Examen D04 S6 2007-2008
Lundi 14 Avril 2008, 8H-10H.
Durée : 2H.
Calculatrices non autorisées. Documents interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints.
Veuillez ne pas sortir avant la fin de la première heure.

Exercice 1.
Soit $n \geq 1$. On note e_n le plus petit entier tel que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma^{e_n} = 1$.
1. Calculez e_2 et e_3 en expliquant en une ou deux lignes votre calcul. Montrez de façon simple que e_n divise $n!$.
2. Soient p un nombre premier et α_p la partie entière de $\ln(n)/\ln(p)$, c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à $\ln(n)/\ln(p)$. Montrez qu'il existe un élément de S_n d'ordre p^{α_p}.
3. Soit $\sigma \in S_n$, soit d son ordre, et p un premier. Ecrivons $d = p^\beta q$ où q est premier à p et $\beta \geq 0$. Montrez que $\beta \leq \alpha_p$.
4. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrez que :

$$e_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\alpha_p}.$$

5. Calculez e_7.

Exercice 2.
1. Quel est le cardinal du groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$?
2. Quels sont les ordres respectifs de 2 et 14 dans G ?
3. Soit G' un groupe cyclique de cardinal $2k$, $k \geq 1$ un entier. Combien G' possède-t-il d'éléments d'ordre 2 ?
4. Le groupe G est-il cyclique ? Justifiez.

Exercice 3.
Soient $n, m \geq 2$ deux entiers, G un groupe fini de cardinal nm, H, K deux sous-groupes de cardinaux respectifs n et m. On suppose m premier à n.
1. Montrez que $H \cap K = \{e\}$.
2. Montrez que l'application :

$$\psi : H \times K \to G,$$
$$(h, k) \mapsto hk,$$

est injective, puis bijective.
3. On suppose dorénavant que H et K sont distingués dans G. Montrez que pour tout $(h, k) \in H \times K$, $hkh^{-1}k^{-1} = e$. En déduire que $hk = kh$.
4. Montrez qu'alors ψ est un morphisme, et que G est isomorphe à $H \times K$.

(Tournez la page svp)

Exercice 4.
Soit G un groupe de cardinal pq, où p est un nombre premier et q un nombre entier.
1. Soit X l'ensemble des éléments d'ordre p. Pour $(x, y) \in X^2$, on pose $x \sim y$ ssi x, y engendrent le même sous-groupe de G. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence sur X.
2. Montrez que la classe de $x \in X$ pour cette relation d'équivalence est l'ensemble $\langle x \rangle - \{e\}$. En déduire que le cardinal de X est divisible par $(p - 1)$.

Exercice 5.
Soit G un groupe fini de cardinal n, et k un nombre entier, $k \leq n$.
1. Soit X l'ensemble des parties de G de cardinal k. On pose, pour $E = \{x_1, .., x_k\} \in X$ et $g \in G$,
$$g.E = \{gx_1, .., gx_k\}.$$
Montrez que ceci définit une action de G sur X.
2. Soient $E \in X$ et $g \in Stab(E)$. Montrez que E est réunion de classes à gauche modulo $\langle g \rangle$, c'est à dire d'ensembles de la forme $\langle g \rangle y$, avec $y \in G$.
3. On suppose désormais que $pgcd(n, k) = 1$. En déduire que les stabilisateurs sont réduits à $\{e\}$.
4. Montrez que si $pgcd(n, k) = 1$, alors n divise le coefficient binomial C_n^k (indication : écrire l'équation aux classes pour l'action de G sur X).