CMA 2023-2024, Feuille de TD 5
Réduction dans les espaces euclidiens

Exercice 1 Soit A une matrice réelle telle que ${}^tA = -A$ - On dit que A est *antisymétrique*. Montrez qu'alors $exp(A)$ est une matrice orthogonale.

Exercice 2 Soit A la matrice symétrique réelle

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Dire sans calcul si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
(2) Quel est le rang de A ? En déduire les valeurs propres à partir de la seule donnée de la trace.
(3) Déterminer les espaces propres, si possible sans aucun calcul, à partir de la seule donnée de l'image et de son orthogonal.
(4) Déterminez une base orthonormale dans laquelle A est diagonale.
(5) On considère maintenant la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etablir une relation simple entre A et B, et en déduire de même ses valeurs propres, espaces propres et une base orthonormale de diagonalisation.

Exercice 3
(1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On note X le vecteur colonne de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Calculer ${}^tXAX$.
(2) Exprimer ${}^tXAX$ sous forme de produit scalaire.
(3) Montrer que si la matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. (Utilisez l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Exercice 4 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E.
(1) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est également stable par f.
(2) En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $(E_\lambda)^\perp$ est stable par f.

Exercice 5
(1) Donner l'exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel dont le spectre est vide.
(2) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle symétrique ? est-elle diagonalisable ?

Réduction des endomorphismes orthogonaux

Exercice 6 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice

$$A := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Dire sans calcul si A est-elle diagonalisable.
(2) Justifier sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

(3) Montrer que l'endomorphisme f est orthogonal. En déduire les valeurs propres possibles pour f.

(4) Déterminer à partir de la trace de f les multiplicités des valeurs propres de f dans le polynôme caractéristique de f sans calculer celui-ci. En déduire le polynôme caractéristique de f.

(5) Déterminer une base orthonormale de l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de f.

(6) Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 de f vérifie $E_{-1} = (E_1)^\perp$. En utilisant l'équation linéaire caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.

(7) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Exercice 7 Dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{can}})$, on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Vérifier que u est orthogonal.

(2) Calculer $\det u$ et en déduire sa nature géométrique.

(3) Montrer que u est une rotation dont on calculera l'axe et de cosinus de l'angle. *On pourra réduire la matrice A en une matrice diagonale par blocs.*

Matrices symétriques positives

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique. Montrez que A est définie positive si et seulement si $a + c > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

(1) Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.

(2) Montrer que le déterminant de A est strictement positif.

(3) Si $x_1, ...x_n$ sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$, notons H_i l'hyperplan d'équation $x_i = 0$. Notons M_i la sous-matrice de A où l'on a rayé la $i$ème ligne et la $i$ème colonne. Pour $X = (x_1, ..., x_n) \in H_i$, $Y = (x_1, .., \hat{x_i}, .., x_n)$ (où la notation chapeau signifie que le terme correspondant est omis), quel est le rapport entre ${}^tXAX$ et ${}^tYM_iY$? Montrez que les sous-matrices M_i sont symétriques et définies positives

(4) Montrer que les mineurs principaux de A (un mineur principal de A est le déterminant d'une sous-matrice obtenue en supprimant les lignes et colonnes de mêmes indices) sont tous strictement positifs.

Racine carrée

Exercice 10 Calculer le carré des matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Laquelle de ces matrices est la racine carrée de la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 11 Pour chacune des matrices symétriques suivantes de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer s'il s'agit d'une matrice positive, définie positive ou non positive, puis, dans les deux premiers cas, calculer la racine carrée de la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pourra noter les liens entre A et B, et entre B et C.