les boules ne seront plus supposées de même centre, mais toujours décroissantes au sens de l'inclusion.

2. Rappels et notations

Soit $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot agissant sur un espace mesuré de probabilité (X,μ) tel que l'action préserve la mesure et soit ergodique.

On considérera des familles (continues) de fonctions $F = (f_s)_{s\in[0,+\infty[}$ où $f_s : X \to \mathbb{R}$. Une telle famille F sera dite

- *positive,* si chaque f_s l'est;
- *décroissante,* si $s < t$ implique que pour tout $x \in X$, $f_t(x) \leq f_s(x)$;
- *mesurable,* si $F : [0, +\infty[\times X \to \mathbb{R}$ l'est.

Pour une famille $F = (f_s)_{s\in[0,+\infty[}$ on notera $S_T[F]$ la fonction de X dans $\mathbb{R}$

$$S_T[F](x) = \int_0^T f_t(\phi^t x)dt,$$

et si $f \in L^1(\mu)$, on note $\mu(f_t) := \int_X f_t(x)d\mu(x)$. On notera encore :

$$I_T[F] = \int_0^T \mu(f_t)dt.$$

Dans cette situation, nous pouvons dégager quelques propriétés générales, peut-être implicitement connues, mais qui méritent quelques explications, par analogie avec le lemme de Borel-Cantelli (partie facile) et la loi du 0-1 de Kolmogorov en probabilité.

LEMME 4.2. *Soit $F = (f_t)_{t\in[0,+\infty[}$ une famille mesurable et positive de fonctions. Alors la condition*

$$I_\infty[F] = \int_0^\infty \mu(f_t)dt < +\infty,$$

implique que $S_T[F]$ converge presque partout et au sens L^1 vers une fonction positive et L^1.

PREUVE. En effet, posons

$$S_\infty[F](x) = \lim_{T\to\infty} S_T[F](x),$$

qui est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, existe car $S_T[F](x)$ est croissante en la variable T. De par le théorème de convergence monotone de Lebesgue (cf Rudin, th 1.26 [**Rud80**]), $S_\infty[F]$ existe et est dans $L^1(\mu)$, car d'intégrale $I_\infty[F]$. Le théorème de convergence dominée ([**Rud80**], th 1.34) permet alors de conclure que la convergence est également au sens L^1. ☐

LEMME 4.3. *Soit $F = (f_t)_{t\in[0;+\infty[}$ une famille mesurable, positive et décroissante de fonctions, et supposons que $f_0 \in L^2(\mu)$. Supposons que*

$$I_\infty[F] = \int_0^\infty \mu(f_t) = +\infty,$$

alors tout point d'adhérence faible dans $L^2(\mu)$ de $x \mapsto S_T[F](x)/I_T[F]$ lorsque $T \to +\infty$ est égal à la constante 1 presque partout.

PREUVE. Soit h une limite faible dans $L^2(\mu)$ d'une sous-suite $S_{T_n}[F]/I_{T_n}[F]$, et soit $t > 0$ fixé. Nous voulons d'abord montrer que $h \leq h \circ \phi^t$. On a :

$$S_{T_n+t}[F](x) - S_{T_n}[F](x) = \int_{T_n}^{T_n+t} f_s(\phi^s x)ds \leq \int_0^t f_0(\phi^s(\phi^{T_n}(x)))ds.$$

Cette différence est donc positive et bornée dans L^2. Divisons par $I_{T_n}[F]$, nous avons donc que $S_{T_n+t}[F](x)/I_{T_n}[F]$ converge faiblement vers h. D'un autre côté,

$$\begin{aligned} S_{T+t}[F](x) - S_T[F](\phi^t x) &= \int_0^{T+t} f_s(\phi^s x)ds - \int_0^T f_s(\phi^{t+s}x)ds \\ &= \int_0^t f_s(\phi^s x)ds + \int_0^T (f_{s+t} - f_s)(\phi^{t+s}x)ds. \end{aligned}$$

Par décroissance de f_t, on a

$$S_{T+t}[F](x) - S_T[F](\phi^t x) \leq \int_0^t f_s(\phi^s x)ds,$$

et en divisant par $I_T[F]$, nous obtenons :

$$\frac{S_{T_n+t}[F](x)}{I_{T_n}[F]} - \frac{S_{T_n}[F](\phi^t x)}{I_{T_n}[F]} \leq \frac{S_t[F](x)}{I_{T_n}[F]}$$

Soit E l'ensemble des x tels que $h(x) \geq h(\phi^t x)$. On a :

$$\int_E \frac{S_{T_n+t}[F](x)}{I_{T_n}[F]} - \frac{S_{T_n}[F](\phi^t x)}{I_{T_n}[F]} d\mu(x) \leq \frac{\int_E S_t[F](x)dx}{I_{T_n}[F]},$$

et en interprétant ces intégrales comme des produits scalaires avec la fonction caractéristique de E, nous obtenons lorsque $n \to +\infty$:

$$\int_E h(x) - h(\phi^t x) d\mu(x) \leq 0.$$

Par définition de E, on a donc $h \leq h \circ \phi^t$ presque partout, et ainsi $h = h \circ \phi^t$ presque partout car la mesure μ est invariante. Donc h est constante presque partout par ergodicité de la mesure μ. Comme $S_T[F]/I_T[F]$ est d'intégrale 1, h aussi, donc $h = 1$ presque partout.

□

LEMME 4.4. *Soit $F = (f_t)_{t \in [0;+\infty[}$ une famille mesurable, positive et décroissante de fonctions, et supposons que $f_0 \in L^1(\mu)$. Supposons que*

$$I_\infty[F] = \int_0^\infty \mu(f_t) = +\infty,$$

alors la fonction de la variable x à valeurs dans $[0, +\infty]$

$$L(x) = \limsup_{T \to +\infty} \frac{S_T[F](x)}{I_T[F]},$$

est constante presque partout.

PREUVE. On a

$$\begin{aligned} S_{T+t}[F](x) - S_T[F](\phi^t x) &= \int_0^{T+t} f_s(\phi^s x) ds - \int_0^T f_s(\phi^{t+s} x) ds \\ &= \int_0^t f_s(\phi^s x) ds + \int_0^T (f_{s+t} - f_s)(\phi^{t+s} x) ds \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, notons pour $t > 0$ $G^{(t)} = (g_s^{(t)})$ la famille de fonctions définie par

$$\forall s \geq 0, \, g_s^{(t)} = f_s - f_{s+t}.$$

L'équation précédente s'écrit donc :

$$S_{T+t}[F](x) - S_T[F](\phi^t x) = S_t[F](x) - S_T[G^{(t)}](\phi^t x)$$

Par décroissance de F, $G^{(t)}$ est positive, et de plus $\mu(g_s^{(t)}) = \mu(f_s) - \mu(f_{s+t})$, et donc :

$$I_\infty[G^{(t)}] = I_t[F] < \infty$$

Par le lemme 4.2, pour presque tout x,$S_T[G^{(t)}](x)$ a une limite finie $H^{(t)}(x)$, qui est dans $L^1(\mu)$. Ainsi :

$$\frac{S_t[F](x)}{I_T[F]} \geq \frac{I_{T+t}[F]}{I_T[F]}\frac{S_{T+t}[F](x)}{I_{T+t}(x)} - \frac{S_T[F](\phi^t x)}{I_T[F]} \geq -\frac{H^{(t)}(\phi^t x)}{I_T[F]}.$$

Comme F est une famille décroissante et que $I_\infty[F] = +\infty$, $I_{T+t}[F]/I_T[F]$ converge vers 1 lorsque T tend vers l'infini. De la dernière équation, nous pouvons ainsi déduire que pour tout x tel que $H^{(t)}(x) < \infty$,

$$L(x) = L(\phi^t x).$$

Si $t \leq 1$, alors $H^{(t)}(x) \leq H^{(1)}(x)$. Les ensembles $L^{-1}([a,b])$ sont donc invariants par ϕ^t à un ensemble de mesure nulle près, pour tout $a < b$, a et b dans $[0, +\infty]$ et tout t compris entre 0 et 1. Par ergodicité de ϕ^t, ces ensembles sont de mesure 0 ou 1. Une dichotomie sur l'intervalle $[a,b]$ permet de conclure que L est constant presque partout. □

3. Preuves

LEMME 4.5. *Il existe une constante c_1 telle que si deux boules de $\mathbb{H}^n$, de centres et diamètres respectifs (o_1,r_1), (o_2,r_2) vérifient $r_1 < 1$, $r_2 < 1$, et $d(o_1,o_2) > 2$, alors la mesure des géodésiques de $\mathbb{H}^n$ passant par ces deux boules est majorée par :*

$$c_1 r_1^{n-1} r_2^{n-1} e^{-(n-1)d(o_1,o_2)}$$

PREUVE. Les symboles c',c'',... désigneront des constantes fixes. La mesure des géodésiques passant par $B(o_1,r_1)$ est au plus $c' r_1^{n-1}$. Comme l'aire de la sphère de centre o_1 et de rayon $r = d(o_1,o_2)$ est au moins $c'' e^{(n-1)r}$, on peut trouver des points p_1,...,p_k sur cette sphère qui soient deux à deux à distance au moins $2r_2$, avec

$$k \geq c''' \frac{e^{(n-1)r}}{r_2^{n-1}}.$$

Par homogénéité de $\mathbb{H}^n$, la mesure des géodésiques passant par la boule (o_1,r_1) et la boule (p_k,r_2) est indépendante de k et aussi égale à la quantité recherchée. Comme une telle géodésique ne coupe au plus que 2 boules du types (p_k,r_2), la mesure recherchée est inférieure à

$$2\frac{c r_1^{n-1}}{k} \leq c_1 r_1^{n-1} r_2^{n-1} e^{-(n-1)r}.$$

□

Soit p un point de V, fixé dans ce qui suit. Soit R le minimum de 1 et du rayon d'injectivité de V en p, et soit $(r_t)_{t\geq 0}$ une suite décroissante tendant vers 0 telle que $r_0 < R/2$, et $r_{t+\alpha}/r_t$ tendant vers 1 lorsque t tend vers l'infini, uniformément pour les ensembles compacts de paramètre α. Il sera commode pour la suite de définir r_t pour les temps négatifs comme étant égal à r_0.

On définit une famille f_t de fonctions de la manière suivante. Soit $v \in T^1V$, si $\pi(v)$ n'est pas dans la boule de centre p et de rayon 1, alors $f_t(v) = 0$. Sinon, considérons le segment géodésique S maximal de vecteur directeur v et contenu dans la boule fermée de centre p et de rayon 1. Il existe un unique $\theta \in [-R,R]$ tel que $\pi(\phi^\theta v)$ réalise la distance de S à p. Si $\theta \in [-R/2,R/2]$ et $d(S,p) < r_t$, on définit $f_t(v) = 1$, et 0 sinon. L'intégrale de cette fonction le long du flot compte ainsi les entrées dans la boule de centre p et de rayon r_t du rayon géodésique considéré, avec un facteur R. Remarquons encore que ces fonctions sont symétriques, dans les sens $f_t(w) = f_t(-w)$. Il existe une constante $c_2 > 0$, tel que lorsque $t \to +\infty$:

$$\int_{T^1V} f_t(v)dv \sim c_2 r_t^{n-1}$$

La famille $F = (f_t)_{t\geq 0}$ est une famille décroissante et positive de fonctions sur T^1V, et on a l'asymptotique en prenant pour μ la mesure de Liouville sur T^1V

$$I_T[F] \sim c_2 \int_0^T r_t^{n-1}dt,$$

pourvu que l'un des deux termes tende vers l'infini.

PROPOSITION 4.6. *(Borel-Cantelli-Khintchine-Sullivan pour les points des variétés hyperboliques). Supposons que $\int_0^\infty r_t^{n-1}dt$ diverge. Alors, il existe une constante $c \in]0,\infty]$ telle que pour presque tout $v \in T^1V$:*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{S_T[F](v)}{\int_0^T r_t^{n-1}dt} = c$$

PREUVE. Nous voulons majorer la norme L^2 de $S_T[F]$. Par le théorème de Fubini,

$$S_T[F](v)^2 = 2\int_0^T \int_0^s f_t(\phi^t v)f_s(\phi^s v)dtds.$$

Intégrons sur $v \in T^1V$, puis appliquons le changement de variable $w = \phi^s v$, on obtient

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2\int_0^T \int_0^s \int_{T^1V} f_s(w) f_t(\phi^{t-s}w) dw dt ds,$$

Soit $\tilde{p}$ un relevé de p dans $\mathbb{H}^n$ et $G = (g_t)_{t\geq 0}$ la suite de fonctions définie de la même manière que f_t, mais pour la variété $\mathbb{H}^n$, le point $\tilde{p}$, et le même R. Ainsi, le relevé $\tilde{f}_t$ de la fonction f_t à $T^1\mathbb{H}^n$ s'écrit :

$$\tilde{f}_t(v) = \sum_{\gamma\in\Gamma} g_t(\gamma(v)).$$

Soit D un domaine fondamental de Γ contenant la boule de centre p de rayon R. On peut réécrire :

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2\int_0^T \int_0^s \int_{T^1D} \tilde{f}_s(w)\tilde{f}_t(\phi^{t-s}w) dw ds dt,$$

et donc

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2\int_0^T \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_0^s \int_{T^1D} g_s(w) g_t(\gamma\phi^{t-s}w) dw dt ds.$$

Changeons encore de variable, en posant $v = -w$, ce qui nous donne en utilisant la symétrie des fonctions g_t :

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2\int_0^T \int_{T^1D} \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_0^s g_s(v) g_t(\gamma\phi^{s-t}v) dv dt ds.$$

Pour i entier strictement positif, notons Γ_i l'ensemble fini des γ dans Γ tels que la distance entre $\tilde{p}$ et $\gamma\tilde{p}$ soit comprise dans l'intervalle $[i-1,i+1]$. Comme les ensembles Γ_i recouvrent Γ, on a :

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2\int_0^T \sum_{i>0} \sum_{\gamma\in\Gamma_i} \int_0^s \int_{T^1D} g_s(v) g_t(\gamma\phi^{s-t}v) dv dt ds.$$

Pour γ,v,s et t fixés, la quantité

$$g_s(v) g_t(\gamma\phi^{s-t}v)$$

est non nulle si et seulement s'il existe $(\theta_1,\theta_2) \in [-R/2,R/2]^2$ tels que $\pi(\phi^{\theta_1}v)$ soit à distance plus petite que r_s de $\tilde{p}$, et $\pi(\phi^{\theta_2+s-t}v)$ soit à distance plus petite que r_t de

$\gamma^{-1}\tilde{p}$. Dans ce cas, cette quantité vaut 1 et on peut affirmer, en vertu de l'inégalité triangulaire, que l'on a

$$|(s-t)-d(\tilde{p},\gamma\tilde{p})| < |\theta_1|+|\theta_2|+r_t+r_s \leq 2R,$$

et que de plus le rayon géodésique $(\phi^u v)_{u\geq -1}$ coupe la boule de centre $\gamma^{-1}\tilde{p}$ et de rayon $r_{s-d(\tilde{p},\gamma\tilde{p})-2R}$ (car (r_t) est décroissante), et la boule de centre $\tilde{p}$ de rayon r_s.

