Équations Différentielles 2

Examen terminal

Durée 2H. Documents et calculatrices interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints.

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + \cos(x) - 1, \\ y' = 2x - 3y + \cos(x) - 1, \end{cases}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

1 Discutez de l'existence et de l'unicité des solutions maximales de ce problème de Cauchy, et montrez qu'elles sont globales (définies pour tout temps).

2 Déterminez les points d'équilibre.

3 Soit, pour $t \in \mathbf{R}$, Φ^t le flot de l'équation différentielle au temps t, on note $D\Phi^t_{(x_0,y_0)}$ sa différentielle en un point (x_0, y_0). Déterminez l'équation différentielle satisfaite par $D\Phi^t_{(0,0)}$.

4 Déterminez explicitement les coefficients de la matrice $D\Phi^t_{(0,0)}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue et globalement Lipschitzienne en la seconde variable, de constante de Lipschitz L.

1 Soit $y_0 \in \mathbf{R}^n$. Montrer que la solution maximale $y(t)$ de l'équation

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

est définie globalement.

2 Soit $t \mapsto v(t)$ une fonction de $C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \|v'(t) - f(t, v(t))\|_{\mathbf{R}^n} \leq \epsilon$$

et

$$\|v(0) - y_0\|_{\mathbf{R}^n} \leq \rho$$

où $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^n}$ est une norme quelconque sur $\mathbf{R}^n$. En utilisant un lemme du cours sous une forme que l'on explicitera, montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a la majoration

$$\text{(M):} \quad \|y(t) - v(t)\|_{\mathbf{R}^n} \leq \rho e^{Lt} + \frac{\epsilon}{L}(e^{Lt} - 1)$$

3 En considérant la fonction $u(t) = \rho + \epsilon t + L \int_0^t u(s)ds$, montrer la majoration (M) directement.

4 Soit $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue et localement Lipschitzienne en la seconde variable, vérifiant

$$\forall (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \ \|g(t, y) - f(t, y)\| \leq \epsilon.$$

Montrez que la solution maximale de $z' = g(t, z(t))$, $z(0) = z_0$, existe, est unique et globale.

5 Soit $h : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t, y) = \sin(ty^2) + y + t^3$. Montrez que la solution maximale de $z' = h(t, z)$, $z(0) = 0$, est définie pour tout temps.

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(y), \\ y' = \sin(x + y), \end{cases}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

1 Discutez de l'existence et de l'unicité des solutions maximales de ce problème de Cauchy, et montrez qu'elles sont globales (définies pour tout temps).

2 Déterminez les points d'équilibre.

3 Étudiez leur stabilité. On distinguera quatres cas.

4 On considère

$$V(x, y) = \cos(x + y) - \cos(y).$$

Montrez que V décroît le long du flot de l'équation considérée.

5 Déterminez les minima globaux de V.

6 Déterminez le lieu des zéros de V.

7 Dessinez le lieu des zéros de V, puis les zones où $V > 0$, $V < 0$ respectivement.

8 Montrez que toute solution est bornée.