UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles 2

Corrigé Examen

Exercice 1

On a

$$u(t) \leq f(t) + \int_0^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(v)dv}ds.$$

(En fait, ici la positivité de u et f n'est pas nécessaire, mais c'est comme ça que le lemme a été énoncé en cours, pour des raisons de temps < 0).

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy

$$y' + y^2 = \frac{y}{t} - \frac{1}{t^2}, \text{avec } y(1) = 2.$$

1/ D'un côté $y_0' + y_0^2 = -1/t^2 + 1/t^2 = 0$; de l'autre côté $y_0/t - 1/t^2 = 1/t^2 - 1/t^2 = 0$, qui est bien égal à la quantité précédente.

2/ C'est une équation de Ricatti, on fait donc le changement de variable $y = y_0 + u$, où u est la nouvelle inconnue. On tombe sur l'équation :

$$u' + u^2 + \frac{u}{t} = 0,\ u(1) = 1.$$

3/ On reconnaît une équation de Bernoulli : on divise par u^2, pour obtenir

$$-\frac{u'}{u^2} = 1 + \frac{1}{tu},$$

ce qui suggère le changement de variable $v = 1/u$, et l'équation devient alors

$$v' = 1 + \frac{1}{t}v,$$

qui est linéaire. Son équation homogène associée est $v' = v/t$, que l'on résout immédiatement en $v = \lambda t$. Par la méthode de la variation de la constante dans l'équation avec second membre, on trouve $\lambda(t) = \ln(t) + \lambda_1$, où λ_1 est une constante.

Trouvons d'abord λ_1 grâce à la condition initiale $y(1) = 2$, qui donne $u(1) = 1$ donc $v(1) = 1$ également, et $\lambda(1) = 1 = \lambda_1$. On a ainsi successivement

$$v(t) = (\ln(t) + 1)t,$$

$$u(t) = \frac{1}{(\ln(t) + 1)t},$$

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{(\ln(t) + 1)t}.$$

Le domaine de définition de la solution est ainsi $]e^{-1}, +\infty[$.

Exercice 3

On note A la matrice en question, et B le vecteur $(1,1)$. Elle est diagonalisable, de valeur propres $1,-1$, d'espaces propres $Vect(2,1)$ et $Vect(1,1)$. L'exponentielle s'écrit

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & 2e^{-t} - 2e^t \\ e^t - e^{-t} & 2e^{-t} - e^t \end{pmatrix}.$$

D'après Duhamel,

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B\, ds,$$

et comme le vecteur constant B est vecteur propre pour $e^{(t-s)A}$, de valeur propre e^{s-t}, on peut intégrer directement

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + (1 - e^{-t})B.$$

Exercice 4

On voit immédiatement que $g(X) = \|X\|^2$ est une fonction de Lyapunov , car $g(Y(t))$ est décroissante par hypothèse. Ainsi les solutions ne peuvent exploser en temps positif, et par le théorème d'explosion en temps fini, CQFD.

Problème

1/ On pose

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -b/\rho y - g/\rho \sin(x) + \omega^2 \sin(x)\cos(x) \end{pmatrix}.$$

2/ F est différentiable et donc localement lipschitzienne. Mais si on calcule la différentielle de F, on tombe sur

$$dF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\rho}\cos(x) + \omega^2\cos(2x) & -b/\rho \end{pmatrix},$$

qui a le bon goût d'être bornée indépendamment de (x,y). Donc par le théorème des accroissements finis, F est lipschitzienne, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité de la solution maximale du problème de Cauchy, et cette dernière est définie sur $\mathbb{R}$.

3/ On résout $F(x,y) = (0,0)$, on obtient

$$\begin{cases} y = 0 \\ (\cos(x) - \gamma)\sin(x) = 0 \end{cases}.$$

Si $\gamma > 1$, la deuxième équation a pour solution $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et si $\gamma < 1$, elle a en plus les solutions $x = \pm arccos(\gamma) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4/ $det(dF(0,\pi)) = -g/\rho - \omega^2 < 0$, donc les valeurs propres sont de signes opposés : l'une est positive, et donc l'équilibre $(\pi, 0)$ est instable (ainsi que tous les équilibre $(k\pi, 0)$ avec k impair).

5/ Si $\gamma < 1$, $det\, dF(0,0) = g/\rho - \omega^2 < 0$ et pour la même raison l'équilibre est instable. Si $\gamma > 1$, le déterminant est cette fois positif : soit les valeurs propres sont réelles de même signe, soit complexes conjuguées; dans tous les cas, le signe de leur partie réelle est celui de la trace, qui est négative. Le point d'équilibre est alors asymptotiquement stable.

6/ On fait le calcul en tenant compte de $\cos(2\theta) = 2\gamma^2 - 1$ si $\theta = \pm arccos(\gamma)$. On trouve

$$dF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2(\gamma^2 - 1) & -b \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est positif, a trace négative : les points $(\pm arccos(\gamma) + 2k\pi, 0)$ sont asymptotiquement stables.