Avec cette restriction sur t, nous obtenons à s,v et γ dans Γ_i fixés

$$\int_0^s g_s(v)g_t(\gamma\phi^{s-t}v)dt \leq 4R$$

dans tous les cas, et cette quantité est nulle si la géodésique engendrée par v ne coupe pas les deux boules de centres et rayons respectifs $(\tilde{p},r_s)$,$(\gamma^{-1}\tilde{p},r_{s-i-2R-1})$, ou si $s < i-(2R+1)$. Dans le cas où $i \geq 2R+3$, on a $s-t \geq 2$ et donc la mesure de telles géodésiques est alors majorée par $c_1 r_s^{n-1} r_{s-i-2R-1}^{n-1} e^{-(n-1)(i-1)}$. L'intervalle des vecteurs v d'une telle géodésique tels que $g_s(v) > 0$ étant au plus de longueur 1, on obtient à s et $\gamma\in\Gamma_i$ fixés, lorsque $i \geq 2R+3$

$$\int_{T^1D}\int_0^s g_s(v)g_t(\gamma\phi^{s-t}v)dtdv \leq 4Rc_1 r_s^{n-1} r_{s-i-2R-1}^{n-1} e^{-(n-1)(i-1)},$$

et l'intégrale est en fait nulle si $s+2R+1 < i$. Ainsi, si $i \geq 2R+3$,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_i}\int_{T^1D}\int_0^s g_s(v)g_t(\gamma\phi^{s-t}v)dtdv \leq 4Rc_1 r_s^{n-1} r_{s-i-2R-1}^{n-1} e^{-(n-1)(i-1)} N_i,$$

où N_i désigne le nombre d'éléments de Γ_i, et la somme majorée est nulle si $s+2R+1 < i$. Mais il est classique que $N_i \leq c_4 e^{(n-1)i}$, c_4 dépendant uniquement de p (voir par exemple [**Sul79**]). On en conclut l'inégalité

$$\int_0^T \sum_{i>0}\sum_{\gamma\in\Gamma_i}\int_0^s\int_{T^1D} g_s(v)g_t(\gamma\phi^{s-t}v)dvdtds$$

$$\leq c_3\int_0^T \sum_{i=[2R+4]}^{[s+2R]+1} r_s^{n-1} r_{s-i-2R-1}^{n-1} ds + \int_0^T \sum_{i=1}^{[2R+3]}\sum_{\gamma\in\Gamma_i}\int_{T^1D}\int_0^s g_s(v)g_t(\phi^{s-t}v)dtdvds.$$

Observons que $\cup_{i=1}^{[2R+3]}\Gamma_i$ est un ensemble fini, soit K son cardinal. De plus, on a par décroissance de (r_t), $r_{s-i-2R-1}^{n-1} \leq \int_{s-i-2R-2}^{s-i-2R-1} r_t^{n-1}dt$. Ceci nous donne :

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2c_3 \int_0^T r_s^{n-1} \sum_{i=[2R+4]}^{[s+2R+1]} \int_{s-i-2R-2}^{s-i-2R-1} r_t^{n-1} dt ds + K \int_0^T \int_{T^1D} 4Rg_s(v) dv,$$

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2c_3 \int_0^T r_s^{n-1} \int_{-4R-3}^{s-2R-4} r_t^{n-1} dt ds + c_5 \int_0^T r_t^{n-1} dt,$$

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq 2c_3 \int_0^T r_s^{n-1} \int_{-4R-3}^{s} r_t^{n-1} dt ds + c_5 \int_0^T r_t^{n-1} dt,$$

et par le théorème de Fubini,

$$\int_{T^1V} S_T[F](v)^2 dv \leq c_3 \left(\int_0^T r_s^{n-1} ds \right)^2 + ((4R+3)c_3 r_0 + c_5) \left(\int_0^T r_s^{n-1} ds \right).$$

Ce qui montre que $S_T[F]/I_T[F]$ est bornée dans L^2, et ainsi qu'elle a un point d'adhérence faible dans L^2. Ce point est nécessairement la fonction constante 1, car le lemme 4.3 s'applique. De par le lemme 4.4, la fonction

$$\limsup_{T \to +\infty} S_T[F](v)/I_T[F]$$

est constante presque partout. Cette constante est plus grande que 1. En effet, supposons le contraire; alors il existe $\epsilon > 0$ et un ensemble $E \subset T^1V$, de mesure strictement positive, tels que pour T suffisamment grand et pour tout $v \in E$,

$$S_T[F](v)/I_T[F] < 1 - \epsilon,$$

et donc

$$\int_E S_T[F](v)/I_T[F] < (1-\epsilon)\mu(E),$$

contredisant le fait qu'une limite faible de $S_T[F](v)/I_T[F]$ soit la fonction constante 1.

□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les assertions de la partie 1.

PREUVE DU THÉORÈME 4.1. *Cas de Convergence*. Supposons $\int_0^{+\infty} r_t^{n-1} dt < +\infty$. Pour tout $w \in T^1V$ et $s \geq 4R$, si $\pi(w)$ appartient à la boule B_s, alors

$$\int_{-2R}^{2R} f_s(\phi^t w) dt \geq R.$$

Comme $F = (f_s)_{s\geq 0}$ est décroissante, ceci implique que

$$\int_{s-4R}^{s} f_t(\phi^{t-s+2R}w)dt \geq R,$$

et donc si $\pi(\phi^s v)$ est dans B_s, on a

$$\int_{s-4R}^{s} f_t(\phi^{t+2R}v)dt \geq R.$$

D'un autre côté, le lemme 4.2 nous dit que pour preque tout v,

$$\int_{0}^{\infty} f_t(\phi^t v)dt < \infty,$$

et donc, pour presque tout v, on a

$$\int_{0}^{\infty} f_t(\phi^t(\phi^{2R}v))dt < \infty,$$

et par la remarque précédente, ceci implique que pour t assez grand et v dans un ensemble de mesure pleine, $\pi(\phi^t v)$ n'est pas dans B_t.

Cas de Divergence. Supposons $\int_0^{+\infty} r_t^{n-1}dt = +\infty$. Pour tout $s > R/2$, si $\pi(\phi^t w)$ n'est pas dans B_s pour tout $t \in [-R, +R]$, alors par définition de f_s, on a

$$\int_{-R/2}^{+R/2} f_s(\phi^t w)dt = 0,$$

Comme la famille F est décroissante, on obtient

$$\int_{s}^{s+R} f_t(\phi^{t-s}w)dt = 0.$$

D'autre part, si pout un certain $T > 0$ et tout $t \geq T$, $\pi(\phi^t v)$ n'est pas dans B_t, alors $\pi(\phi^t v)$ n'est pas dans B_s pour tout $s \geq t \geq T$ car (B_t) est décroissante, et donc pour tout $t \in [-R,R]$, tout $s \geq T + R$, $\pi(\phi^{s-R+t}v)$ n'est pas dans B_s. Donc, pour tout $s \geq T + R$, on a

$$\int_{s}^{s+R} f_t(\phi^{t-R}v)dt = 0.$$

Ceci montre que $S_\infty[F](\phi^{-R}v) < +\infty$, si le rayon géodésique $(\phi^t v)_{t\geq 0}$ n'intersecte B_t que pour des temps t bornés. Mais de par la proposition précédente, $S_\infty[F](v) = +\infty$ pour presque tout v, et donc la situation précédente ne se produit que pour un ensemble de mesure nulle. $\square$

PREUVE DU COROLLAIRE 4.2. Soit $\epsilon \geq 0$, posons $r_t = t^{-1/(n-1)-\epsilon}$ pour $t > 1$, et $r_t = 1$ si $t \leq 1$. Si $\epsilon > 0$, alors $I_\infty[F] < +\infty$ et donc presque tout rayon géodésique ne rentre qu'un nombre fini de fois dans une boule de rayon $2r_t$ et de centre p au temps t. Donc

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{-\ln(d(p,\pi(\phi^t v)))}{\ln(t)} \leq \frac{1}{n-1} + \epsilon.$$

Si $\epsilon = 0$, au contraire presque tout rayon géodésique rentre pour une infinité de temps $t_n \to \infty$, dans une boule de rayon $r_t/2$ et de centre p. Donc

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{-\ln(d(p,\pi(\phi^t v)))}{\ln(t)} \geq \frac{1}{n-1},$$

ce qui conclut la loi de puissance pour les points.

□

4. Conclusion

On peut pousser l'analogie avec l'approximation diophantienne et le théorème de Khintchine un peu plus loin, en considérant la fonction $f(v) = d(\pi(v),p)$, qui est continue et propre. En particulier, les résultats particuliers au rang 1 des chapitres précédents s'appliquent, et l'approche des rayons géodésiques à un point p fixé donne lieu à deux spectres compacts $M(p)$ (resp. $L(p)$) qui sont l'ensemble des distances possibles entre les points-bases des ensembles invariants sous l'action du flot géodésique (resp. les ensembles ω-limites).

CHAPITRE 5

Quelques répartitions d'actions de réseaux

1. Introduction

Soient Γ un sous-groupe discret d'un groupe de Lie, et $(B(T))_{T\geq 0}$ une famille croissante de sous-ensembles finis de Γ - on pense ici aux boules de rayon T, centrée en e, pour une certaine distance sur Γ. Supposons que Γ agisse sur une variété topologique X (par exemple, un espace homogène). Nous nous intéressons à des convergences du type : il existe deux fonctions $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ et $\delta: X^2\to\mathbb{R}^+$, et une mesure μ sur X, tels que pour certains $x\in X$ (par exemple, μ-presque tout x, ou bien tout x d'orbite dense) et pour toute fonction f de X dans $\mathbb{R}$ continue à support compact, on a

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{F(T)}\sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x)=\int_X f(y)\delta(x,y)d\mu(y).$$

Le théorème ergodique de Birkhoff, pour $\Gamma=\mathbb{Z}$ et $B(T)$ l'intervalle $[-T,T]\cap\mathbb{Z}$, est l'exemple le plus marquant de ce type de résultat concernant la répartition des orbites sous une action. Lorsque Γ est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, K. Fujiwara et A. Nevo ont montré qu'une action de Γ sur un espace mesuré (X,μ), avec μ une mesure ergodique et de probabilité, satisfait (sous une hypothèse de mélange) le théorème ergodique ponctuel pour les boules du graphe de Cayley [**FN98**]. Mais beaucoup d'actions naturelles de réseaux de groupes de Lie échappent à ce cadre, et en particulier les deux exemples suivants.

THÉORÈME (Ledrappier; Gorodnik). [**Led99**], [**Gor02b**] *Soient Γ un réseau de $SL_n(\mathbb{R})$ agissant matriciellement sur $\mathbb{R}^n$, f une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et soit*

$$B(T)=\{\gamma\in\Gamma : tr({}^t\gamma\gamma)\leq T^2\}.$$

Alors pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ dont l'orbite Γx n'est pas discrète si $n=2$, ou dont l'orbite est dense si $n>2$, on a

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T^{(n-1)^2}}\sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x)=\frac{c_n}{covol(\Gamma)||x||^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{||y||}d\mathcal{L}(y),$$

où $\mathcal{L}$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, c_n une constante positive ne dépendant que de la dimension n, et $covol(\Gamma)$ est le covolume de Γ.

THÉORÈME (Gorodnik). [**Gor02a**] *Soient Γ un réseau de $SL_n(\mathbb{R})$ agissant sur la variété des drapeaux $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^n$, f une fonction continue de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}$, et $B(T)$ comme* *précedémment, et désignons par m la mesure $SO(n)$-invariante sur $\mathcal{G}$, alors pour tout $x \in \mathcal{G}$,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^{n(n-1)}} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x) = \frac{c'_n}{covol(\Gamma)} \int_{\mathcal{G}} f dm,$$

où c'_n désigne une constante indépendante de Γ.

L'objet de cette étude est de donner différents exemples de cas où la convergence $\mathcal{C}$ a bien lieu, avec différents comportements : convergence presque partout ou partout, dépendance de $\delta(x,.)$ en x, comparaison entre $F(T)$ et le cardinal de $B(T)$. Ces exemples sont tous d'origine algébrique, plus précisemment nous regardons l'action de réseaux Γ (ou d'un sous-groupe discret) de groupes de Lie G sur certains espaces homogènes G/H, où H est un sous-groupe de G.

Dans le premier exemple que l'on donne, l'espace admet des mesures invariantes de masse infinie, et pour ces mesures la convergence a lieu presque partout vers un multiple de la mesure choisie.

THÉORÈME 5.1. *Soient $n \geq 2$, A le groupe des matrices diagonales $n \times n$ à coefficients positifs, $X = SL_n(\mathbb{R})/A$, Γ un réseau de $SL(n,\mathbb{R})$. Il existe une mesure μ non nulle sur X qui est invariante par l'action de $SL_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche sur X. Soit d une distance riemannienne invariante à gauche sur $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$, on définit pour $x_0 \in SL_n(\mathbb{R})$ et $T \geq 0$,*

$$B_\Gamma(x_0,T) = \{\gamma \in \Gamma : d(x_0SO(n),\gamma x_0SO(n)) \leq T\}.$$

Alors pour tout $f \in L^1(\mu)$, tout $x_0 \in SL_n(\mathbb{R})$, pour μ-presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^{n-1}} \sum_{\gamma\in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma\bar{x}) = c \int_X f d\mu,$$

où c est une constante indépendante de f et Γ.

On peut également changer la façon de compter, c'est à dire opter pour un choix différent de boules $B(T)$; le premier des deux exemples suivants est en effet comparable de ce point de vue au théorème précédent. Dans le deuxième exemple, il existe une mesure invariante infinie naturelle, mais comme dans le théorème de Ledrappier-Gorodnik, la convergence a lieu avec des mesures qui lui sont absolument continues. De plus, et contrairement à l'exemple de Ledrappier-Gorodnik, la fonction $\delta(x,y)$ n'est pas un produit de deux fonctions à variables séparées x et y, et c'est à dire les mesure $\delta(x,y)d\mu(y)$ ne sont pas proportionnelles entre elles.

THÉORÈME 5.2. *Soit M_0 une matrice 3×3, à valeurs propres réelles, dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal, et qui n'a pas de valeur propre de multiplicité exactement 2, X la variété des matrices conjuguées par $SL_3(\mathbb{R})$ à M_0, et soit Γ un réseau de $G = SL_3(\mathbb{R})$, agissant par conjugaison sur X. On pose*

$$B(T) = \{\gamma \in \Gamma : tr({}^t\gamma\gamma) \leq T^2\}.$$

Soient μ la mesure sur X qui est $G-$invariante par conjugaison (définie à une constante multiplicative près), et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Alors

– *Si M_0 possède une valeur propre de multiplicité 3, alors pour tout x dont l'orbite Γx est dense, on a*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^2} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x) = \frac{c'}{covol(\Gamma)} \int_X f(y)\delta(x,y)d\mu(y).$$

– *Si M_0 est diagonalisable, alors pour μ-presque tout x dans X, on a*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{(\ln(T))^2} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma x) = \frac{c}{covol(\Gamma)} \int_X f(y)d\mu(y).$$

La fonction δ est continue, peut s'expliciter et est indépendante de Γ et f. De même, les constantes $c > 0$ et $c' > 0$ ne dépendent pas ni de Γ, ni de f.

Enfin, nous donnons l'exemple suivant, analogue au théorème de Gorodnik, où l'espace est compact mais n'admet pas de mesure finie invariante non triviale, et où la convergence a lieu uniformément. La limite dépend seulement de la manière de compter les éléments de Γ, et ces différentes limites selon ces choix donneront lieu à des mesures absolument continues entre elles.

THÉORÈME 5.3. *Soit $\mathbb{H}^n$ un espace hyperbolique, et $X = \partial\mathbb{H}^n$. Soit Γ un sous-groupe discret et non élémentaire de $Isom(\mathbb{H}^n)$, de mesure de Bowen-Margulis finie. Notons μ_o la mesure de Patterson-Sullivan associée à un point o de $\mathbb{H}^n$ fixé. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Notons*

$$B(T) = \{\gamma \in \Gamma : d(\gamma o,o) < T\},$$

où d désigne la distance hyperbolique. Alors, pour tout $\xi \in X$, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma\xi) = \frac{1}{\mu_o(X)} \int_X f d\mu_o,$$

et cette convergence est uniforme en ξ lorsque $T \to +\infty$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur la différence entre ce type de résultats et les résultats d'équidistribution d'Eskin-Mac Mullen [**EM93**]. En effet, ils considèrent le comptage d'orbites discrètes selon Γ sur le grande boules de G/H. Ici, le problème est de déterminer la densité locale d'une orbite générique sur de grandes boules de Γ.

Les preuves des théorèmes 5.1 et 5.2 étant assez longues et ayant nombres de points communs, il ne semble pas inutile de faire une esquisse leurs démonstrations.

