UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles 2

Contrôle continu

Durée 2H. Documents et calculatrices interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints. Précisez bien votre groupe de TD (Jeudi matin ou Jeudi après-midi).

Exercice 1

Déterminer explicitement les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants :

1

$$y'(t) + t\,y(t) = t, \text{avec } y(0) = y_0 \in \mathbf{R}.$$

2

$$Y' = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -15 & -11 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } Y(0) = Y_0 \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle du premier ordre avec condition initiale suivante : pour $x \geq 0$

$$(E) \quad y' = y^2 - x, \quad y(0) = 0.$$

Soit $(y, [0, b[)$ la solution maximale de (E) $(b \in \bar{\mathbf{R}})$.

1 Donner un équivalent simple de y en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, b[$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$ on ait $y^2(x) < x$.

2 Montrer que $y^2(x) < x$ pour tout $x \in]0, b[$.

3 Montrer que si b était fini, y serait bornée sur $[0, b[$. En déduire que $b = +\infty$.

Exercice 3

1 Étant donné $x_0 > 0$, résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)),\ x(0) = x_0.$$

On considère un modèle écologique où deux espèces sont en compétition pour les mêmes ressources. Soient α, β deux nombres positifs (modélisant l'impact de chaque population sur l'autre). Le modèle est donné par l'équation suivante:

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y) \\ y' = y(1 - y - \beta x) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

2 Justifiez l'existence et l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy (1), définie sur un intervalle I.

3 Donnez les solutions de cette équation dans le cas où $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$, et de même lorsque $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$.

4 Montrez que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans I.

5 Dans le cas où $\alpha = \beta = 1$, montrez que les trajectoires sont portées par des droites.

6 **On suppose dorénavant et jusqu'à la fin de l'énoncé que** $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et $x_0 > 0, y_0 > 0$. Déterminez les points stationnaires de l'équation différentielle.

7 On pose, pour $u > 0$,

$$A(u) = 2\left(1 - \frac{3u}{2}\right) \ln \frac{3u}{2},$$

Que pouvez-vous dire du signe de $A(u)$?

8 On pose

$$H(x, y) = (\ln(x) - \ln(2/3))^2 + (\ln(y) - \ln(2/3))^2 + (\ln(x) - \ln(y))^2\,,$$

Si $(x(t), y(t))$ est une solution de l'EDO avec $x_0 > 0, y_0 > 0$, déterminez une expression simple de

$$V(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} H(x,y)\right) - A(x) - A(y).$$

9 Toujours en supposant $x_0 > 0, y_0 > 0$, en déduire que les solutions restent bornées pour $t \geq 0$, puis sont définies pour tout $t \geq 0$.
10 Montrez que $\lim_{t \to +\infty}(x(t), y(t)) = (2/3, 2/3)$

Exercice 4

On considère l'EDO suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{e^{-i\Gamma(t)}}{1+t^2} y(t), \\ \dot{y}(t) = \dfrac{e^{i\Gamma(t)}}{1+t^2} x(t), \end{cases} \tag{2}$$

où $\Gamma \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est une fonction fixée. Soient x_0, y_0 deux nombres complexes arbitraires. On souhaite montrer que ce système possède une solution (complexe) $(x(t), y(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$ telle que $x(t)$ et $y(t)$ possèdent les limites suivantes lorsque t tend vers $-\infty$:

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to -\infty} y(t) = y_0.$$

Pour ce faire, on considère l'espace fonctionnel

$$B = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^2) : \max_{i=1,2} \sup_{t \in \mathbf{R}} |u_i(t)| < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_B = \max_{i=1,2} \sup_{t \in \mathbf{R}} |u_i(t)|.$$

On rappelle (et ce sera admis ici) que B muni de la norme $\|.\|_B$ est un espace de Banach. On désigne par F l'opérateur défini, pour tout $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in B$, par l'équation suivante :

$$F[u](t) = \begin{pmatrix} x_0 - \int_{-\infty}^t \frac{e^{-i\Gamma(s)}}{1+s^2} u_2(s) ds \\ y_0 + \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\Gamma(s)}}{1+s^2} u_1(s) ds. \end{pmatrix}$$

1 Justifier la convergence des intégrales dans l'expression de $F[u]$, et que $F[u] \in B$.
2 En notant F^n le n^{ieme}-itéré de F, montrer que, pour tout $n \geq 0$ et tout $(u, v) \in B \times B$, on a

$$F^{n+1}[u]_1(t) - F^{n+1}[v]_1(t) = -\int_\infty^t \frac{e^{-i\Gamma(s)}}{1+s^2} \left(F^n[u]_2(s) - F^n[v]_2(s)\right) ds$$
$$F^{n+1}[u]_2(t) - F^{n+1}[v]_2(t) = +\int_\infty^t \frac{e^{+i\Gamma(s)}}{1+s^2} \left(F^n[u]_1(s) - F^n[v]_1(s)\right) ds$$

3 En déduire que pour tous $(u, v) \in B \times B$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$\|F^n[u](t) - F^n[v](t)\|_\infty \leq \varphi_n(t) \|u - v\|_B$$

où $\|.\|_\infty$ désigne la norme sup sur $\mathbf{C}^2$ et φ_n est définie par la récurrence :

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\varphi_n(s)}{1+s^2} ds, \quad \varphi_0(t) = 1.$$

4 Montrer que

$$\varphi_n(t) = \frac{(\arctan(t) + \pi/2)^n}{n!}$$

et en déduire qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\kappa := \sup_{t \in \mathbf{R}} |\varphi_N(t)| < 1$.
5 Montrer que F^N admet un point fixe u^*.
6 Montrer que u^* est aussi un point fixe de F et conclure.