

L3 CMA, TD 1 : Espaces euclidiens

Exercice 1 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

(1) Montrer l'identité du parallélogramme: pour tous $v, w \in E$, $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

(2) Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille orthogonale de E . Montrer que $\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$.

Exercice 2 Montrer que pour tout n -uplet $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de nombres réels

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right).$$

Pensez à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3 Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien, et $\mathcal{B}'$ une autre base. Montrez que $\mathcal{B}'$ est également orthonormée si et seulement si la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ vérifie ${}^t P P = I_n$.

Exercice 4 Déterminer l'orthogonal

- (1) du vecteur $(1, 1, 1)$ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$,
- (2) de l'hyperplan d'équation $x + 2y - z + t = 0$ dans $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$,
- (3) du sous-espace vectoriel engendré par $(1, 1, 0)$ et $(-1, 2, 1)$ dans $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$.

Exercice 5 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soient A et B deux sous-ensembles de E .

- (1) Montrer que $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ (où $\text{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de A).
- (2) Montrer que $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
- (3) Montrer que $(A^\perp)^\perp = \text{Vect}(A)$.

Exercice 6 On considère l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) & \mapsto & x_1 x_2 + 2y_1 y_2 + 3z_1 z_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{array}$$

- (1) Est-ce un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
- (2) Si oui, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthonormale pour ce produit scalaire ?
- (3) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 7 Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux familles libres

- (1) $\{(1, 1), (2, 3)\}$ de $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$,
- (2) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$,
- (3) $\{(1, 2, 1), (-1, 0, -1)\}$ de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$, puis, pour ce cas, compléter la famille orthonormale obtenue en une base orthonormale de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$,
- (4) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$, puis, pour ce cas, donner la décomposition QR de la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées, dans l'ordre, par les

vecteurs $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 0)$ soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

On considère $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$.

- (1) Si v_1, v_2 sont deux vecteurs colonnes orthogonaux et normés, et B la matrice de taille $n \times 2$, $B = [v_1 \ v_2]$, montrez que $B^t B$ est la matrice de projection sur le plan $\text{Vect}(v_1, v_2)$.
Indication : si X est un vecteur-colonne, on pourra interpréter les coefficients de ${}^t B X$ puis ceux de $B^t B X$.
- (2) Écrire la matrice A dans la base canonique de la projection orthogonale p sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$. (On pourra déterminer une base orthonormale (v_1, v_2) de P .)
- (3) Est-ce une matrice orthogonale (i.e ${}^t A A = I_3$) ? symétrique (i.e ${}^t A = A$) ?

Exercice 9 Montrez qu'un endomorphisme p est une projection orthogonale si et seulement si p vérifie

$$\begin{cases} p^2 = p \\ p^* = p. \end{cases}$$

Exercice 10 Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q \rangle := \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

- (1) Vérifier que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle \end{matrix}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- (2) Écrire la matrice de ce produit scalaire dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (3) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- (4) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ce produit scalaire en termes d'intégrales.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale de $M_2(\mathbb{R})$.

- (1) Écrire les équations en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ caractérisant l'orthogonalité de A .
- (2) En déduire la forme générale des matrices orthogonales de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12 Déterminer si les matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$ sont orthogonales :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

- (1) La matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?
- (2) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z & = 3 \\ 2x + 2y - z & = 6 \\ -x + 2y + 2z & = 9 \end{cases}$$

Exercice 14 Déterminer la décomposition QR des matrices inversibles suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$