Dans les deux cas, il s'agit d'étudier la répartition des orbites de Γ agissant à gauche sur un espace homogène G/H (voir 3.1 pour se ramener à ce cas dans le th. 5.2). L'idée de départ est, comme dans [**Led99**], de considérer l'action duale du groupe H (abélien dans les cas considérés) à droite sur $\Gamma\backslash G$, et d'appliquer un théorème ergodique ponctuel pour cette action. On verra que dans chacun des cas, G s'écrit comme un produit $G/H \times H$ à l'aide d'une section continue $p : G/H \to G$, et que la mesure de Haar de G se décompose en la mesure produit d'une mesure G-invariante sur H et de la mesure de Haar de H. Enfin, l'action de Γ sur $G = G/H \times H$ sera ainsi donnée par un cocycle continu $c : \Gamma \times G/H \to H$:

$$\gamma(gH,h) = (\gamma gH, h + c(\gamma, gH)),$$

cocycle que l'on peut même écrire

$$c(\gamma, gH) = p(\gamma gH)^{-1}\gamma p(gH).$$

La présentation faite dans la partie 2 sera cependant un peu plus générale, voir 3.2 dans l'autre cas. A partir d'une fonction f continue à support compact sur G/H, on définit d'abord une fonction $\tilde{f}$ sur G, en choisissant une approximation de l'unité $\chi : H \to \mathbb{R}_+$, c'est à dire une fonction continue positive, à support compact et d'intégrale 1, et en posant

$$\tilde{f}(gH,h) = f(gH)\chi(h);$$

puis une fonction $\bar{f} : \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}$ par

$$\bar{f}(\Gamma g) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \tilde{f}(\gamma g).$$

Soit p_0H dans G/H, tel que $p(p_0H) = p_0$. Alors, si $\{E(T)\}_{T\geq 0}$ est une famille de sous-ensemble mesurables de H,

$$\int_{E(T)} \bar{f}(\Gamma p_0 h)dh = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma p_0 H) \int_{E(T)} \chi(c(\gamma, p_0H) + h)dh.$$

L'idée est de choisir $E(T)$ de telle sorte que cette dernière somme soit égale à la somme recherchée $\sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma p_1 H)$. Imaginons que nous puissions nous ramener au cas où χ est le delta de Dirac en l'élement neutre de H. On pourrait alors réecrire l'équation

$$\int_{E(T)} \bar{f}(\Gamma p_0 h)dh = \sum_{\gamma\in\Gamma\,:\,c(\gamma,p_0H)\in -E(T)} f(\gamma p_0 H).$$

Imaginons maintenant que l'on puisse aussi se ramener au cas où le support de f est un point p_1H, qui vérifie $p(p_1H) = p_1$. (cette hypothèse étant bien sûr impossible à vérifier à moins que f soit nulle...). Comme dans la somme de droite, nous pouvons nous limiter aux termes non nuls, c'est à dire aux γ vérifiant $\gamma p_0 H = p_1$; dans ce cas, $c(\gamma,p_0H) = p_1^{-1}\gamma p_0$. Autrement dit, pour retrouver la somme recherchée à droite, on veut que ($\gamma \in B(T)$ et $\gamma p_0 H = p_1 H$) soit équivalent à ($p_1^{-1}\gamma p_0 \in -E(T)$ et $\gamma p_0 H = p_1 H$). Les boules $B(T)$ étant données par l'intersections de Γ avec des boules $\mathcal{B}(T)$ de G (suivant les cas, par exemple $\mathcal{B}(T) = \{\gamma \in G : tr({}^t\gamma\gamma) \leq T^2\}$), le choix $-E(T) = (p_1^{-1}\mathcal{B}(T)p_0)\cap H$ convient (et ne dépend pas de Γ). Ensuite, on peut calculer que la H-mesure de Haar de $E(T)$ a une asymptotique de la forme $\delta(p_0H,p_1H)F(T)$ (dépendante à priori de p_0H et p_1H). Or, comme on aurait alors

$$\int_{E(T)} \bar{f}(\Gamma p_0 h)dh = \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma p_0 H),$$

si l'on pouvait appliquer un théorème ergodique ponctuel pour la famille de boules $E(T)$, on aurait alors

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{F(T)} \sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma p_0 H) = \frac{\delta(p_0H,p_1H)}{covol(\Gamma)} \int_{\Gamma\backslash G} \bar{f}$$

$$= \frac{\delta(p_0H,p_1H)}{covol(\Gamma)} \int_{G/H} f = \frac{1}{covol(\Gamma)} \int_{G/H} f(gH)\delta(p_0H,gH)d(gH).$$

Bien sûr, il y a de nombreux problèmes dans cette esquisse de preuve ! Dans la preuve du th. 5.1, les choses seront assez simples grâce à l'utilisation d'une inégalité triangulaire. Par contre, pour le th. 5.2, il nous faudra introduire deux ouverts relativement compacts $\mathcal{U}$ et U de G/H et H respectivement (contenant par la suite les supports de f et χ respectivement), puis étudier des sous-ensembles de H, $K_1(T,U,\mathcal{U})$ et $K_2(T,U,\mathcal{U})$, qui nous permettront d'encadrer la somme recherchée (partie 3.3), en étudiant la dépendance en p_1H des ensembles $E(T)$ (qui seront notés par la suite $-E_{(p_0,p_1)}(T)$). Ensuite, on s'intéressera dans la partie 3.4 à l'ensemble Y des p_0H pour lesquels on a un théorème ergodique ponctuel selon les boules $E_{(p_0,p_1)}(T)$, la difficulté venant du fait que ces ensembles nous soient imposés par la construction précédente. Enfin, dans la partie 3.5, on recollera les morceaux en utilisant un lemme dérivé des partitions de l'unité, nous permettant de supposer librement que le support de f est dans le petit ouvert $\mathcal{U}$ qui sera imposé par d'autres paramètres.

2. Cas du plongement géodésique

Dans cette section nous donnons la preuve du théorème 5.1 en démontrant le théorème 5.4, qui est plus général et inclut en particulier l'action de certains réseaux d'espaces $CAT(-1)$ sur l'espace des plongements géodésiques. Nous prouvons aussi ici le corollaire 5.5, qui sera l'un des ingrédients de la preuve du théorème 5.3.

2.1. Hypothèses, données de départ. Soit (X,d_0) un espace métrique complet localement compact, muni de plus d'une pseudo-distance d (c'est à dire une distance ne satisfaisant pas nécessairement $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$), compatible avec la topologie (c'est-à-dire que $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ est continue), telle que les boules fermées de d soient compactes; en particulier, X est nécessairement σ-compact (c'est-à-dire réunion dénombrable de compacts). Soit $A = \mathbb{R}^k$, pour un certain $k \geq 1$, muni d'une norme $||.||$. On suppose que A agit à droite par par homéomorphismes sur X, de façon que

$$\forall x \in X, \forall a \in A, d(xa,x) = ||a||.$$

On normalise la mesure de Lebesgue sur A de telle sorte que la mesure de la boule unité fermée B_A de A soit 1. L'espace des isométries de (X,d_0) est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit Γ un groupe discret et fermé d'isométries de (X,d_0) agissant à gauche, tel que tout γ dans $\Gamma - \{Id_X\}$ n'ait aucun point fixe. On demande à ce que les actions de Γ et A commutent, c'est à dire à ce que pour tout x,a,γ dans X,A,Γ respectivements,

$$(\gamma x)a = \gamma(xa).$$

Supposons de plus l'existence d'une section continue $p : X/A \to X$, c'est-à-dire une fonction continue satisfaisant $\bar{x} = p(\bar{x})A$. On requiert l'existence d'un point (fixé) x_0 dans X tel que pour tout $\bar{x}$ dans X/A, tout γ dans Γ, on ait l'inégalité

$$d(\gamma p(\bar{x}),p(\gamma\bar{x})) \leq d(x_0,\gamma x_0).$$

Les espaces quotients X/A et $\Gamma\backslash X$ sont munis des topologies quotients, et sont naturellements pourvus d'une action, pour l'un l'action à gauche de Γ, et pour l'autre à droite de A.

2.2. Exemples. Dans cette partie, on détaille quelques exemples de la situation décrite plus haut.

Exemple 1 : Soit $X = T^1\mathbb{H}^n$ l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, muni d'une distance invariante par isométries d_0, et de la pseudo-distance d qui est la distance hyperbolique entre point-base des vecteurs. Soit $A = \mathbb{R}$, $k = 1$, agissant par le flot géodésique sur X, muni de la valeur absolue standard. Soit Γ un groupe discret d'isométries de $\mathbb{H}^n$, vérifiant que tout γ dans $\Gamma - \{Id_{\mathbb{H}^n}\}$ n'a aucun point fixe dans $T^1\mathbb{H}^2$ (c'est le cas si Γ est sans torsion, ou bien si $n = 2$ et les isométries sont directes). Soit x_0 un vecteur fixé de $\mathbb{H}^n$, et $p(\bar{x})$ le vecteur unitaire tangent à la géodésique orientée $\bar{x}$ basé en la projection orthogonale du point-base de x_0 sur $\bar{x}$. Comme $\gamma p(\bar{x})$ est le vecteur de $\gamma\bar{x}$ basé en la projection orthogonale du point-base de γx_0 et que la projection orthogonale sur une géodésique réduit les distances, nous avons bien l'inégalité

$$d(p(\gamma\bar{x}),\gamma p(\bar{x})) \leq d(x_0,\gamma x_0).$$

Exemple 2 : Soit $X = G = SL_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 2$, muni d'une distance d_0 riemannienne G-invariante à gauche, et de la pseudo-distance d relevée de la distance riemannienne G-invariante à gauche sur $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$ définie par : $d(xSO(n),ySO(n))$ est la racine carrée de la somme des carrés des logarithmes des valeurs propres de la matrice $(y^ty)^{-1}(x^tx)$. Soit A le sous-groupe de G des matrices diagonales, à coefficients positifs, de déterminant 1; on a alors $k = n - 1$. La pseudo-distance vérifie bien que $a \mapsto d(xa,x)$ est une norme (euclidienne) sur A (vue comme un espace vectoriel, via l'application logarithme matriciel), indépendante de x dans G. Soit Γ un sous-groupe discret de $SL_n(\mathbb{R})$; il agit sans point fixe par translation à gauche sur G. Soit x_0 un point fixé de $X = G$, et $p(gA)$ l'unique point ga de gA tel que gaK soit la projection orthogonale de x_0K sur le plat gAK de $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$, qui est bien défini car $A \cap K = \{I_n\}$. Comme l'espace riemannien $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$ est un espace $CAT(0)$ (voir [**Hel78**]), la projection orthogonale sur un plat géodésique réduit bien les distances.

2.3. Résultats. Remarquons le lemme et la proposition suivante.

LEMME 5.1. *Sous ces hypothèses, X/A et $\Gamma\backslash X$ sont séparés, localement compacts et σ-compacts. De plus, pour tout x_0 dans X, l'application*

$$X/A \times A \to X,$$

$$(xA,a) \mapsto p(xA)a,$$

est un homéomorpisme. Sur $X/A \times A$, nous obtenons ainsi une action de Γ, donnée par

$$\gamma(xA,a) = (\gamma xA,a + c(\gamma,xA)),$$

où $c : \Gamma \times X/A$ est un cocycle continu à valeur dans A, c'est à dire vérifiant

$$c(\gamma\gamma',xA) = c(\gamma,\gamma' xA) + c(\gamma',xA).$$

Enfin, Γ est dénombrable, et tout point de $\Gamma\backslash X$ possède un rayon d'injectivité strictement positif.

La preuve se trouvera en annexe C. Une mesure borélienne régulière, finie sur les compacts, sera appelée *mesure de Radon*.

PROPOSITION 5.2. *Il existe une bijection affine entre les mesure de Radon A-invariantes dur $\Gamma\backslash X$, et les mesures de Radon Γ-invariantes sur X/A. Cette bijection, qui sera notée par la suite $\mu \mapsto \bar{\mu}$, respecte la propriété d'ergodicité par rapport aux actions respectives de A et Γ.*

PREUVE. Soit μ une mesure sur $\Gamma\backslash X$, borélienne régulière, finie sur les compacts et A-invariante. Soit f continue de X dans $\mathbb{R}$ à support compact, alors la fonction

$$\bar{f}(\Gamma x) = \sum_{y \in \Gamma x} f(y),$$

est une fonction continue à support compact de $\Gamma\backslash X$ dans $\mathbb{R}$. En effet, le support est compact puisque $\bar{f}$ est nulle en dehors de la projection du support de f. Vérifions la continuité. Soit Γx dans $\Gamma\backslash X$, l'orbite Γx vue comme sous-ensemble de X est discrète, et il existe une boule $B = B(x,\epsilon)$ telle que $\gamma B \cap B \neq \emptyset$ implique que $\gamma = e$. Quitte à restreindre B de façon à ce que ce soit encore vrai pour $\overline{B}$, qui soit compact, alors la projection sur $\Gamma\backslash X$ restreinte à $\overline{B}$ est un homéomorphisme sur son image (application continue bijective d'un compact dans un espace séparé), et il existe un relevé continu de ΓB dans B. Le lemme C.1 nous permet ainsi de voir $\bar{f}$ restreint à ΓB comme une somme finie de compositions du relèvement, d'un nombre fini de γ et de f, ce qui implique la continuité en x.

L'application

$$\begin{aligned} \Lambda : C_c^0(X) &\to \mathbb{R}, \\ f &\mapsto \int_{\Gamma\backslash X} \bar{f} d\mu, \end{aligned}$$

est une forme linéaire positive, et donc par le théorème de représentation de Riesz (cf th. 2.14 [**Rud80**], et aussi th. 2.17), applicable car X est bien séparé, σ-compact et localement compact, il existe une mesure régulière $\tilde{\mu}$ telle que

$$\Lambda(f) = \int_X f d\tilde{\mu}.$$

Cette mesure est finie sur les compacts car μ est finie sur les compacts. Comme μ est A-invariante et que $\bar{f} \circ a = \overline{f \circ a}$ pour tout a dans A, Λ est également A-invariante et donc $\tilde{\mu}$. Soit maintenant g une fonction continue à support compact de X/A dans $\mathbb{R}$, et h une fonction positive continue à support compact sur A, d'intégrale 1 pour la mesure de Lebesgue. En utilisant sur X les coordonnées $X/A \times A$, ce qui est légitime, on définit une fonction $\tilde{g}$ sur X par la formule

$$\tilde{g}(xA,a) = g(xA)h(a).$$

Cette fonction est alors continue et à support compact,de par l'homéomorphisme $X \sim X/A \times A$.

L'application

$$\Lambda' : C_c^0(X/A) \to \mathbb{R},$$
$$g \mapsto \int_X \tilde{g} d\tilde{\mu},$$

est une forme linéaire positive, et donc par le théorème de représentation de Riesz, applicable car X/A est bien séparé, σ-compact et localement compact, il existe une mesure régulière $\tilde{\mu}$ telle que

$$\Lambda'(g) = \int_{X/A} g d\bar{\mu}.$$

Cette mesure est finie sur les compacts car $\tilde{\mu}$ l'est. Reste à vérifier la Γ-invariance. On a, pour tout γ dans Γ,

$$\widetilde{g \circ \gamma}(xA,a) = g \circ \gamma(xA)h(a),$$

et donc

$$\Lambda'(g \circ \gamma) = \int_{X/A \times A} g(\gamma xA)h(a)d\tilde{\mu}(xA,a).$$

Comme le cocycle c est continu, et la mesure $\tilde{\mu}$ est A-invariante et régulière, on a

$$\Lambda'(g \circ \gamma) = \int_{X/A \times A} g(\gamma xA)h(a + c(\gamma,xA))d\tilde{\mu}(xA,a),$$

ou encore, comme $\tilde{\mu}$ est Γ-invariante,

$$\Lambda'(g \circ \gamma) = \Lambda'(g).$$

Réciproquement, à une mesure $\bar{\mu}$ borélienne régulière de X/A, finie sur les compacts, qui est Γ-invariante, on associe la mesure sur $X/A \times A$ produit de $\bar{\mu}$ et de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}$ sur A, ce qui nous donne une mesure $\tilde{\mu}$ sur X, régulière, A-invariante et finie sur les compacts. Par le même argument de continuité du cocycle c, elle est de plus Γ-invariante. Enfin, on peut revenir à une mesure sur $\Gamma\backslash X$, de la façon suivante : soit f une fonction continue à support compact de $\Gamma\backslash X$, on peut, à l'aide de partitions de l'unité subordonnées à un recouvrement par de petites boules de diamètre inférieur au rayon d'injectivité en un point de ces boules, trouver une fonction g de X dans $\mathbb{R}$, satisfaisant $\bar{g} = f$. Le reste des vérifications est mécanique. □

LEMME 5.3. *Soit f mesurable (pour la tribu des boréliens), à support compact de X dans $\mathbb{R}$, alors la formule*

$$\bar{f}(\Gamma x) = \sum_{y \in \Gamma x} f(y),$$

définit une fonction mesurable, et à support compact de $\Gamma\backslash X$ dans $\mathbb{R}$, bornée si f est bornée.

La preuve se trouve en annexe C.

Soit l'ensemble fini

$$B_\Gamma(x_0,T) = \{\gamma \in \Gamma : d(x_0,\gamma x_0) \leq T\}.$$

THÉORÈME 5.4. *Soit μ une mesure de Radon de probabilité sur $\Gamma\backslash X$, invariante par l'action de A et ergodique. Elle définit une mesure $\tilde{\mu}$ sur X et une mesure $\bar{\mu}$ sur X/A, décrites dans la proposition 5.2 et sa preuve. Si f est une fonction dans $L^1(\bar{\mu})$ sur X/A, alors pour tout $x_0 \in X$, pour $\bar{\mu}$-presque tout $\bar{x} \in X/A$, on a*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T^k} \sum_{\gamma \in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma \bar{x}) = \int_{X/A} f d\bar{\mu}.$$

PREUVE. Fixons une fois pour toute $x_0 \in X$. On commence par définir pour $\gamma \in \Gamma$ et $\bar{x} \in X/A$:

$$h(\gamma,\bar{x}) = d(\gamma p(\bar{x}),p(\gamma \bar{x})).$$

Par hypothèse, on a

$$h(\gamma,\bar{x}) \leq d(x_0,\gamma x_0).$$

De plus, pour tout $\bar{x}$ fixé et pour tout compact $K \subset X/A$, il existe b tel que si $\gamma \in \Gamma$ est tel que $\gamma \bar{x} \in K$, alors

$$h(\gamma,\bar{x}) \geq d(x_0,\gamma x_0) - b.$$

En effet, le "quadrilatère" $x_0,\gamma x_0,\gamma p(\bar{x}),p(\gamma\bar{x})$ a ses cotés $[x_0,p(\gamma\bar{x})]$ et $\gamma[x_0,p(\bar{x})]$ de taille bornée, car $\gamma\bar{x} \in K$.

