

CMA 2023-2024, Feuille de TD 3

Exercice 1

- (1) Donnez un exemple de matrice 3×3 dont le polynôme minimal est $(X-1)(X-2)(X-3)$.
- (2) Donnez un exemple de matrice 3×3 dont le polynôme minimal est $(X-1)(X-2)$.
- (3) Donnez un exemple de matrice 3×3 dont le polynôme minimal est X^2 .
- (4) Donnez un exemple de matrice 3×3 dont le polynôme minimal est $(X-1)(X-2)^2$.

APPLICATIONS

Exercice 2 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

- (1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (2) Calculer $(A - 2I_3)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- (3) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

- (1) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.
- (2) Déterminer une matrice $C \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^3 = D$.
- (3) En déduire une matrice $B \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 4 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
et $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$

- (1) Montrer que D est diagonalisable.
- (2) Déterminer les polynômes caractéristiques et les polynômes minimaux de A , B et C .
- (3) Parmi les matrices A , B et C , lesquelles sont diagonalisables et laquelle est semblable à D ?

RÉDUCTION DE JORDAN

Exercice 5 [Forme de Jordan]

Soit u un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$.

- (1) Quelles sont les valeurs possibles du rang de u ?
- (2) Supposons u de rang 1. Donner la forme de Jordan de u .
- (3) Supposons u de rang 2. Donner la forme de Jordan de u .

Exercice 6 Calculez les polynômes caractéristiques, minimaux et donnez une base réalisant

la forme de Jordan de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique de A et le polynôme minimal de A .
- (2) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (3) Déterminer les valeurs propres de A et ses vecteurs propres.

- (4) Montrer que la matrice $N = A - 2\text{Id}$ est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
- (5) Exprimer A^2 en fonction de N et de Id .
- (6) Déterminer le nombre de blocs de Jordan et la taille du plus grand bloc dans la décomposition de Jordan de A^2 . Donner la forme de Jordan de A^2 .

Exercice 8 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

de polynômes caractéristiques $\chi_A(X) = (X-3)(X-2)^2$, $\chi_B(X) = \chi_C(X) = (X-1)^3$, $\chi_D(X) = (X+3)^4$. Déterminez les polynômes minimaux, et la forme de Jordan.

Exercice 9 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

- (1) Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et en déduire la forme de Jordan de A .
- (2) On note J la forme de Jordan de A et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer J^n .
- (3) Déterminer une matrice inversible $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = J$.
- (4) Calculer A^n .
- (5) Retrouver le résultat précédent en utilisant la division euclidienne de X^n par χ_A .

POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 10 En utilisant les matrices, déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes, définies par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- (1) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$,
- (2) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$,
- (3) $u_{n+2} = -u_n$.

Exercice 11 Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n sur un corps k est dit *cyclique* si il existe un vecteur $v \in E$ tel que $(v, f(v), \dots, f^{(n-1)}(v))$ est une base de E .

- (1) Donnez un exemple d'endomorphisme cyclique en dimension 2, puis 3.
- (2) Donnez un exemple d'endomorphisme non cyclique.
- (3) Montrez que si f est cyclique, alors son idéal annulateur ne contient aucun polynôme de degré $< n$ autre que le polynôme nul.
- (4) En déduire que si un endomorphisme est cyclique, alors son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique. *Note : la réciproque est également vraie (mais pas demandée ici) : si le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, alors l'endomorphisme est cyclique.*
- (5) Soit f cyclique avec $\mathcal{B} = (v, f(v), \dots, f^{(n-1)}(v))$ une base de E . Notons $-a_0, \dots, -a_{n-1}$ les coefficients de $f^n(v)$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire $f^n(v) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v)$. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, et rappelez son nom.
- (6) Réciproquement, montrez qu'une matrice de ce type est toujours cyclique.