UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles 2

Examen terminal

Durée 2H. Documents et calculatrices interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints.

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + \cos(x) - 1, \\ y' = 2x - 3y + \cos(x) - 1, \end{cases}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

1 Discutez de l'existence et de l'unicité des solutions maximales de ce problème de Cauchy, et montrez qu'elles sont globales (définies pour tout temps).

Sol.: $x \mapsto \cos(x)$ est 1-Lipschitz donc le second membre de l'équation $f(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\cos(x) - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est L-Lipschitz globalement sur $\mathbf{R}^2$ avec $L = \|A\|_\infty + 1$ par exemple. Ainsi, on peut invoquer Cauchy-Lipschitz et conclure à l'existence globale.

2 Déterminez les points d'équilibre.

Sol.: $3x - 4y + \cos(x) - 1 = 2x - 3y + \cos(x) - 1 = 0$ soit $y = x = \cos(x) - 1$. Or $g(x) = \cos(x) - 1 - x$ ne s'annule qu'en $x = 0$, donc il y a un et un seul équilibre $x = y = 0$.

3 Soit, pour $t \in \mathbf{R}$, Φ^t le flot de l'équation différentielle au temps t, on note $D\Phi^t_{(x_0,y_0)}$ sa différentielle en un point (x_0, y_0). Déterminez l'équation différentielle satisfaite par $D\Phi^t_{(0,0)}$.

Sol.: Pour $(x_0, y_0) = (0,0)$ la solution $\Phi^t_{(0,0)}$ est constante et vaut $\Phi^t_{(0,0)} = (0,0)$. Par ailleurs, $f'(0,0) = A$ donc l'équation variationelle s'écrit

$$\frac{d}{dt} D\Phi^t_{(0,0)} = A\, D\Phi^t_{(0,0)}, \quad D\Phi^0_{(0,0)} = I_2$$

4 Déterminez explicitement la matrice $D\Phi^t_{(0,0)}$.

Sol.: On a

$$D\Phi^t_{(0,0)} = \exp(tA) = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} & 2\,\mathrm{e}^{-t} - 2\,\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t + 2\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue et globalement Lipschitzienne, de constante de Lipschitz L.

1 Soit $y_0 \in \mathbf{R}^n$. Montrer que la solution $y(t)$ de l'équation

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

est définie globalement.

Sol.: Cauchy-Lispschitz

2 Soit $t \mapsto v(t)$ une fonction de $C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \|v'(t) - f(t, v(t))\|_{\mathbf{R}^n} \leq \epsilon$$

et

$$\|v(0) - y_0\|_{\mathbf{R}^n} \leq \rho$$

où $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^n}$ est une norme quelconque sur $\mathbf{R}^n$. En utilisant un lemme du cours sous une forme que l'on explicitera, montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a la majoration

$$\text{(M):}\quad \|y(t)-v(t)\|_{\mathbf{R}^n} \le \rho e^{Lt} + \frac{\epsilon}{L}(e^{Lt}-1)$$

Sol.: Sous forme intégrale, on a

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds \text{ et } v(t) = v(0) + \int_0^t v'(s)ds$$

donc

$$\|y(t)-v(t)\|_{\mathbf{R}^n} \le \rho + \int_0^t \|f(s,y(s)) - v'(s)\|_{\mathbf{R}^n} ds.$$

Or

$$\begin{aligned}\|f(s,y(s)) - v'(s)\|_{\mathbf{R}^n} &\le \|f(s,y(s)) - f(s,v(s))\|_{\mathbf{R}^n} + \|f(s,v(s)) - v'(s)\|_{\mathbf{R}^n} \\ &\le L\|y(s)-v(s)\|_{\mathbf{R}^n} + \epsilon\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\|y(t)-v(t)\|_{\mathbf{R}^n} &\le \rho + \int_0^t \Big(L\|y(s)-v(s)\|_{\mathbf{R}^n} + \epsilon\Big)ds \\ &\le \rho + \epsilon t + \int_0^t L\|y(s)-v(s)\|_{\mathbf{R}^n} ds \qquad (1)\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)u(s)ds \Longrightarrow u(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\exp\Big(\int_s^t \beta(r)dr\Big)ds$$

avec $u(t) = \|y(t)-v(t)\|_{\mathbf{R}^n}$, $\alpha(t) = \rho + \epsilon t$ et $\beta(t) = L$, il vient

$$\|y(t)-v(t)\|_{\mathbf{R}^n} \le \rho + \epsilon t + \int_0^t (\rho + \epsilon s)Le^{L(t-s)}ds$$

et le résultat suit par intégration.