On peut supposer que $f : X/A \to \mathbb{R}$ est positive, et écrivons

$$f = f_1 + f_\epsilon,$$

où f_1 est à support K compact et f_ϵ de norme L^1 petite, toutes deux positives; c'est possible car X/A est σ-compact et μ finie sur les compacts. On définit une fonction $\tilde{f}$ sur X de la façon suivante :

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(yA) & \text{si} \quad d(p(yA),y) \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons pour $\Gamma y \in \Gamma\backslash X$,

$$\bar{f}(\Gamma y) = \sum_{z\in\Gamma y} \tilde{f}(z).$$

Cette fonction $\bar{f}$ est dans $L^1(\mu)$ et vérifie

$$\int_{\Gamma\backslash X} \bar{f} d\mu = \int_{X/A} f d\bar{\mu},$$

En effet, par décomposition de la mesure μ relevée à X, le choix de $\tilde{f}$ et le théorème de Fubini, on a

$$\int_X \tilde{f} d\mu = \int_{X/A} f d\bar{\mu},$$

et ce premier terme est bien l'intégrale de $\bar{f}$. On a de même deux fonctions $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_\epsilon$, obtenues de la même façon.

Soient $\bar{x} \in X/A$, $y = p(\bar{x})$ et b la constante définie par K et $\bar{x}$. Prouvons que pour $T > b+1$,

$$\int_{(T-b-1)B_A} \bar{f}_1(\Gamma ya)da \leq \sum_{\gamma\in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma\bar{x}) \leq \int_{(T+1)B_A} \bar{f}(\Gamma ya)da. \tag{15}$$

En effet, pour tout $t > 0$, on peut écrire :

$$\int_{tB_A} \bar{f}_1(\Gamma ya)da = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{tB_A} \tilde{f}_1(\gamma ya)da.$$

On veut majorer cette somme; pour cela, on se restreint aux termes non nuls. Supposons donc que γ soit tel que $\int_{tB_A} \tilde{f}_1(\gamma ya)da \neq 0$. Alors $d(\gamma y,p(\gamma yA)) \leq t+1$, car $\tilde{f}_1(\gamma ya)$ est nulle si $d(p(\gamma yA),\gamma ya) > 1$. Mais $d(\gamma y,p(\gamma yA)) = h(\gamma,yA)$ car $y = p(yA)$. De plus $\gamma yA \in K$ car sinon $\tilde{f}_1(\gamma ya)$ serait également nul pour tout a. On a donc, comme $h(\gamma,yA) \leq t+1$,

$$d(x_0,\gamma x_0) \leq t+b+1.$$

Comme on a dans tous les cas

$$\int_{tB_A} \tilde{f}_1(\gamma ya)da \leq \int_A \tilde{f}_1(\gamma ya)da = f_1(\gamma\bar{x}) \leq f(\gamma\bar{x}),$$

nous avons prouvé l'inégalité de gauche de (15) en prenant $t = T-b-1$.

De même, si γ est tel que $d(x_0,\gamma x_0) \leq t-1$, alors $d(\gamma y,p(\gamma yA)) = h(\gamma,\bar{x}) \leq t-1$ ce qui implique que l'ensemble des a tels que $d(\gamma ya,p(\gamma yA)) \leq 1$ est inclut dans tB_A, et donc

$$\int_{tB_A} \tilde{f}(\gamma ya)da = f(\gamma\bar{x}),$$

et ainsi, en prenant $t = T+1$, on démontre l'inégalité de droite de (15)

$$\sum_{\gamma\in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma\bar{x}) \leq \int_{(T+1)B_A} \bar{f}(\Gamma ya)da.$$

Divisons l'encadrement (15) par T^k et faisons tendre T vers l'infini, en appliquant le théorème ergodique presque sûr (voir plus loin le th. 5.7 de [**Cha70**], par exemple, pour les actions de $\mathbb{R}^k$), nous obtenons pour presque tout $\bar{x} \in X/A$:

$$\int_{\Gamma\backslash X} \bar{f}_1 d\mu \leq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T^k} \sum_{\gamma\in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma\bar{x}) \leq \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^k} \sum_{\gamma\in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma\bar{x}) \leq \int_{\Gamma\backslash X} \bar{f} d\mu,$$

et comme nous pouvons prendre f_1 aussi proche que l'on veut de f en norme L^1, ceci termine la démonstration. □

Notons également le corollaire suivant de la preuve, qui ne nécessite pas l'existence d'une mesure de probabilité A-invariante et ergodique.

COROLLAIRE 5.5. *Si $f : X/A \to \mathbb{R}$ est bornée et à support compact, il existe $C > 0$ tel que pour tout $T \geq 1$, tout $\bar{x} \in X/A$, on a la majoration uniforme*

$$\frac{1}{T^k} \sum_{\gamma\in B_\Gamma(x_0,T)} f(\gamma\bar{x}) \leq C.$$

PREUVE. Sous ces hypothèses, en reprenant la preuve précédente, de par le lemme 5.3, $\bar{f}$ est en fait bornée et mesurable, et l'inégalité (15) divisée par T^k nous permet de conclure. (L'existence d'une mesure ergodique de probabilité finie sur les compacts n'était pas utilisée pour démontrer (15)). □

3. Preuve du théorème 5.2

3.1. Description des espaces. Soit M_0 une matrice 3×3, à valeur propres réelles, dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal, et qui n'a pas de valeurs propres de multiplicité 2 exactement. Comme la dimension est 3,qui est impair, deux matrices sont conjuguées si et seulement si elles le sont modulo $SL_3(\mathbb{R})$. Nous avons alors 2 possibilités pour M_0, 2 cas que nous traiterons en parallèle. Le premier cas est lorsque M_0 n'a qu'une valeur propre réelle λ_1, M_0 est alors (à conjugaison près)

$$M_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

et le deuxième cas est celui où M_0 possède trois valeurs propres réelles $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, deux-à-deux distinctes, M_0 est alors (à conjugaison près)

$$M_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Dans le premier cas, le stabilisateur (par l'action par conjugaison) de M_0 dans $G = SL_3(\mathbb{R})$ est exactement égal à

$$H = \left\{ h(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 + y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

et dans le second cas le stabilisateur de M_0 possède un sous-groupe distingué H d'indice fini, qui est

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} e^x & & 0 \\ 0 & e^y & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x-y} \end{bmatrix} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Le stabilisateur est dans les deux cas un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{R}^2$ via les coordonnées (x,y) fournies ici. Nous utiliserons la notation multiplicative pour la loi de groupe lorsque H sera vu comme un sous-groupe de G, et notation additive lorsque

nous travaillerons dans H lui-même. La variété X des matrices conjuguées à M_0 est alors, dans le premier cas, difféomorphe par un difféomorphisme G-équivariant, à l'espace homogène G/H, et dans le deuxième cas c'est un quotient fini de G/H. Insistons sur le fait que l'action par conjugaison de G sur X se transforme en une action à gauche de G sur G/H. En particulier, les valeurs des λ_i n'ont pas d'importance puisque les variétés obtenues pour des λ_i disctincts sont difféomorphes par un difféomorphisme G-équivariant. C'est en pratique sur ces espaces homogènes que nous travaillerons, et que nous montrerons les résultats.
Dans les deux cas, G/H porte une mesure μ, qui est G-invariante, dans la classe des mesures de Lebesgue, et unique à homothétie près. En effet, G est unimodulaire, et H abélien ([**Bou63**], VII.2 théorème 3)).

3.2. Section et homéomorphisme. Il sera par la suite essentiel de disposer d'une section continue de G/H dans G.[1] On va vérifier que la définition suivante est correcte : on définit $p : G/H \to G$ par $p(gH) = gh$, où h est l'unique point critique de l'application de H dans $\mathbb{R}$

$$h \mapsto tr({}^t h {}^t ggh).$$

Dans le premier cas, soit $g \in G$, et soit N la matrice ${}^t gg$. Elle est symétrique, notons ses coefficients de la manière suivante

$$N = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix}.$$

Remarquons qu'alors, $B^2 < AD$, de par l'inégailté de Schwarz appliquée aux vecteurs-colonnes de g, inégalité stricte car g est inversible. On prend sur H les coordonnées x,z, avec $z = y + x^2/2$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial x} tr(h\, {}^t h\, {}^t gg) = tr((\frac{\partial h}{\partial x}\, {}^t h + h\frac{\partial^t h}{\partial x})N),$$

et par multiplication matricielle explicite, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} tr(h\, {}^t h\, {}^t gg) = 2Ax + 2Bz + 2(E + B).$$

De même,

$$\frac{\partial}{\partial z} tr(h\, {}^t h\, {}^t gg) = 2Bx + 2Az + 2C.$$

1. Je ne connais pas d'interprétation géométrique de ces sections, autre que "la minimisation de la norme 2 matricielle sur gH"). Le choix de ces sections particulières n'a d'influence que sur la simplicité de certains calculs.

L' équation
$$\frac{\partial}{\partial x} tr(h\,{}^t h\,{}^t gg) = \frac{\partial}{\partial z} tr(h\,{}^t h\,{}^t gg) = 0$$
a bien une unique solution (x,z) puisque le déterminant du système est $4A^2 + 4(AD - B^2) > 0$. De plus, p est même différentiable en fonction de g. Lorsque $x = 0$, $z = 0$, on trouve alors que la projection $p(gH)$ satisfait
$${}^t p(gH)p(gH) = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & -B \\ 0 & -B & F \end{bmatrix},$$
pour certains A,B,D,F réels. De par la forme de ces matrices, on a nécessairment $A > 0$, $B > 0$, $B^2 < AD$, $B^2 < DF$, $B^2 < AF$ et comme le déterminant est 1, on a de plus
$$ADF - B^2(A + F) = 1.$$

De même dans le deuxième cas, on peut vérifier que le point critique est unique et que si $g \in G$, alors ${}^t p(gH)p(gH)$ est de la forme
$${}^t p(gH)p(gH) = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & E \\ C & E & A \end{bmatrix}.$$
Il y a également le même type de restrictions sur la forme de ce matrices que dans le premier cas. Elles ont par exemple nécessairement un déterminant égal à 1, et $A > 0$, $B^2 < A^2$, etc.

On a bien sûr $p(gH)H = gH$ pour tout g dans G. Définissons maintenant l'application D de G dans H
$$D(g) = g^{-1}p(gH).$$
Nous avons maintenant un difféomorphisme
$$G/H \times H \to G,$$
$$(gH,h) \mapsto p(gH)h,$$
de réciproque
$$G \to G/H \times H,$$
$$g \mapsto (gH,D(g)^{-1}).$$

La mesure de Haar μ_G de G, vue sur $G/H \times H$, se décompose comme le produit de μ et de la mesure de Lebesgue de H, identifié à $\mathbb{R}^2$. En effet,la mesure produit sur $G/H \times H$ est G-invariante de par sa régularité et la continuité du cocycle associé à la section p, de même que dans le cas du paragraphe 2.

3.3. Etude de certaines fonctions sur H. Pour deux éléments p_0,p_1 dans l'image de la section p, et h dans H, on pose

$$G_{(p_0,p_1)}(h) = tr(({}^t p_0 p_0)^{-1}\, {}^t h ({}^t p_1 p_1) h).$$

Cette fonction est continue et propre de H dans $\mathbb{R}_+^*$. En effet, on peut l'écrire

$$G_{(p_0,p_1)}(h) = tr({}^t(p_1 h p_0^{-1})(p_1 h p_0^{-1})),$$

et sous cette forme c'est la restriction à l'ensemble $p_1 H p_0^{-1}$ du carré de la norme 2 matricielle. Comme H est paramétré par les coordoonnées (x,y), nous écrirons parfois $G_{(p_0,p_1)}(x,y)$.

On étudiera les famille d'ensembles indexées par T, lorsque U est un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{U}$ un ouvert relativement compact de G/H :

$$E_{(p_0,p_1)}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G_{(p_0,p_1)}(x,y) \leq T^2\right\},$$

$$K_1(T,U,\mathcal{U}) = U + \bigcup_{gH \in \mathcal{U}} E_{(p_0,p(gH))}(T),$$

$$K_2(T,U,\mathcal{U}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) + U \subset \bigcap_{gH \in \mathcal{U}} E_{(p_0,p(gH))}(T)\right\}.$$

Ces ensembles ont les propriétés suivantes. Rappelons que

$$B(T) = \{\gamma \in \Gamma : tr({}^t\gamma\gamma) \leq T^2\},$$

et que $D(g) = g^{-1}p(gH)$.

LEMME 5.4. *Soit p_0H,p_1H deux éléments de G/H, tels que $p_0 = p(p_0H)$ et $p_1 = p(p_1H)$. Soient U et $\mathcal{U}$ deux voisinages relativements compacts de 0 dans H et de p_1H dans G/H. Les ensembles $K_i(T,U,\mathcal{U})$, $i = 1,2$, vérifient les propriétés suivantes :*
(H1) Si γ est dans $B(T)$ et $\gamma p_0 H$ est dans $\mathcal{U}$ alors $-D(\gamma p_0) + U$ est inclus dans $K_1(T,U,\mathcal{U})$,
(H2) Si $(-D(\gamma p_0) + U) \cap K_2(T,U,\mathcal{U}) \neq \emptyset$ et $\gamma p_0 H$ est dans $\mathcal{U}$ alors γ est dans $B(T)$.

PREUVE. On a toujours

$$\gamma p_0 = p(\gamma p_0 H) D(\gamma p_0)^{-1},$$

et donc $\gamma = p(\gamma p_0 H) D(\gamma p_0)^{-1} p_0^{-1}$. Ainsi, par définition de $G_{(.,.)}(.)$, on a

$$tr({}^t\gamma\gamma) = G_{(p_0, p(\gamma p_0 H))}(-D(\gamma p_0)). \tag{16}$$

Donc $\gamma \in B(T)$ est équivalent à $-D(\gamma p_0) \in E_{(p_0, p(\gamma p_0 H))}(T)$. Les deux propriétés recherchées découlent directement de la définition des ensembles $K_i(T, U, \mathcal{U})$. $\square$

Remarques : Si l'on voulait travailler avec une autre famille de boule sur Γ, en prenant par exemple $B_1(T)$ la boule de Γ pour une norme $||.||$ quelconque sur $M_3(\mathbb{R})$, il nous suffirait de redéfinir $G_{(p_0,p_1)}(h)$ de manière analogue à la formule 16. Plus précisemment, on définirait

$$H_{(p_0,p_1)}(h) = ||p_1 h p_0^{-1}||,$$

et on étudierait les ensembles

$$J_{(p_0,p_1)}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H_{(p_0,p_1)}(x,y) \leq T\right\},$$

de manière analogue à ceux $E_{(p_0,p_1)}(T)$ de $G_{(p_0,p_1)}$ (le lecteur fera bien attention qu'ici, j'ai choisit de travailler avec $G = H^2$). Heuristiquement, si l'aire de $J_{(p_0,p_1)}(T)$ est asymptotique (lorque T tend vers l'infini) à $\delta_1(p_0H, p_1H)F_1(T)$, alors le résultat auquel on peut s'attendre est de la forme : pour tout f continue à support compact, pour μ-presque tout x dans G/H

$$\frac{1}{F_1(T)} \sum_{\gamma \in B_1(T)} f(\gamma x) \to \int_{G/H} f(y)\delta_1(x,y)d\mu(y).$$

Remarquons que par l'équivalence des normes, la taille F_1 ne dépend pas de la norme choisie initialement. De plus, remarquons que la détermination de δ_1 e F_1 ne dépend que de la mesure de Haar de H, et non celle de G, et que l'on peut espérer que le résultat ci-dessus soit encore vraie pour toute mesure μ Γ-invariante, ergodique, finie sur les compacts, pour les mêmes fonctions δ_1 et F_1.

