CMA 2023-2024, Feuille de TD 4
Exponentielle de matrices

Calcul d'exponentielles de matrices

Exercice 1 Soit les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^{A+B} et $e^A e^B$.

Exercice 2 Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente et calculer e^A.

Exercice 3 On note $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

(1) Calculez A^2, puis A^n pour $n \geq 3$.
(2) En déduire directement e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si les matrices A et B commutent alors les matrices A et $\exp(B)$ commutent également.

Système linéaire

Exercice 5 [Oscillateur harmonique] L'équation du mouvement d'une masse attachée à un ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ où $x(t)$ est la position à l'instant t par rapport au point d'équilibre et $\omega > 0$ est appelée pulsation. On considère alors le vecteur position vitesse

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que le vecteur $X(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ à préciser.
(2) Que vaut $\exp(tA)$?
(3) Résoudre l'équation $X'(t) = AX(t)$ avec conditions initiales $X(0) = (1, 0)$.
(4) Représenter en fonction du temps, la position d'une masse attachée à un ressort et lachée à l'instant $t = 0$ à l'abscisse $x = 1$ avec une vitesse initiale nulle.

Exercice 6

(1) Calculer e^{tA}, et résoudre $Y' = AY$ avec $Y(0) = Y_0$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Calculer e^{tA}, et résoudre $Y' = AY$ avec $Y(0) = Y_0$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 En pratique, si on souhaite décrire les solutions d'une équation linéaire $Y' = AY$ dans $\mathbb{R}^d$, $A \in \mathbf{M}_d(\mathbb{R})$, on peut se donner une base de solution de cette équation différentielle, ce qui évite d'avoir à inverser la matrice de passage vers la forme de Jordan et de faire trop de produits matriciels.

(1) Montrez que l'espace vectoriel E des solutions de $Y' = AY$ est de dimension d (la taille de la matrice carrée A), et si $(v_1, ..v_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$, alors si on pose $Y_i(t) = e^{tA} v_i$, $(Y_1, .., Y_d)$ forment une base de cet espace vectoriel. On appelle une telle base *un système fondamental de solutions*.

(2) Soit P une matrice de passage de la base canonique e_i vers une forme de Jordan J de A, càd

$$P^{-1}AP = J.$$

Montrez que si $(e_1, .., e_d)$ est la base canonique, le choix de $v_i = P(e_i)$ donne les solutions fondamentales

$$Y_i(t) = Pe^{tJ}(e_i).$$

(3) Donner un système fondamental de solutions pour l'équation $Y' = AY$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$