3 En Considérant la fonction $u(t) = \rho + \epsilon t + L\int_0^t u(s)ds$, montrer la majoration (M) directement.

Sol.: On a $u(0) = \rho$ et $u'(t) = \epsilon + Lu(t)$ donc par variation de la constante $u(t) = \rho e^{Lt} + \frac{\epsilon}{L}(e^{Lt}-1)$. Maintenant si on soustrait à (1) la valeur de u on a en posant $w(t) = \|y(t)-v(t)\|_{\mathbf{R}^n} - u(t)$

$$w(t) \le \int_0^t Lw(s)ds \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(e^{-Lt}\int_0^t w(s)ds\Big) \le 0$$

et comme la fonction est nulle en $t = 0$, on a $w(t) \le 0$.

4 Soit $g : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue et localement Lipschitzienne en la seconde variable, vérifiant

$$\forall (t,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\ \|g(t,y) - f(t,y)\| \le \epsilon.$$

Montrez que la solution maximale de $z' = g(t,z(t))$, $z(0) = z_0$, existe, est unique et globale.

Sol.: Par Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert contenant 0. On a donc la majoration (M) pour $v = z$ sur son intervalle de définition. Ceci interdit à la solution d'exploser en temps fini, par le principe de majoration la solution est donc globale.

5 Soit $h : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t,y) = \sin(ty^2) + y + t^3$. Montrez que la solution maximale de $z' = h(t,z)$, $z(0) = 0$, est définie pour tout temps.

Sol.: h est de classe C^1 donc localement lipschitzienne. On prend

$$f(t,y) = y + t^3,$$

qui est 1-Lipschitzienne en y. On prend donc $\epsilon = 1$, $\rho = 0$, $y_0 = 0$, les résultats des questions précédentes s'appliquent directement.

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(y), \\ y' = \sin(x+y), \end{cases}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

1 Discutez de l'existence et de l'unicité des solutions maximales de ce problème de Cauchy, et montrez qu'elles sont globales (définies pour tout temps).

Sol.: On a existence et unicité globales car second membre Lipschitz sur tout $\mathbf{R}^2$.

2 Déterminez les points d'équilibre.

Sol.: $y = l\pi$ et $x = k\pi$

3 Étudiez leur stabilité. On distinguera quatres cas.

Sol.: La jabocienne en $(x, y) = (k\pi, l\pi)$ vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^l \\ (-1)^{k+l} & (-1)^{k+l} \end{pmatrix}$$

Les v.p. sont de la forme $\frac{1}{2}((-1)^l \pm \sqrt{5})$ si k est pair et $\frac{1}{2}((-1)^{1+l} \pm i\sqrt{3})$ si k est impair. Donc eq. instable si k pair ou si k et l impairs. Stable si k impair et l pair.

4 On considère

$$V(x, y) = \cos(x+y) - \cos(y).$$

Montrez que V décroît le long du flot de l'équation considérée.

Sol.:

$$\frac{d}{dt}V = -\sin(x+y)(\dot{x}+\dot{y}) + \cos(y)\dot{y} = -\sin(x+y)(\sin(y)+\sin(x+y)) + \sin(y)\sin(x+y) = -\sin^2(x+y) \leq 0$$

5 Déterminez les minima globaux de V.

Sol.: $V \geq -2$ et $V = -2$ ssi $x = (2k+1)\pi$ et $y = 2l\pi$

6 Déterminez le lieu des zéros de V.

Sol.: $V = -2\sin(x/2)\sin(\frac{1}{2}(x+2y))$ s'annule pour $x = 2k\pi$ ou $x + 2y = 2l\pi$

7 Dessinez le lieu des zéros de V, puis les zones où $V > 0$, $V < 0$ respectivement.

Sol.: Pavage régulier de parallélogrammes avec alternance "ligne" et "colonne" de régions où $V > 0$ et de régions où $V < 0$, entrecoupées de lignes où $V = 0$.

8 Montrez que toute solution est bornée.

Sol.: Supposons tout d'abord qu'une solution ne suive jamais les lignes du parallélogramme. Montrons qu'une telle solution reste bornée en temps positif. En effet, si elle commence dans un parallélogramme où $V > 0$, elle ne peut passer que dans un des quatres parallélogramme adjacents où $V < 0$, car V décroît le long du flot. Une fois dans un tel parallélogramme, il est entouré par 4 droites où $V = 0$. Comme V décroît, elle ne peut en sortir. L'argument est symétrique en temps négatif. Enfin, pour voir qu'une solution ne peut parcourir un segment (non réduit à un point) du pavage, il suffit de dessiner le champ de vecteur sur les bords d'un parallélogramme, en faisant attention au point stationnaire hyperbolique dans les coins : les champs sont entrant dans les zones $V < 0$ sauf aux poinst stationnaires.