Revenons aux deux cas qui nous intéressent. La suite de cette section est dévolue aux preuves des deux propositions suivantes. L'idée majeure est de se ramener à l'étude de $E_{(p_0,p_1)}(T)$ au lieu des ensembles $K_i(T, U, \mathcal{U})$ en montrant qu'ils diffèrent peu. Dans le deuxième cas, c'est encore plus simple puisqu'on perd toute dépendance en p_0, p_1. Dans chaque cas, on obtient une asymptotique de l'aire de $E_{(p_0,p_1)}(T)$ (qui nous donnera effectivement le facteur de récurrence $F(T)$, et la dérivée de de Radon-Nikodyn de répartition δ). On désigne par Δ la différence symétrique d'ensembles, et par $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue sur H identifié à $\mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 5.5. *Dans le premier cas, pour tout p_0H,p_1H dans G/H, avec $p_0 = p(p_0H), p_1 = p(p_1H)$, pour U ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^2$, $T > 0$, et η dans $]0,1/2[$, on définit les ensembles suivants :*

$$K'_1(T,U,\eta) = E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{T}{1-\eta}\right) + U,$$

$$K'_2(T,U,\eta) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) + U \subset E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{T}{1+\eta}\right)\right\}.$$

Alors,

1. *Il existe $\delta : G/H \to \mathbb{R}_+^*$ continue, telle que lorsque $T \to \infty$,*
$$\mathcal{L}(E_{(p_0,p_1)}(T)) \sim \delta(p_0H,p_1H)T^2.$$
2. *Pour tout $\tau > 0$, il existe U voisinage ouvert borné de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $U' \subset U$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^2$, tout $\eta > 0$, et pour $i = 1,2$, on ait pour tout T suffisamment grand :*
$$E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{Te^{-\tau}}{1+\eta}\right) \subset K'_i(T,U,\eta) \subset E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{Te^{\tau}}{1-\eta}\right).$$
3. *Pour tout p_0H,p_1H dans G/H, avec $p_0 = p(p_0H), p_1 = p(p_1H)$, tout η dans l'intervalle $]0,1/2[$, il existe $\mathcal{U}$ voisinage de p_1H dans G/H, tel que pour tout U un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et tout T suffisamment grand, on ait les inclusions*
$$E_{(p_0,p_1)}(T) \subset K_1(T,U,\mathcal{U}) \subset K'_1(T,U,\eta),$$
et
$$K'_2(T,U,\eta) \subset K_2(T,U,\mathcal{U}) \subset E_{(p_0,p_1)}(T).$$

PROPOSITION 5.6. *Dans le deuxième cas, il existe une famille $E'(T)$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ telle que, pour tout p_0H,p_1H dans G/H, avec $p_0 = p(p_0H), p_1 = p(p_1H)$, tout U ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, tout $\mathcal{U}$ voisinage relativement compact de p_1H dans G/H, les ensembles $K_i(T,U,\mathcal{U})$ vérifient*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\mathcal{L}(K_i(T,U,\mathcal{U})\Delta E'(T))}{\mathcal{L}(E'(T))} = 0.$$

De plus, lorsque $T \to \infty$,

$$\mathcal{L}(E'(T)) \sim \frac{9}{2}(\ln(T))^2.$$

3.3.1. *Etude du premier cas - Preuve de la proposition 5.5.* Si l'on détaille un peu plus cette application $G_{(p_0,p_1)}$, dans le premier cas on peut écrire qu'il existe $A_i,B_i,D_i,F_i,i=1,2$ telles que

$$ {}^t p_i p_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 \\ B_i & D_i & -B_i \\ 0 & -B_i & F_i \end{bmatrix}.$$

Posons

$$\alpha_1 = (A_0D_0 - B_0^2)A_1,\ \alpha_2 = 2(A_0D_0 - B_0^2)B_1 + 2A_1A_0B_0,$$
$$\alpha_3 = \left(A_0F_0A_1 + D_1(A_0D_0 - B_0^2) + 2A_0B_0B_1\right).$$

En utilisant les restrictions sur les coefficients A_i,B_i,D_i,F_i, on voit que $\alpha_1 > 0$. Remarquons que ces coefficients ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs. En effet, par exemple $\alpha_1 > 0$, et en dévellopant l'expression

$$\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2/4 = (A_0D_0 - B_0^2)^2(A_1D_1 - B_1^2) + A_1^2A_0(A_0D_0F_0 - B_0^2(A_0 + F_0)),$$

on voit, en utilisant que $A_0D_0F_0 - B_0^2(A_0 + F_0) = 1$, $A_i > 0$ et $A_iD_i > B_i^2$, qu'on a nécessairement

$$4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2 > 0.$$

Nécessairement, on a aussi $\alpha_3 > 0$.
On obtient par calcul matriciel en partant de la définition de $G_{(p_0,p_1)}$, en utilisant le fait que toutes les matrices apparaissant ont 1 pour déterminant, que

$$G_{(p_0,p_1)}(x,y) = \alpha_1\left(\frac{x^2}{2}+y\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{x^2}{2}+y\right)x + \alpha_3x^2 + \alpha_4\left(\frac{x^2}{2}+y\right) + \alpha_5x + \alpha_6,$$

où $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ dépendent polynômialement des A_i,B_i,D_i,F_i (et peuvent être explicités, mais n'ont aucune importance dans la suite). En particulier, les coefficients α_i sont des fonctions continues de p_0,p_1. Nous admettrons pour l'instant l'asymptotique quand à l'aire de $E_{(p_0,p_1)}(T)$, et que la fonction intervenant ici est

$$\delta(p_0H,p_1H) = \frac{2\pi}{\sqrt{4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2}}.$$

On pourrait calculer cette asymptotique directement, mais ce sera conséquence de la preuve de la proposition 5.9 . Nous admettons ainsi pour l'instant le premier point de la proposition 5.5. Le troisième point est conséquence des définitions des ensembles K_i,K'_i, $E_{(p_0,p_1)}$ et du lemme suivant.

LEMME 5.7. *Soit* p_0,p_1 *fixés. Pour tout* η *dans l'intervalle* $]0,1[$, *il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* p_1H *tel que l'on ait*

$$1-\eta/2 < \liminf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \inf_{gH\in\mathcal{U}} \frac{G_{(p_0,p(gH))}(x,y)}{G_{(p_0,p_1)}(x,y)} \le \limsup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sup_{gH\in\mathcal{U}} \frac{G_{(p_0,p(gH))}(x,y)}{G_{(p_0,p_1))}(x,y)} < 1+\eta/2.$$

PREUVE. Posons la fonction de x,y et des paramètres α

$$Q_\alpha(x,y) = \alpha_1\left(\frac{x^2}{2}+y\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{x^2}{2}+y\right)x + \alpha_3 x^2.$$

On peut changer les variables (x,y) en les variables (x,z) avec $z = x^2/2 + y$, car ce changement de variable est une application continue et propre, et les limites inférieures et supérieures resteront inchangées. La fonction $G_{(p_0,p(gH))}(x,z)$ est alors la somme de la forme quadratique Q_α définie positive, d'une forme linéaire et d'une constante. Seule la forme quadratique Q_α intervient dans l'expression voulue, et ses coefficients α_i dépendent continûement de gH. Il est donc possible de trouver un voisinage $\mathcal{U}$ de p_1H vérifiant la propriété requise. □

Il nous reste à montrer le deuxième point de la proposition 5.5. Tout d'abord, le résultat ne dépend pas de η, de par la définition de K'_i, et on peut se ramener au cas où $\eta = 0$. On peut calculer en utilisant que Q_α est une forme quadratique définie positive, qu'en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^2$ nous avons les majorations (où $M > 0$ est une constante fixée dépendant seulement de p_0,p_1)

$$\left|\frac{\partial G_{(p_0,p_1)}}{\partial x}(x,y)\right| \le MG_{(p_0,p_1)}(x,y),$$

$$\left|\frac{\partial G_{(p_0,p_1)}}{\partial y}(x,y)\right| \le MG_{(p_0,p_1)}(x,y).$$

De part les majorations différentielles classiques (le lemme de Gronwall, me semble-t-il?), on a

$$G_{(p_0,p_1)}(x+x',y+y') \le G_{(p_0,p_1)}(x,y)exp(M|x'|+M|y'|).$$

Ainsi, si l'on note $diam(U)$ le diamètre de U qui contient 0,

$$K'_1(T,U,\eta) \subset E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{exp(2M\,diam(U))T}{1-\eta}\right),$$

et on en déduit de même que

$$K_2'(T,U,\eta) \supset E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{exp(-2M\,diam(U))T}{1+\eta}\right).$$

C'est ce que l'on voulait.

3.3.2. *Etude du deuxième cas - Preuve de la proposition 5.6.* Dans le deuxième cas, en écrivant que h est décrit par les deux variables x,y introduites dans la représentation matricielle de H, et qu'il existe $A_i,B_i,C_i,E_i,i=1,2$ tels que

$$^t p_i p_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & C_i \\ B_i & A_i & E_i \\ C_i & E_i & A_i \end{bmatrix},$$

on obtient par calcul matriciel, en utilisant que ces matrices ont 1 pour déterminant, que

$$G_{(p_0,p_1)}(x,y) = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{2y} + \alpha_3 e^{-2x-2y} + \alpha_4 e^{x+y} + \alpha_5 e^{-x} + \alpha_6 e^{-y},$$

avec

$$\alpha_1 = A_1(A_0^2 - E_0^2) > 0, \alpha_2 = A_1(A_0^2 - C_0^2) > 0, \alpha_3 = A_1(A_0^2 - B_0^2) > 0,$$
$$\alpha_4 = 2B_1(E_0C_0 - A_0B_0), \alpha_5 = 2E_1(B_0C_0 - A_0E_0),$$
$$\alpha_6 = 2C_1(B_0E_0 - A_0C_0).$$

On peut vérifier, par des calculs semblables au premier cas, longs mais sans difficulté majeure, que l'on a

$$4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 > 0, 4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2 > 0,$$
$$4\alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2 > 0.$$

Posons pour $T > 1$ et a réel positif, $E'(T,a)$ comme l'intérieur du triangle $\mathcal{T}(T,a)$ de sommets (en coordonnées (x,y)) $(-2\ln(T) - 2a, \ln(T) + a)$, $(\ln(T) + a, \ln(T) + a)$ et $(\ln(T) + a, -2\ln(T) - 2a)$. On pose de plus $E'(T) = E'(T,0)$.

LEMME 5.8. *Pour tout U ouvert borné, tout $\mathcal{U}$ ouvert relativement compact de G/H, il existe a_1,a_2 deux nombres réels tels que pour tout $T > e^{-a_1}$, pour tout $g_1H \in \mathcal{U}$,*

$$E'(T,a_1) \subset K_1(T,U,\mathcal{U}) \subset E'(T,a_2),$$

et

$$E'(T,a_1) \subset K_2(T,U,\mathcal{U}) \subset E'(T,a_2).$$

ESQUISSE DE PREUVE. Il sera commode de définir les formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)}(u,v) &= \alpha_1 u^2 + \alpha_2 v^2 + \alpha_4 uv, \\ Q_\alpha^{(2)}(u,v) &= \alpha_1 u^2 + \alpha_3 v^2 + \alpha_6 uv, \\ Q_\alpha^{(3)}(u,v) &= \alpha_2 u^2 + \alpha_3 v^2 + \alpha_5 uv. \end{aligned}$$

Les discriminants de ces formes quadratiques sont, on l'a déjà noté automatiquement négatifs. On peut vérifier que

– Lorsque (x,y) tend vers l'infini dans le domaine $x + y \geq 0$, alors
$$G_\alpha(x,y) \sim Q_\alpha^{(1)}(e^x,e^y).$$
– Lorsque (x,y) tend vers l'infini dans le domaine $y \leq 0$, alors
$$G_\alpha(x,y) \sim Q_\alpha^{(2)}(e^x,e^{-x-y}).$$
– Lorsque (x,y) tend vers l'infini dans le domaine $x \leq 0$, alors
$$G_\alpha(x,y) \sim Q_\alpha^{(3)}(e^y,e^{-x-y}).$$

En utilisant ces équivalents sur chacun des trois domaines et en estimant la taille de $G_{(p_0,p_1)}(x,y)$ sur les côtés du triangle $\mathcal{T}(T,a)$, on calcule qu'il existe des constantes b_1,b_2 telles que

$$E_{(p_0,p_1)}(e^a b_1 T) \subset E'(T,a) \subset E_{(p_0,p_1)}(e^a b_2 T).$$

Cette estimation peut être rende uniforme en p_1 dans $\mathcal{U}$, car les coefficients des formes quadratiques $Q_\alpha^{(i)}$ dépendent continûement de p_1. Quitte à rajouter une constante dépendant du diamètre de U, on obtient le résultat désiré. □

3.4. Ensembles de validité du théorème ergodique ponctuel. Soit Γ un réseau de G. Nous utiliserons le résultat suivant, dû à N. Shah, dont nous rappelons une version légèrement simplifiée.

THÉORÈME 5.6 (Shah,[**Sha94**], corollaire 1.2). *Soit G un groupe algébrique réel, Γ un réseau de G. Soit $\Theta : \mathbb{R}^k \to G$ une application algébrique régulière (au sens qu'elle se prolonge en une application algébrique de $\mathbb{C}^k$ dans $G(\mathbb{C})$), telle que $\Theta(0) = e$. Alors il existe un sous-groupe fermé F de G contenant $\Theta(\mathbb{R}^k)$ tel que $F\Gamma$ est fermé et admet une unique mesure μ_F de probabilité F-invariante, et pour tout f dans $C_c^0(G/\Gamma)$, on a*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\mathcal{L}(B_R)} \int_{t\in B_R} f(\Theta(t)\Gamma)d\mathcal{L}(t) = \int_{F\Gamma} f d\mu_F,$$

où B_R désigne la boule de rayon R de $\mathbb{R}^k$ centrée en 0.

3.4.1. *Premier cas.*

PROPOSITION 5.9. *Supposons que $\Gamma p_0 H$ est dense dans G (c'est à dire que l'orbite sous l'action de Γ de $p_0 H$ est dense dans G/H). Alors pour tout $g \in p_0 H$, et pour toute fonction $f : \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}$ continue à support compact, on a*

$$\frac{\sqrt{4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2}}{2\pi T^2} \int_{E_{(p_0,p_1)}(T)} f(\Gamma g h) dh \to \int_{\Gamma\backslash G} f d\mu_G.$$

PREUVE. Posons $\beta = \sqrt{4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2}/2\alpha_1$, et notons

$$\Theta(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & \beta^{-1}u & v - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1\beta}u \\ 0 & 1 & \beta^{-1}u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = h(\beta^{-1}u, v - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1\beta}u - \frac{u^2}{2\beta^2}).$$

Cette application est polynomiale et régulière au sens de [**Sha94**]. Appliquons le théorème précédent au réseau $\Gamma' = p_0^{-1}\Gamma p_0$. J'affirme que $F = G$ nécessairement. En effet,

$$p_0^{-1}(\Gamma p_0 H) = \Gamma'\Theta(\mathbb{R}^2),$$

est dense dans G par hypothèse, et est contenu dans $\Gamma' F$ qui est fermé. Donc $\Gamma' F = G$, et comme F est fermé, Γ dénombrable, le théorème de Baire nous dit que F est d'intérieur non vide, et par suite $F = G$ car G est connexe. Ainsi, μ_F est la mesure G-invariante de probabilité sur $\Gamma\backslash G$, et pour toute fonction f de $C_c^0(\Gamma\backslash G$, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\alpha_1}{\pi T^2} \int_{u^2+v^2 \le T^2/\alpha_1} f(g\Theta(u,v)) du dv = \int_{\Gamma\backslash G} f d\mu_G.$$

Or

$$Q_\alpha(\beta^{-1}u, v - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1\beta}u - \beta^{-2}u^2) = \alpha_1(u^2+v^2).$$

Soit $E'_\alpha = \{(x,y) : Q_\alpha(x,y) \le T^2\}$. Comme

$$G_{(p_0,p_1)}(x,y) = Q_\alpha(x,y) + o(Q_\alpha(x,y)),$$

on a pour tout $\epsilon > 0$ et T assez grand

$$E'_\alpha(T(1-\epsilon)) \subset E_{(p_0,p_1)}(T) \subset E'_\alpha(T(1+\epsilon)),$$

et il ne nous reste plus qu'à calculer le jacobien du changement de variable $(u,v) \mapsto (x,y)$. Il est constant et égal à β.

$\square$

Remarquons que comme corollaire de la preuve, on a l'asymptotique lorsque T tend ver l'infini

$$\mathcal{L}\left(E_{(p_0,p_1)}(T)\right) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{4\alpha_1\alpha 3 - \alpha_2^2}} T^2.$$

3.4.2. *Deuxième cas.* Nous utiliserons la version suivante du théorème ergodique ponctuel pour les actions de $\mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 5.7 ([**Cha70**]). *Soit $(E_n)_n$ une suite d'ensembles de $\mathbb{R}^2$ vérifiant*

1. *Pour tout $v \in \mathbb{R}^k$, on a la condition de Følner*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}(E_n \Delta(v + E_n))}{\mathcal{L}(E_n)} = 0.$$
2. *Il existe un constante $K > 0$ telle que pour tout n,*
$$\frac{\mathcal{L}(E_n - E_n)}{\mathcal{L}(E_n)} \leq K.$$
3. $$\cup_n E_n = \mathbb{R}^k,$$
4. *$(E_n)_n$ est croissante.*

Alors pour tout action de $\mathbb{R}^k$ sur un espace X, toute mesure μ de probabilité sur X, invariante et ergodique, tout f dans $L^1(\mu)$, on a pour presque tout x, lorsque n tend vers l'infini

$$\int_{E_n} f(v.x)d\mathcal{L}(v) \to \int_X f d\mu.$$

Remarquons que dans la suite, les quantificateurs seront inversés : on écrira qu'il existe un ensemble de de mesure pleine de validité du théorème ergodique ponctuel pour les fonctions de $C_c^0(X)$, et non par que pour toute fonction L^1, il existe un ensemble de validité du théorème ergodique. Cette formulation est légitime car, avec les notations du théorème précédent, $C_c^0(X) \subset L^1(\mu)$ lorsque la mesure est finie sur les compacts (ici, elle est de probabilité), et $C_c^0(X)$ est séparable si X est une variété.

