

Examen D04 -Deuxième session- 2007-2008

Durée : 2H.

Calculatrices non autorisées. Documents interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints.

Veuillez ne pas sortir avant la fin de la première heure.

Exercice 1.

On note G le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})^*$.

1. Quels sont les éléments de G ? Quel est l'ordre de G ?
2. Montrez que tout élément x de G a pour ordre un diviseur de 16.
3. Calculez l'ordre dans G de la classe $\bar{3}$ de 3.

Exercice 2.

Soient les deux éléments du groupe symétrique S_6 ,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Donnez la décomposition en produit de cycles à support disjoints, l'ordre ainsi que la signature de τ et σ respectivement.
2. Déterminer les composés $\sigma^2\tau$ et $\tau\sigma$.
3. On considère le sous-groupe H de S_6 engendré par τ et σ . On a une action naturelle de H sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Montrez que cette action est transitive.
4. On note $\langle\sigma\rangle$ le sous-groupe engendré par σ . Montrez que $\langle\sigma\rangle$ est un sous-groupe distingué dans H .

Exercice 3.

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ trois entiers relatifs, on définit la matrice $M(x, y, z)$:

$$M(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculez l'inverse (pour la multiplication matricielle) de la matrice $M(x, y, z)$. Indication : chercher une matrice de la même forme.
2. Soit G l'ensemble des matrices $M(x, y, z)$, pour x, y, z variant dans \mathbb{Z} . Montrez que, muni de la multiplication matricielle, G est un sous-groupe du groupe $\mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$ des matrices inversibles à coefficients réels.
3. Soit H l'ensemble des matrices de la forme $M(x, y, 0)$, x, y entiers. Montrez que H est un sous-groupe de G .
4. Montrez que H est distingué dans G .
5. Déterminez explicitement le centre de G , c'est à dire le sous-groupe

$$Z(G) = \{u \in G : \forall g \in G, gu = ug\}.$$

Exercice 4.

Soit G un groupe à 51 éléments et X un ensemble à 50 éléments, sur lequel G agit.

1. Montrez que l'action de G n'est pas transitive.
2. On suppose l'action sans point fixes. Déterminez le nombre d'orbites.

Exercice 5.

Soit $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme surjectif entre deux groupes G_1 et G_2 . Soit H un sous-groupe de G_1 , qu'on suppose distingué dans G_1 .

1. Montrez que $\psi(H)$ est un sous-groupe distingué de G_2 .
2. Démontrez l'existence d'un morphisme de groupe surjectif de G_1/H sur $G_2/\psi(H)$.