CMA 2023-2024, Feuille de TD 2

Espaces euclidiens

Exercice 1 Soit $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace euclidien, et f, g deux endomorphismes autoadjoints.

(1) Démontrez que $Im(f) \oplus^{\perp} Ker(f) = E$.

(2) Démontrez que $f \circ g$ est autoadjoint si et seulement si f et g commutent.

Exercice 2 Soit M une matrice $n * n$, vue comme endomorphisme de l'espace des vecteurs colonnes $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel. Montrez que :

(1) $Ker({}^tMM) = Ker(M)$.

(2) $Im({}^tMM) = Ker(M)^{\perp}$.

Diagonalisabilité, trigonalisabilité

Exercice 3

(1) Expliquer sans calcul qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est diagonalisable dans un corps $\mathbb{K}$ si et seulement si $(u + \mathbf{Id}_E)$ l'est.

(2) Expliquer sans calcul si la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Exercice 4 *On pourra utiliser que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une même matrice ont les mêmes facteurs irréductibles.*

Soit M une matrice $n \times n$ à coefficients dans dans un corps $\mathbb{K}$. On dit que M est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $n \times n$ triangulaire T à coefficients dans $\mathbb{K}$ et une matrice $n \times n$ inversible P à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $M = PTP^{-1}$. En termes d'endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ceci revient à l'existence d'une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est triangulaire.

(1) Soit M et P deux matrices $n \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. On suppose P inversible. Calculer $\det(PMP^{-1})$ en fonction de $\det M$.

(2) Si M est trigonalisable, le polynôme caractéristique de M est-il scindé dans $\mathbb{K}$? le polynôme minimal de M est-il scindé dans $\mathbb{K}$?

(3) Si M est diagonalisable, le polynôme caractéristique de M est-il à racine simples dans $\mathbb{K}$? le polynôme minimal de M est-il à racine simples dans $\mathbb{K}$?

Exercice 5 *On verra en cours qu'un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable sur le corps $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$.*

(1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ comme produits de facteurs irréductibles.

(2) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$? et dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$?

(3) La matrice M est-elle trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$? et dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 6 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$.

(1) Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la A.

(2) En déduire sans calcul le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

(3) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 *On pourra utiliser que si la restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable n'est pas diagonalisable, alors l'endomorphisme initial ne l'est pas.*

Pour chacune des matrices suivantes de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ déterminer si elle est diagonalisable, et si oui, calculer les vecteurs propres et la diagonaliser:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calcul de polynômes minimaux

Exercice 8 Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

On a $\chi_A = -(X+1)(X+2)(X-3)$, $\chi_B = (X-1)(X+2)^2$ et $\chi_C = (X-1)^3$.

(1) Déterminer les polynômes minimaux de A, B et C.

(2) Pour chacune des matrices A, B et C, déterminer si elle est diagonalisable ou non.

Exercice 9 Déterminer le polynôme minimal des matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 10

(1) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Si $c \neq 1$, calculer $(M - \mathbf{Id}_3)(M - c\mathbf{Id}_3)$. En déduire le polynôme minimal de M en fonction de a, b et c. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

(2) Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?