LEMME 5.10. *Il existe un ensemble $Y \subset G/H$, de complémentaire de μ-mesure nulle, tel que pour toute application f de $\Gamma\backslash G$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact, tout g dans G tel que gH est dans Y,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\mathcal{L}(E'(T))} \int_{E'(T)} f(\Gamma g h) d\mathcal{L}(h) = \int_{\Gamma\backslash G} f.$$

PREUVE. Tout d'abord, remarquons que pour $E'(n)$ satisfait aux hypothèses du théorème précédent, car l'action de A sur $\Gamma\backslash G$ est ergodique. Il s'ensuit qu'il existe un ensemble Y' de $\Gamma\backslash G$, de mesure pleine pour lequel pour toute fonction f continue à support compact, pour tout Γg dans Y', on ait

$$\frac{1}{\mathcal{L}(E'(n))}\int_{E'(n)} f(\Gamma gh)d\mathcal{L}(h) \to_{T\to+\infty} \int_{\Gamma\backslash G} f.$$

Comme $\mathcal{L}(E'(n+1))/\mathcal{L}(E'(n))$ tend vers 1, c'est encore vrai pour T réel et non plus n entier. Remarquons que Y' est H-invariant. Comme Γ est dénombrable, l'ensemble Y'' des g dans G tels que Γg est dans Y' est de mesure pleine (i.e. son complémentaire est de mesure nulle). Cet ensemble est encore A-invariant, et s'écrit comme un produit $Y'' = Y \times A$. Par décomposition locale de la mesure de Haar μ_G, Y est encore de mesure pleine. $\square$

3.5. Conclusion de la preuve. Notons par Y dans le premier cas l'ensemble des points de G/H dont l'orbite par Γ est dense, et dans le second cas l'ensemble de mesure pleine décrit par le lemme 5.10.

COROLLAIRE 5.8. *Pour tout $\epsilon > 0$, p_0H dans Y et p_1H dans G/H, il existe $\mathcal{U}$ un voisinage relativement compact de p_1H et U un voisinage relativement compact de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que tels que les ensembles $K_i(T,U,\mathcal{U})$ satisfont la propriété suivante (en plus de (H1) et (H2))*
(H3) Pour tout fonction f continue, positive, à support compact, de $\Gamma\backslash G$ dans $\mathbb{R}$, on a les inégalités

$$(1-\epsilon)\int_{\Gamma\backslash G} f \leq \liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{\mathcal{L}(K_i(T,U,\mathcal{U}))}\int_{K_i(T,U,\mathcal{U})} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h)$$
$$\leq \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{\mathcal{L}(K_i(T,U,\mathcal{U}))}\int_{K_i(T,U,\mathcal{U})} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h) \leq (1+\epsilon)\int_{\Gamma\backslash G} f.$$

PREUVE. Montrons-le dans le premier cas. Le deuxième cas est beaucoup plus facile (comparer les propositions 5.5 et 5.6). Soit $\epsilon > 0$, prenons deux réels $\eta > 0$ et $\tau > 0$ tels que

$$\left|\frac{e^{4\tau}}{(1-\eta)^4} - 1\right| \leq \epsilon,$$

et

$$\left|\frac{e^{-4\tau}}{(1+\eta)^4} - 1\right| \leq \epsilon.$$

La troisième affirmation de la proposition 5.5 nous donne un ouvert $\mathcal{U}$ relativement compact contenant p_1H. Puisque nous avons déjà choisi $\tau > 0$, la deuxième affirmation de la proposition 5.5, nous donne un ouvert U relativement compact, contenant 0. Soit f une fonction continue, positive, à support compact de $\Gamma\backslash G$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors des inclusions issues de 5.5 2) et 3) :

$$E_{(p_0,p_1)}(T) \subset K_1(T,U,\mathcal{U}) \subset K_1'(T,U,\eta) \subset E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{Te^{\tau}}{1-\eta}\right),$$
$$E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{Te^{-\tau}}{1+\eta}\right) \subset K_2'(T,U,\eta) \subset K_2(T,U,\mathcal{U}) \subset E_{(p_0,p_1)}(T),$$

et de la positivité de f, nous déduisons que pour $i = 1,2$,

$$\int_{E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{Te^{-\tau}}{1+\eta}\right)} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h) \leq \int_{K_i(T,U,\mathcal{U})} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h) \leq \int_{E_{(p_0,p_1)}\left(\frac{Te^{\tau}}{1-\eta}\right)} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h).$$

Divisons ces inégalités par $\delta(p_0H,p_1H)T^2$, on obtient en passant à la limite à l'aide du lemme 5.9 (ce qui est légitime puisque p_0H est dans Y), et en utilisant la deuxième affirmation 5.5 2), les inégalités

$$\frac{e^{-2\tau}}{(1+\eta)^2}\int_{\Gamma\backslash G} f \leq \liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{\delta(p_0H,p_1H)T^2}\int_{K_i(T,U,\mathcal{U})} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h),$$

et

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{\delta(p_0H,p_1H)T^2}\int_{K_i(T,U,\mathcal{U})} f(\Gamma p_0 h)d\mathcal{L}(h) \leq \frac{e^{2\tau}}{(1-\eta)^2}\int_{\Gamma\backslash G} f.$$

Il ne nous reste qu'à remarquer que les encadrements d'ensembles 5.5 2) et 3) nous donnent également un encadrement de leurs aires. Le rapport des aires

$$\frac{\mathcal{L}(K_i(T,U,\mathcal{U}))}{\delta(p_0H,p_1H)T^2},$$

est donc asymptotiquement compris, grâce à 5.5 2), entre $e^{-\tau}/(1+\eta)^2$ et $e^{\tau}/(1-\eta)^2$. C'est ce que nous voulions. □

Le lemme élémentaire suivant, inspiré des techniques de [**Led99**], est une application des partitions de l'unité. Une preuve est fournie en annexe C.

LEMME 5.11. *Soient X un espace métrique localement compact, μ une mesure borélienne finie sur les compacts, et $(\lambda_T)_{T>0}$ une famille de mesures. Supposons qu'il existe une application*

$$\xi : X \to \mathbb{R}_+^*,$$

continue, telle que pour tout $\epsilon > 0$ *et tout* $y \in X$, *il existe un ouvert* $\mathcal{U}$ *contenant* y *tel que pour toute application* $f : X \to \mathbb{R}_+$ *continue, positive et à support dans* $\overline{\mathcal{U}}$,

$$(1-\epsilon)\xi(y)\int_X f d\mu \leq \liminf_{T\to+\infty}\int_X f d\lambda_T,$$

et

$$\limsup_{T\to+\infty}\int_X f d\lambda_T \leq (1+\epsilon)\xi(y)\int_X f d\mu.$$

Alors pour toute application f *continue à support compact,*

$$\lim_{T\to+\infty}\int_T f d\lambda_T = \int_X f(y)\xi(y)d\mu(y).$$

Nous pouvons maintenant conclure la preuve.

Soit p_0H dans Y, $p_0 = p(p_0H)$. En posant $\xi(gH) = \delta(p_0H, gH)$ dans le premier cas et $\xi(gH) = 1$ dans le second, nous sommes ramenés à prouver l'hypothèse du lemme 5.11. Soit p_1H dans G/H, et soit $\epsilon > 0$. On peut supposer $p_1 = p(p_1H)$. Soit $\mathcal{U}$ le voisinage relativement compact de p_1H donné par le corollaire 5.8, et soit f une fonction de G/H à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, positive et dont le support compact est contenu dans $\mathcal{U}$. Prenons un $\tau > 0$ arbitraire, le corollaire 5.8 nous donne ainsi un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\chi : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive telle que

$$\int_H \chi(h^{-1})d\mathcal{L}(h) = 1,$$

et de support contenu dans U. Soit $\bar{f} : G \to \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$\bar{f}(g) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma g H)\chi(D(\gamma g)).$$

On a :

$$\sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma g_0 H) = \int_H \left(\sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma g_0 H)\chi(h^{-1})\right) d\mathcal{L}(h).$$

Comme la mesure $d\mathcal{L}(h)$ est invariante à gauche[2] , nous avons

$$\sum_{\gamma\in B(T)} f(\gamma p_0 H) = \sum_{\gamma\in B(T)} \int_H f(\gamma p_0 H)\chi\left(h^{-1}D(\gamma p_0)\right) d\mathcal{L}(h).$$

2. à droite également, mais ce n'est pas ce que l'on utilise.

Alors, en utilisant les propriétés (H2) et (H1) du lemme 5.4, on peut écrire en remarquant que $D(\gamma p_0 h) = h^{-1} D(\gamma p_0)$:

$$\int_{K_2(T,U,\mathcal{U})} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma p_0 H) \chi \left(D(\gamma p_0 h) \right) \right) d\mathcal{L}(h) \leq \sum_{\gamma \in B(T)} f(\gamma p_0 H)$$
$$\leq \int_{K_1(T,U,\mathcal{U})} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma p_0 H) \chi \left(D(\gamma p_0 h) \right) \right) d\mathcal{L}(h),$$

c'est-à-dire

$$\int_{K_2(T,U,\mathcal{U})} \bar{f}(p_0 h) dh \leq \sum_{\gamma \in B(T)} f(\gamma p_0 H) \leq \int_{K_1(T,U,\mathcal{U})} \bar{f}(p_0 h) dh.$$

Comme $\bar{f}$ est Γ-invariante, elle peut se voir comme une fonction de $\Gamma \backslash G$ dans $\mathbb{R}_+$, et est alors continue et à support compact. On a d'après la propriété $(H3)$ l'encadrement

$$(1-\epsilon)\xi(p_1 H) \int_{\Gamma \backslash G} \bar{f} \leq \liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{F(T)} \sum_{\gamma \in B(T)} f(\gamma p_0 H),$$
$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{F(T)} \sum_{\gamma \in B(T)} f(\gamma p_0 H) \leq (1+\epsilon)\xi(p_1 H) \int_{\Gamma \backslash G} \bar{f}.$$

Nous venons de montrer que l'on peut appliquer le lemme 5.11 à la suite de mesures :

$$\lambda_T = \frac{1}{F(T)} \sum_{\gamma \in B(T)} \delta_{\gamma p_0 H},$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x.

3.6. Variables non séparées de la fonction δ. Montrons maintenant que δ n'est pas un produit de deux fonctions des variables séparées $p_0 H$, $p_1 H$, ni symétrique en ces variables.

Soit p_0 la matrice identité et p_1 la matrice

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

on calcule que

$$ {}^t p_1 p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. $$

Alors le calcul direct nous permet de montrer que

$$ \delta(p_0H,p_0H) = \pi/\sqrt{2}, \delta(p_0H,p_1H) = \pi/\sqrt{3}, $$

$$ \delta(p_1H,p_1H) = \pi/3, \delta(p_1H,p_0H) = \sqrt{2}\pi/3. $$

Ainsi,

$$ \frac{\delta(p_0H,p_1H)\delta(p_1H,p_0H)}{\delta(p_0H,p_0H)\delta(p_1H,p_1H)} \neq 1. $$

4. Action au bord d'un groupe kleineen

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 5.3. Soit $\mathbb{H}^n$ un espace hyperbolique, Γ un sous-groupe discret de $Isom(\mathbb{H}^n)$, non élémentaire , tel que la mesure de Bowen-Margulis associée sur $T^1\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ soit finie. Notons μ_x et ν_x respectivement la mesure de Patterson-Sullivan relative à Γ, et la mesure harmonique de probabilité, associées au point $x \in \mathbb{H}^n$.

Un ingrédient essentiel de la preuve est le résultat suivant, dû à Thomas Roblin :

THÉORÈME 5.9 ([**Rob02**], corollaire 1 du théorème 4.1.1). *Avec les notations précédentes, en supposant que Γ admette une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie, la convergence suivante a lieu au sens faible dans l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ lorsque $T \to +\infty$:*

$$ \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma \in B(T)} \delta_{\gamma o} \to \frac{1}{\mu_o(\partial H^n)} \mu_o. $$

PREUVE DU THÉORÈME 5.3. Nous commencerons par prouver que la fonction

$$ F_T(\xi,\eta) = \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma \in B(T)} (f(\gamma\xi) - f(\gamma\eta)) $$

converge uniformément vers 0 lorsque $T \to \infty$. Pour cela, fixons $\epsilon > 0$ et notons $K(\epsilon)$ le compact de $\partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n - diag$,

$$ K(\epsilon) = \{(\xi,\eta) \in \partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n : d(\xi,\eta) \geq \epsilon\}. $$

Notons $\omega(\epsilon)$ le module de continuité de f. Alors

$$|F_T(\xi,\eta)| \leq \omega(\epsilon) + \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma \in B(T)} |f(\gamma\xi) - f(\gamma\eta)| 1_{K(\epsilon)}(\gamma\xi,\gamma\eta).$$

On a désigné la fonction caractéristique de $K(\epsilon)$ par $1_{K(\epsilon)}$. De part le corollaire 5.5 appliqué à l'exemple de l'espace des géodésiques de $\mathbb{H}^n$ (voir l'exemple 1 de la partie 2.2),

$$\sum_{\gamma \in B(T)} |f(\gamma\xi) - f(\gamma\eta)| 1_{K(\epsilon)}(\gamma\xi,\gamma\eta) = O(T),$$

uniformément en ξ,η. Comme Γ non élémentaire, $T/|B(T)|$ tend vers 0; en effet, le corollaire 2 du théorème 4.1.1 de [**Rob02**] nous dit que la fonction orbitale $|B(T)|$ croît exponentiellement en T. Donc F_T converge uniformément vers 0.

Pour conclure, il suffit de montrer que lorsque $T \to \infty$,

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma \in B(T)} f(\gamma\xi) d\nu_o(\xi) \to \frac{1}{\mu_o(\partial\mathbb{H}^n)} \int_{\partial\mathbb{H}^n} f d\mu_o.$$

En effet,

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma \in B(T)} f(\gamma\xi) d\nu_o(\xi) = \frac{1}{|B(T)|} \sum_{\gamma \in B(T)} \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\xi) d\nu_{\gamma^{-1}o}(\xi),$$

et il suffit maintenant d'appliquer le résultat de T.Roblin à la fonction de $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$, définie pour x dans $\mathbb{H}^n$ par

$$g(x) = \int_{\partial X} f(\xi) d\nu_x(\xi),$$

et égale à f sur $\partial\mathbb{H}^n$. C'est bien une fonction continue, et la convergence donnée par le théorème 5.9 , modulo le changement de variables $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ (qui laisse les boules $B(T)$ invariantes), est exactement ce qu'il nous fallait pour conclure que la limite est bien celle annoncée. $\square$

ANNEXE A

Lemme de fermeture

Cette section est dédiée à la preuve du lemme de fermeture 3.2, analogue dans un cadre un peu différent du lemme de fermeture d'Anosov [**Ano69**]. Il faut faire plusieurs remarques cependant : les constantes du lemme sont universelles dans le sens où elles ne dépendent que de la courbure d'Alexandrov-Topogonov de X ; le choix de la métrique sur T^1X, qui n'est pas importante dans le lemme original d'Anosov, est ici cruciale, car si $\Gamma\backslash X$ est non compacte, un changement de métrique sur T^1X peut faire disparaître l'universalité du δ. Enfin, remarquons que l'hypothèse $CAT(-1)$ peut être remplacée par $CAT(-a)$ pour $a>0$, par simple homothétie, la convention $CAT(-1)$ n'étant prise que par souci de simplification des calculs. De plus, la preuve fournit des fonctions $T(\epsilon)$, $\delta(\epsilon)$ explicites :

COROLLAIRE A.1 (Constantes explicites).

$$T=\sup\left(\ln(8/\epsilon),\ln(1+\sqrt{2}),3\epsilon\right),$$

$$\delta=\frac{\epsilon\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)}{16+2\epsilon},$$

où l'on a posé :

$$u=\frac{64-\epsilon^2-16\epsilon}{64-\epsilon^2+16\epsilon}\tanh(\epsilon/16).$$

Nous donnons tout d'abord des estimées de distances dans le plan hyperbolique, qui nous seront utiles dans la suite. Nous utiliserons les fonctions de référence :

$$F_{\lambda,\mu}(t)=\lambda e^t+\mu e^{-t}.$$

L'espace vectoriel de ces fonctions est de dimension 2, stable par translation du temps et dérivation, et engendré par les fonction $\cosh,\sinh$. Ces fonctions possèdent la propriété suivante :

