UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles 2

Examen de décembre 2018

Durée 2H. Documents et calculatrices interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints.

Exercice 1

Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
On considère l'EDO
$$Y' = AY + B,$$
avec la condition initiale $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1 Calculez les coefficients de la matrice e^{tA}.

2 Déterminez explicitement la solution $Y(t)$.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$, $\Omega = \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$. On pose pour $x = (x_1, .., x_n) \in \Omega$,
$$r(x) = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

1 Exprimer $\frac{\partial r}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$ en fonction de x_i et r.

Soit $v : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2, et $u : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par $u(x) = v(r(x))$. On suppose que u satisfait l'équation suivante :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

2 Déterminez l'équation différentielle satisfaite par la fonction v.

3 Résoudre cette dernière.

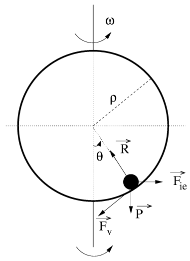
On suppose désormais que $n = 2$ et que u satisfait cette fois l'équation
$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(r),$$
où g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^+$

4 Montrez que $v(r)$ satisfait l'EDO
$$\frac{v'(r)}{r} + v''(r) = g(r).$$

5 On pose $a = v(1), b = v'(1)$. Déterminez $v(r)$ en fonction de a, b, g, r.

Exercice 3

On considère une tube circulaire (placé verticalement) qui tourne autour d'un de ses diamètres à vitesse angulaire constante $\omega > 0$. Une bille glisse à l'intérieur du tube, sa position étant repérée par un angle orienté θ avec l'axe vertical (voir dessin).



La bille est donc soumise à la pesanteur, la force centrifuge dûe à la rotation du tube, les forces de frottements, et la force de réaction du tube.

Après application du principe fondamental de la dynamique, le mouvement de la bille est décrit par l'équation suivante :

$$m\rho\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mg\sin\theta + m\omega^2\rho\sin\theta\cos\theta,$$

où $\rho > 0$ est le rayon du tube, g la constante de gravitation, $b > 0$ un constante de frottement, $m > 0$ la masse.

1 Mettre cette équation différentielle sous la forme

$$\dot{Y} = F(Y),$$

où $Y = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, et $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une fonction que l'on précisera.

2 Étant donnés des conditions initiales $\theta(0), \dot{\theta}(0)$, que pouvez-vous dire de l'existence, de l'unicité, et de l'intervalle de définition des solutions de cette équation différentielle ?

3 Déterminer les points d'équilibre. On posera $\gamma = g/(\rho\omega^2)$, et on pourra distinguer les cas de faible vitesse ($\gamma > 1$) de ceux de grande vitesse ($\gamma < 1$).

4 Étudier la stabilité des points d'équilibre dans les cas où $\gamma \neq 1$.

Exercice 4

Soit $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction C^1, supposée croissante. On considère une solution y de l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0.$$

1 Soit $V(t) = \int_0^t q(s)y(s)y'(s)ds$. Que pouvez vous dire de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}y'^2 + V(t)$? En déduire que V est bornée supérieurement sur $\mathbf{R}^+$.

2 En faisant une intégration par partie dans une intégrale bien choisie, montrez qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{2}q(t)y^2(t) \leq C + \int_0^t \frac{1}{2}q'(s)y^2(s)ds.$$

3 En appliquant un lemme du cours à une fonction bien choisie, en déduire que y est bornée sur $\mathbf{R}^+$.