LEMME A.1. *Soit $\lambda,\lambda',\mu,\mu',t_1<t_2$ 6 nombres réels. Si on a pour $i=1,2$, l'inégalité*

$$F_{\lambda,\mu}(t_i)\geq|F_{\lambda',\mu'}(t_i)|,$$

et si de plus $F_{\lambda,\mu}$ ne s'annule pas sur $[t_1,t_2]$, alors pour tout $t\in[t_1,t_2]$, on a

$$F_{\lambda,\mu}(t)\geq|F_{\lambda',\mu'}(t)|.$$

PREUVE. Soit $g(t)$ le quotient défini sur $[t_1,t_2]$

$$g(t) = \frac{F_{\lambda',\mu'}(t)}{F_{\lambda,\mu}(t)}.$$

Sa dérivée est :

$$g'(t) = \frac{F_{\lambda,\mu}(t)F_{\lambda',-\mu'}(t) - F_{\lambda,-\mu}(t)F_{\lambda',\mu'}(t)}{(F_{\lambda,\mu}(t))^2},$$

C'est à dire

$$g(t) = -\frac{2(\lambda'\mu + \lambda\mu')}{(F_{\lambda,\mu}(t))^2}.$$

Ainsi g est monotone. Comme elle est en valeur absolue plus petite que 1 en t_1,t_2, c'est encore vrai pour $t \in [t_1,t_2]$. $\square$

LEMME A.2. *Soit g_1,g_2 deux géodésiques du plan hyperbolique H^2, supposons que g_1 est paramétrée par longueur d'arc. La fonction $L(t)$, distance du point $g_1(t)$ à la géodésique g_2, est de la forme :*

$$\sinh L(t) = |F_{\lambda,\mu}(t)|,$$

où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

PREUVE. Si g_1 et g_2 s'intersectent et que $g_1(0)$ est le point d'intersection, et α l'angle d'intersection, alors la distance s'exprime :

$$\sinh L(t) = |\sin(\alpha)\sinh(t)|.$$

Si g_1 et g_2 ne s'intersectent pas, si elles ne sont pas asymptotes, et si $g_1(0)$ est l'intersection de g_1 avec l'orthogonale commune à g_1 et g_2, et L_0 la distance entre les deux droites, on a:

$$\sinh L(t) = \cosh(t)\sinh(L_0).$$

Un paramétrage différent de celui choisit dans les deux cas donne simplement une autre valeur de λ et de μ. Le cas où elles sont asymptotes correspond au cas où $\lambda\mu = 0$. $\square$

LEMME A.3. *Soient g_1,g_2 deux géodésiques du plan hyperbolique H^2, g_1 paramétrisée par longueur d'arc. Soit L la fonction distance du point $g_1(t)$ avec g_2, et soient $t_1 < t_2$ deux réels. Alors pour $t \in \mathbb{R}$:*

$$\sinh L(t) \leq F_{\lambda,\mu}(t),$$

avec

$$\lambda = \frac{e^{-t_1}\sinh(L(t_2)) + e^{-t_2}\sinh(L(t_1))}{2\sinh(t_2 - t_1)},$$

$$\mu = \frac{e^{t_1}\sinh(L(t_2)) + e^{t_2}\sinh(L(t_1))}{2\sinh(t_2 - t_1)}.$$

PREUVE. En effet, d'après le lemme précédent, il existe λ,μ tels que :

$$\sinh L(0) = |\lambda_0 + \mu_0|,$$
$$\epsilon_1 \sinh L(t_1) = \lambda_0 e^{t_1} + \mu_0 e^{-t_1},$$
$$\epsilon_2 \sinh L(-t_2) = \lambda_0 e^{-t_2} + \mu_0 e^{t_2},$$

avec $\epsilon_1,\epsilon_2 \in \{+1,-1\}$. En inversant le système formé par les deux dernières équations, on obtient :

$$\lambda_0 = \frac{e^{-t_2}\epsilon_1 \sinh(L(t_1)) - e^{-t_1}\epsilon_2 \sinh(L(t_2))}{2\sinh(t_1 - t_2)},$$
$$\mu_0 = \frac{-e^{t_2}\epsilon_1 \sinh(L(t_1)) + e^{t_1}\epsilon_2 \sinh(L(t_2))}{2\sinh(t_1 - t_2)}.$$

Les valeurs données de λ,μ sont telles que pour tout t

$$F_{\lambda,\mu}(t) \geq |F_{\lambda_0,\mu_0}(t)|.$$

□

LEMME A.4. *Soit g une géodésique de H^2 paramétrée par le temps et $x \in H^2$. La fonction distance $L(t)$ du point $g(t)$ au point x est de la forme :*

$$\cosh L(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}.$$

De plus, si $t_1 < t_2$ sont deux réels, alors :

$$\cosh(L(t)) \leq F_{\lambda,\mu}(t),$$

avec

$$\lambda = \frac{e^{-t_1}\cosh(L(t_2)) + e^{-t_2}\cosh(L(t_1))}{2\sinh(t_2 - t_1)},$$
$$\mu = \frac{e^{t_1}\cosh(L(t_2)) + e^{t_2}\cosh(L(t_1))}{2\sinh(t_2 - t_1)}.$$

PREUVE. Si g est paramétrée de telle sorte que $g(0)$ soit la projection de x sur g, le théorème de Pythagore hyperbolique donne

$$\cosh L(t) = \cosh(d_0)\cosh(t),$$

où d_0 est la distance de x à g. La deuxième partie s'obtient de la même manière que dans le lemme précédent. □

Soit X un espace simplement connexe, complet, métrique géodésique et $CAT(-1)$ (référence [**Bal95**]). Rappelons que T^1X désigne l'ensemble des plongements isométriques de $\mathbb{R}$ dans X, et que l'on utilise la distance suivante : si $v,v' \in T^1X$:

$$d_{T^1X}(v,v') = \int_{\mathbb{R}} d_X(v(t),v'(t)) \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

En plus d'être convexe et invariante par les isométries de X, cette distance a la propriété suivante [**Bou95**] pour tout $T \geq 0$:

$$e^{-T} \sup_{t\in[-T,T]} d_X(v(t),v'(t)) \leq d_{T^1X}(v,v') \leq \sup_{t\in[-T,T]} d_X(v(t),v'(t)) + 2e^{-T}. \tag{17}$$

Le lemme suivant nous sera utile.

LEMME A.5. *Soient $v,w \in T^1X$, soit $L(t)$ la distance de $v(t)$ à l'image de w et soient $T_1 < T_2$. Alors, pour tout $t \in [T_1,T_2]$, on a:*

$$\sinh L(t) \leq F_{\lambda,\mu}(t),$$

avec

$$\lambda = \frac{e^{-T_1}\sinh(L(T_2)) + e^{-T_2}\sinh(L(T_1))}{2\sinh(T_2 - T_1)},$$

$$\mu = \frac{e^{T_1}\sinh(L(T_2)) + e^{T_2}\sinh(L(T_1))}{2\sinh(T_2 - T_1)}.$$

PREUVE. Soient λ,μ comme dans l'énoncé, et soit $E \subset [T_1,T_2]$ l'ensemble des temps t pour lesquels

$$\sinh L(t) \leq F_{\lambda,\mu}(t).$$

Il est facile de vérifier que E est un compact contenant T_1 et T_2. Nous allons montrer que pour tout $t_1 < t_2$ tous deux éléments de E, il existe $t \in]t_1,t_2[$ appartenant à E. Ceci impliquera que $E = [T_1,T_2]$. Soient donc deux tels t_i.

Pour $i = 1,2$, soit p_i le point de w tel que $d_X(v(t_i),w) = d_X(v(t_i),p_i)$. Nous pouvons trouver dans H^2 deux triangles de comparaison (a,b,p'_1) et (b,p'_1,p'_2) correspondants aux triangles $(v(t_1),v(t_2),p_1)$ et $(v(t_2),p_1,p_2)$ respectivement, car il est possible de les prendre accollés dos à dos. Remarquons tout d'abord que les angles intérieurs $\alpha = \widehat{p'_2p'_1a}$ et $\beta = \widehat{p'_1p'_2b}$ sont tous deux plus grands que $\pi/2$. En effet, pour l'angle α par exemple, la dérivée de la distance au point a le long de la géodésique orientée (p'_1,p'_2) est $-\cos(\alpha)$, et nous pouvons comparer la distance à a d'un point p proche de p_1 sur le segment $[p'_1,p'_2]$ à la distance du point correspondant sur w à $v(t_1)$, en passant par le point d'intersection avec la diagonale $[p_1,b]$ du segment $[p,a]$. Il en est de même pour β. Il s'ensuit donc que la médiatrice au segment $[p_1',p_2']$ coupe le segment $[a,b]$ en un point c. Notons q' le milieu de $[p_1',p_2']$, et e' l'intersection de $[f',c]$ avec $[b,p_1']$. Soient $e,q,v(t)$ les points des segments respectifs $[v(t_2),p_1]$,$[p_1,p_2]$, $[a,b]$ correspondant à e',f',c. Nous avons donc, par comparaison dans le triangle $(v(t_1),v(t_2),p_1)$, l'inégalité

$$d_X(v(t),e) \leq d(c,e').$$

De même, dans le triangle $(v(t_2),p_1,p_2)$, on a:

$$d_X(e,q) \leq d(e',q'),$$

et donc

$$L(t) \leq d_X(v(t),q) \leq d(c,e') + d(e',q') = d(c,q').$$

Or la distance sur la droite (a,b) à la droite (p_1',p_2') est une fonction de la forme :

$$\sinh L'(s) = |F_{\lambda',\mu'}(s)|,$$

pour certains λ',μ'. Comme

$$L'(t_1) \leq d(a,p_1') \leq L(t_1) \leq F_{\lambda,\mu}(t_1),$$

et de même pour t_2, on a pour $i = 1,2$

$$|F_{\lambda',\mu'}(t_i)| \leq F_{\lambda,\mu}(t_i).$$

D'où, comme $t \in [t_1,t_2]$, on peut en déduire par le premier lemme que

$$|F_{\lambda',\mu'}(t)| \leq F_{\lambda,\mu}(t),$$

donc

$$\sinh d(q',c) = \sinh L'(t) \leq F_{\lambda,\mu}(t).$$

et ainsi $t \in E$. Nous avons bien trouvé un point intérieur à $[t_1,t_2]$ dans E.

□

Nous pouvons maintenant, après ces longs préliminaires, rentrer dans le vif du sujet.

PREUVE DU THÉORÈME 3.2. Soit $\epsilon > 0$, tel que $\tanh(\epsilon/16) < 1$. Prenons $T > 0$ suffisamment grand pour que les trois inégalités suivantes soient vraies:

$$e^{-T} \leq \frac{\epsilon}{8},$$
$$T > 3\epsilon,$$
$$\sinh(T) > 1.$$

Prenons $\epsilon' > 0$ suffisamment petit tel que l'inégalité suivante soit vraie :

$$\tanh(\epsilon')\frac{\sinh(T)+1}{\sinh(T)-1}\leq\tanh(\epsilon/16).$$

Soit enfin $\delta > 0$ suffisamment petit, vérifiant l'inégalité suivante :

$$\delta < \frac{\epsilon'}{1+e^T}.$$

Nous allons vérifier que T et δ ainsi choisis conviennent.
Soient v et $t > T$ tels qu'il existe $\gamma \in \Gamma$, $d_{T^1X}(\phi^t(v),\gamma(v)) < \delta$. Le v de l'énoncé du lemme est le projeté sur $\Gamma\backslash X$ du v considéré ici, et le γ est déduit par passage au revêtement universel. Suivant la classification des isométries des espaces d'Hadamard [**Bal95**], γ est soit parabolique, soit elliptique, soit loxodromique.
Si γ est loxodromique ou elliptique, notons Y l'ensemble invariant de déplacement minimal par γ, qui est respectivement une géodésique globalement invariante ou un ensemble convexe de points fixes. Soit $p \in Y$ tel que $d_X(v(0),Y) = d_X(v(0),p)$. Notons $t' = d_X(p,\gamma p)$ le déplacement de p, il est nul si et seulement si γ est elliptique. Soit $d = d_X(v(0),p) = d_X(\gamma v(0),\gamma p)$.

Par l'inégalité triangulaire,

$$|d_X(v(t),\gamma p) - d| \leq \delta \leq \epsilon',$$

et comme la fonction distance à Y est convexe le long des géodésiques,

$$d_X(v(T),Y) \leq d+\delta \leq d+\epsilon'.$$

Donc

$$d_X(v(T+t),Y) \leq d_X(v(T+t),\gamma(v)(T))+d_X(\gamma(v)(T),Y) \leq e^T d_X(v(t),\gamma(v)(0))+(d+\delta),$$
$$d_X(v(T+t),Y) \leq (1+e^T)\delta + d,$$

d'où

$$d_X(v(T+t),Y) \leq d+\epsilon'.$$

1er Cas : Supposons d'abord que γ est elliptique. Le raisonnement se fera par l'absurde. On a $p = \gamma p$. Si $d \leq \epsilon$, on a alors:

$$T \leq t = d_X(v(0),v(t)) \leq d_X(v(0),p) + d_X(p,v(t)) \leq 2d+\delta \leq 3\epsilon,$$

et nous obtenons une contradiction car $T > 3\epsilon$.

Nous supposons donc que $d > \epsilon > \epsilon'$. Nous pouvons trouver dans H^2 un triangle de comparaison (p',a,b) au triangle $(p,v(0),v(T+t))$. Soit c le point sur le segment (a,b) correspondant au point $v(t)$. Comme X est un espace $CAT(-1)$, on a:

$$\cosh(d_X(v(t),p)) \leq \cosh(d(c,p')) \leq F_{\lambda,\mu}(t)$$

Avec :

$$\lambda = \frac{e^{-t-T}\cosh(d_X(v(0),p)) + \cosh(d_X(v(t+T),p))}{2\sinh(t+T)}$$

$$\mu = \frac{e^{t+T}\cosh(d_X(v(0),p)) + \cosh(d_X(v(t+T),p))}{2\sinh(t+T)}$$

Et donc :

$$\cosh(d-\epsilon') \leq \frac{2\cosh(t)\cosh(d+\epsilon')}{\sinh(t+T)},$$

d'où :

$$\coth(d) \leq \frac{\sinh(T)+1}{\sinh(T)-1}\tanh(\epsilon').$$

Comme $\coth(d) > 1$, nous obtenons une contradiction. L'isométrie γ ne peut donc être elliptique.

2ème Cas : Le cas parabolique se traite de manière analogue : prenons pour p un point tel que $d_X(p,\gamma(p))$ soit très petit, nous pouvons approcher la situation précédente où l'on avait un point fixe par ce point "quasi-invariant". Les estimées resteront les mêmes, à une constante arbitrairement petite près. Par l'absurde, γ ne peut être un élément parabolique.

3ème Cas : Nous sommes donc arrivés à la conclusion que γ est loxodromique. Nous allons montrer dans un premier temps que $d < \epsilon/16$. Soit $L(s)$ la distance du point $v(s)$ à la géodésique Y. Posons tout d'abord :

$$\lambda = \frac{\sinh(L(t+T)) + e^{-T-t}\sinh(L(0))}{2\sinh(T+t)},$$

$$\mu = \frac{\sinh(L(T+t)) + e^{T+t}\sinh(L(0))}{2\sinh(T+t)}.$$

Ainsi nous avons l'inégalité :

$$\sinh(d_X(v(t),Y)) = \sinh(L(t)) \leq F_{\lambda,\mu}(t),$$

$$\sinh(L(t)) \leq \frac{\cosh(t)\sinh(L(t+T)) + \cosh(T)\sinh(L(0))}{\sinh(T+t)},$$

$$\sinh(L(t)) \leq \frac{2\cosh(t)}{\sinh(t+T)}\sinh(d+\epsilon'),$$

$$\sinh(d-\epsilon') \leq \frac{\sinh(d)\cosh(\epsilon') + \sinh(\epsilon')\cosh(d)}{\sinh(T)}.$$

Ce qui se traduit par :

$$\tanh(d) \leq \tanh(\epsilon')\frac{1+\sinh(T)}{\sinh(T)-1},$$

d'où :

$$\tanh(d) \leq \tanh(\epsilon/16),$$

et ainsi $d \leq \epsilon/16$. Soit w le paramétrage unitaire de la géodésique Y tel que $w(0) = p$, et orienté de façon à ce que $\gamma(w) = \phi^{t'}w$. On a :

$$|t-t'| = |d_X(v(0),v(t)) - d_X(w(0),w(t'))| \leq d_X(v(0),w(0)) + d_X(w(t'),v(t)),$$
$$|t-t'| \leq d_X(v(0),p) + d_X(w(t'),\gamma(v)(0)) + d_X(\gamma(v)(0),v(t)),$$
$$|t-t'| \leq d + d + \delta \leq \epsilon/8 + \epsilon/16,$$

et ainsi :

$$|t-t'| \leq \epsilon/4.$$

Pour $s \in [0,T]$,

$$d_X(v(-s),x) = d_X(\gamma(v)(-s),x) \leq d_X(\gamma(v)(-s),v(t-s)) + d_X(v(t-s),x) \leq e^s\delta + d,$$
$$d_X(v(-s),x) \leq e^T\delta + d \leq \epsilon/4 + \epsilon/16.$$

Et donc :

$$d_{T^1X}(v,w) \leq \epsilon/4 + 2e^{-T} \leq \epsilon/2.$$

Majorons de même $d_{T^1X}(\phi^t(v),\phi^t(w))$:

$$d_{T^1X}(\phi^t(v),\phi^t(w)) \leq d_{T^1X}(\phi^t(v),\gamma(v)) + d_{T^1X}(\gamma(v),\phi^{t'}(w)) + d_{T^1X}(\phi^t(w),\phi^{t'}(w)),$$
$$d_{T^1X}(\phi^t(v),\phi^t(w)) \leq \delta + d_{T^1X}(v,w) + |t-t'|,$$
$$d_{T^1X}(\phi^t(v),\phi^t(w)) \leq \epsilon/16 + \epsilon/2 + \epsilon/4,$$
$$d_{T^1X}(\phi^t(v),\phi^t(w)) \leq \epsilon.$$

Comme la fonction $s \mapsto d_{T^1X}(\phi^s(v),\phi^s(w))$ est convexe, nous obtenons bien l'inégalité annoncée.

$\square$

ANNEXE B

Un calcul de géométrie Euclidienne

Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$, identifié au plan complexe (par une isométrie). Soit C un cercle, inclut dans un plan P' orthogonal à P, et tel que la droite $P \cap P'$ passe par le centre de C. Notons z,z' les deux point d'intersection de C avec P. Soit S une sphère tangente à P en un point noté x; on suppose que S intersecte C en un et un seul point, et on veut une relation entre le rayon r de S et les nombres complexes z,z',x.

Dans un premier temps, supposons que $z = 1$ et $z' = -1$. Remarquons que la distance de x au plan P' est alors égale à $\Im(x)$. Soit C_1 l'intersection de P' et S; c'est un cercle, dont le centre a est à distance $\sqrt{\Re(x)^2 + r^2}$ du centre $o = 0$ de C. Notons r_1 sont rayon; par le théorème de Pythagore, on a

$$r_1^2 = r^2 - \Im(x)^2.$$

Comme C_1 et C ont un unique point de tangence m, on a que o,m,a sont alignés. En retranchant les deux équations

$$am^2 = r_1^2,\ om^2 = 1,$$

et en utilisant les expressions de r_1 et oa, nous obtenons

$$\vec{oa}.\vec{om} = \frac{1 + |x|^2}{2}.$$

Comme ces deux vecteurs sont colinéaires, on a en élevant au carré

$$r^2 + \Re(x)^2 = \left(\frac{1 + |x|^2}{2}\right)^2,$$

et donc

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + |x|^2)^2 - 4\Re(x)^2},$$

ce qui est l'expression voulue pour r.

Maintenant, si z et z' ne sont pas égaux à 1 et -1, nous pouvons appliquer une homothétie de rapport $2/|z - z'|$, ainsi qu'une rotation et une translation, de telle sorte que P soit invariant et que la transformation s'écrive sur P

$$u(y) = \frac{2y - (z + z')}{z' - z}.$$

Ainsi, $u(z) = 1$ et $u(z') = -1$. Le calcul précedent s'applique, et la formule pour r devient donc, après tranformation inverse,

$$r = \frac{|z - z'|}{4}\sqrt{(1 + |u(x)|^2)^2 - 4\Re(u(x))^2}.$$

ANNEXE C

Quelques preuves manquantes

1. Preuve du lemme 5.1

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME C.1. *Sous les hypothèses de la partie 2, toute orbite de Γ dans X est discrète. De plus, pour tout compact K de X, l'ensemble des transformations γ de Γ telles que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ est fini.*

PREUVE. Prouvons tout d'abord la deuxième assertion. Soit γ_n une suite de tels éléments de Γ. Vus comme applications d'un compact K_i dans X, c'est une famille équicontinue (car ce sont des isométries), et le théorème d'Arzela-Ascoli (applicable car X est complet) nous dit que l'on peut trouver une limite. Par un procédé diagonal sur des compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$, légitime car X est σ-compact, nous pouvons faire converger ces éléments (uniformément sur les compacts) vers une application γ_∞ de X dans X, qui a la propriété $\gamma_\infty(K)\cap K \neq \emptyset$. Cette application est nécessairement une d_0-isométrie. Comme Γ est discret et fermé, la suite γ_n possède donc une sous-suite constante. En d'autre termes, l'ensemble des γ tels que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ est donc fini.
La première assertion se déduit de la deuxième. Soit K un voisinage compact quelconque d'un point x de X, l'ensemble des γ tels que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ est fini, mais tous les éléments de γ différents de l'identité Id_X n'ont pas x comme point fixe (par hypothèse sur Γ), et par conséquent quitte à restreindre K, on a que x est isolé dans Γx. □

PREUVE DU LEMME 5.1. Montrons d'abord que X/A est séparé. Soient xA,yA deux points de X/A, et notons $B(x,\epsilon)$ la boule ouverte pour d_0 de centre x, rayon ϵ. Supposons que pour tout ϵ strictement positif, on ait

$$B(x,\epsilon)A \cap B(y,\epsilon)A \neq \emptyset.$$

Pour $\epsilon = 1/n$, il existe donc a_n dans A tels que $x_n a_n = y_n$, x_n tendant vers x e y_n vers y. Comme $d(x_n a_n, x_n) = ||a_n|| = d(y_n, x_n)$, a_n est bornée et une sous-suite converge vers a. Ainsi $xa = y$ et donc $xA = yA$ si xA n'est pas séparé de yA.
Montrons maintenant que $\Gamma\backslash X$ est séparé, à l'aide du lemme précédent. En effet, soient K un voisinage compact de x et y, deux points de X. De par le lemme précédent, la distance $d_0(x,\Gamma y)$ est un atteinte par un γy, pour un certain γ. Ainsi, si $\gamma y \neq x$, les orbites par Γ des boules ouvertes de centre respectifs x et y, de rayon $d_0(x,\gamma y)/2$, sont disjointes.

La locale compacité et σ-compacité de X/A et $\Gamma\backslash X$ découlent de celles de X.

Pour la deuxième partie, l'application $X/A \times A \to X$ est un application continue. Soit

$$\phi : X \to X/A \times A,$$
$$x \mapsto (xA, D(x)),$$

où $D(x)$ est l'unique a dans A tel que $p(xA)a = x$ - il existe car $p(xA)A = xA$ et est unique car $d(ya, ya') = ||a - a'||$ pour tout y dans X, et tout a, a' dans A. Alors ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre, et il ne reste à prouver que la continuité de ϕ. Il suffit donc de prouver la continuité de D. Soit $x \in X$ et ϵ ans l'intervalle $]0,1[$, soit K_1 un voisinage compact de $c(x)$ dans A de diamètre inférieur à $\epsilon/2$, il existe par uniforme continuité un voisinage K_2 de $p(xA)$ tel que pour tout y dans K_2et a dans K_1, on ait $d(ya, x) < \epsilon/2$. Soit U un voisinage de x tel que pour tout $z \in U$, $p(zA)$ est dans K_2, alors $d(p(zA)c(z), p(zA)c(x)) = ||D(z) - D(x)||$ et, par l'inégalité triangulaire,

$$d(p(zA)D(z), p(zA)D(x)) \leq d(z, x) + d(x, p(zA)D(x)) < \epsilon/2 + \epsilon/2.$$

Le cocycle c se définit comme

$$c(\gamma, xA) = D(\gamma p(xA)).$$

La relation de cocycle découle de la commtutativité des actions de Γ et A.
Enfin, le fait que Γ est dénombrable découle de la deuxième assertion du lemme C.1, du fait que X est σ-compact et que aucun élément de Γ n'a pas de point fixe. $\square$

2. Preuve du lemme 5.3

PREUVE. Le support de $\bar{f}$ est compact puisque c'est le projeté du support de f. Si $\mathcal{B}$ est un borélien de X saturé (c'est-à-dire $\Gamma\mathcal{B} = \mathcal{B}$ dans X), alors sa projection dans $\Gamma\backslash X$ est également borélienne, car la tribu engendrée par les ouverts saturés de X est en bijection avec la tribu des boréliens (engendrée par les ouverts) de $\Gamma\backslash X$, car la projection est ouverte (En fait, tout borélien se projette sur un borélien car Γ est dénombrable). On peut supposer f positive. Soit $\tilde{f}$ la fonction de X définie par

$$\tilde{f}(y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma y).$$

Cette somme est presque nulle, et a bien un sens. Comme Γ est dénombrable, $\tilde{f}$ est également mesurable et par suite $\bar{f}$ l'est. Enfin, si f est bornée, l'application du lemme

C.1 au support de f nous permet de voir que la somme définissant $\bar{f}$ a au plus un nombre fini N de termes non nuls, et donc que $\sup|\bar{f}| \leq N \sup |f|$. □

3. Preuve du lemme 5.11

PREUVE. Quitte à écrire $f = sup(f,0) - sup(-f,0)$, on peut supposer f positive. Soit $\epsilon > 0$, pour tout y dans le support $supp(f)$ de f, il existe par hypothèse et continuité de ξ un voisinage ouvert $\mathcal{U}(y)$ de y vérfiant l'hypothèse et tel que pour tout z dans $\mathcal{U}(y)$, $|\xi(z)-\xi(y)| < \epsilon$. Comme $supp(f)$ est compact, il existe $y_1,...,y_k$ tels que les ouverts $\mathcal{U}(y_i)$ recouvrent $supp(f)$. Soit, pour $i = 1,..,k$, des fonctions $g_i : X \to \mathbb{R}_+$ qui forment une partition de l'unité subordonnée au recouvrement précédemment choisit. On peut prendre par exemple, si on note Y^c le complémentaire d'un ensemble Y, et d la distance sur X,

$$g_i(z) = \frac{d(x,\mathcal{U}(y_i)^c)}{\sum_{j=1}^k d(x,\mathcal{U}(y_j)^c)}.$$

De par l'hypothèse, comme fg_i est à support dans $\overline{\mathcal{U}(y_i)}$, on a pour un $T_i > 0$ et tout $T > T_i$,

$$\left| \int_X fg_i d\lambda_T - \xi(y_i) \int_X fg_i d\mu \right| \leq 2\epsilon \sup_{supp(f)} (\xi) \int_X fg_i d\mu.$$

Sommant ces inégalités pour $i = 1,..,k$ (c'est légitime car les fg_i sont positives), on obtient en utilisant que $\sum_{i=1}^k g_i = 1$ sur $supp(f)$, l'inégalité valable pout $T > \sup T_i$,

$$\left| \int_X f d\lambda_T - \int_X f(\sum_{i=1}^k \xi(y_i) g_i) d\mu \right| \leq 2\epsilon \sup_{supp(f)} (\xi) \int_X f d\mu.$$

Or, pour tout z dans $supp(f)$,

$$\left| \sum_{i=1}^k \xi(y_i) g_i(z) - \xi(z) \right| \leq \sum_{i=1}^k g_i(z) |\xi(z) - \xi(y)| \leq \epsilon,$$

car $|\xi(z) - \xi(y)| < \epsilon$ dès que $g_i(z) > 0$. Ainsi, pour $T > \sup T_i$,

$$\left| \int_X f d\lambda_T - \int_X f d\mu \right| \leq \epsilon \left(2 \sup_{supp(f)} (\xi) + 1 \right) \int_X f d\mu.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, CQFD. □

Bibliographie

[Ano69] D. V. Anosov. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967). Translated from the Russian by S. Feder. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[Bal95] Werner Ballmann. *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, volume 25 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. With an appendix by Misha Brin.

[BC67] Z. I. Borevitch and I. R. Chafarevitch. *Théorie des nombres*. Traduit par Myriam et Jean-Luc Verley. Traduction faite d'après l'édition originale russe. Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, No. 8. Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[BLS86] A. F. Beardon, J. Lehner, and M. Sheingorn. Closed geodesics on a Riemann surface with application to the Markov spectrum. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(2):635–647, 1986.

[Bor69] Armand Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341. Hermann, Paris, 1969.

[Bou63] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI: Intégration. Chapitre 7: Mesure de Haar. Chapitre 8: Convolution et représentations*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1306. Hermann, Paris, 1963.

[Bou95] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $\mathrm{CAT}(-1)$-espace. *Enseign. Math. (2)*, 41(1-2):63–102, 1995.

[Bur92] Edward B. Burger. Homogeneous Diophantine approximation in S-integers. *Pacific J. Math.*, 152(2):211–253, 1992.

[Bur93] Edward B. Burger. Badly approximable systems and inhomogeneous approximation over number fields. In *Number theory with an emphasis on the Markoff spectrum (Provo, UT, 1991)*, volume 147 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 33–41. Dekker, New York, 1993.

[Cas57] J. W. S. Cassels. *An introduction to Diophantine approximation*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 45. Cambridge University Press, New York, 1957.

[CF89] Thomas W. Cusick and Mary E. Flahive. *The Markoff and Lagrange spectra*, volume 30 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[Cha70] Jacqueline Chatard. Applications des propriétés de moyenne d'un groupe localement compact à la théorie ergodique. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 6:307–326; erratum, ibid. (N.S.) **7 (1971), 81–82**, 1970.

[Coh55] Harvey Cohn. Approach to Markoff's minimal forms through modular functions. *Ann. of Math. (2)*, 61:1–12, 1955.

[Cus87] T. W. Cusick. Endpoints of gaps in the Markoff spectrum. *Monatsh. Math.*, 103(2):85–91, 1987.

[Dan85] S. G. Dani. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation. *J. Reine Angew. Math.*, 359:55–89, 1985.

[EM93] Alex Eskin and Curt McMullen. Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups. *Duke Math. J.*, 71(1):181–209, 1993.

[FN98] Koji Fujiwara and Amos Nevo. Maximal and pointwise ergodic theorems for word-hyperbolic groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(4):843–858, 1998.

[Fre90] Eberhard Freitag. *Hilbert modular forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Gor02a] Alexander Gorodnik. Lattice action on the boundary of $sl_n(r)$. *preprint*, 2002.

[Gor02b] Alexander Gorodnik. Uniform distribution of orbits of lattices on spaces of frames. *preprint*, 2002.

[Haa86] Andrew Haas. Diophantine approximation on hyperbolic Riemann surfaces. *Acta Math.*, 156(1-2):33–82, 1986.

[Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1978.

[HP01a] Sa'ar Hersonsky and Frédéric Paulin. Counting orbit points in coverings of negatively curved manifolds and hausdorff dimension of cusp excursions. *preprint*, 2001.

[HP01b] Sa'ar Hersonsky and Frédéric Paulin. Hausdorff dimension of Diophantine geodesics in negatively curved manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 539:29–43, 2001.

[HP02] Sa'ar Hersonsky and Frédéric Paulin. Diophantine approximation for negatively curved manifolds. *Math. Z.*, 241(1):181–226, 2002.

[IH85] Hans-Christoph Im Hof. An Anosov action on the bundle of Weyl chambers. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(4):587–593, 1985.

[KM99] D. Y. Kleinbock and G. A. Margulis. Logarithm laws for flows on homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 138(3):451–494, 1999.

[Led99] François Ledrappier. Distribution des orbites des réseaux sur le plan réel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(1):61–64, 1999.

[LW01] Elon Lindenstrauss and Barak Weiss. On sets invariant under the action of the diagonal group. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(5):1481–1500, 2001.

[Mau02] François Maucourant. Sur les spectres de lagrange et de markoff des corps imaginaires quadratiques. *to appear, Ergodic theory and dynamical systems*, 2002.

[Quê91] Roland Quême. On Diophantine approximation by algebraic numbers of a given number field: a new generalization of Dirichlet approximation theorem. *Astérisque*, (198-200):273–283 (1992), 1991. Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989).

[Ran57] R. A. Rankin. Diophantine approximation and horocyclic groups. *Canad. J. Math.*, 9:277–290, 1957.

[Rob02] Thomas. Roblin. Ergodicité et unique ergodicité du feuilletage horosphérique, mélange du flot géodésique et équidistributions diverses dans les groupes discrets en courbure négative. *preprint*, 2002.

[Rud80] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[Sam67] Pierre Samuel. *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, Paris, 1967.

[Sch69] Asmus L. Schmidt. Farey simplices in the space of quaternions. *Math. Scand.*, 24:31–65, 1969.

[Sch75] Asmus L. Schmidt. Diophantine approximation of complex numbers. *Acta Math.*, 134:1–85, 1975.

[Sch78] Asmus L. Schmidt. Diophantine approximation in the field $\mathbf{Q}(i(11^{1/2}))$. *J. Number Theory*, 10(2):151–176, 1978.

[Sch83] Asmus L. Schmidt. Diophantine approximation in the Eisensteinian field. *J. Number Theory*, 16(2):169–204, 1983.

[Sha94] Nimish A. Shah. Limit distributions of polynomial trajectories on homogeneous spaces. *Duke Math. J.*, 75(3):711–732, 1994.

[Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):171–202, 1979.

[Sul82] Dennis Sullivan. Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers, and the logarithm law for geodesics. *Acta Math.*, 149(3-4):215–237, 1982.

[Swa68] Richard G. Swan. Generators and relations for certain special linear groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:576–581, 1968.