CMA 2023-2024, Contrôle continu 3
21 Décembre 2023. CORRIGÉ

Exercice 1 Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$. Redémontrez le résultat de cours suivant :
Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par f, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint f^*.
Solution: Soit $x \in F^\perp$, on veut montrer que $f^*(x) \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Alors

$$\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = 0$$

car $f(y) \in F$ par f-stabilité de F, et $x \in F^\perp$. D'où le résultat.

Exercice 2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) A est-elle diagonalisable ?
(2) Donnez sa forme de Jordan. *On ne demande pas la matrice de changement de base.*
(3) Donnez sa décomposition de Dunford.

Solution: 1) A est triangulaire donc ses valeurs propres sont $1, 4, 6$. La matrice ayant 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable
2) Sa forme de Jordan est ainsi

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3) $A = A + 0$ est la décomposition de dunford, car A diagonalisable, la matrice nulle est nilpotente et les deux commutent.

Exercice 3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculez son polynôme caractéristique. *Indication : le résultat final est très simple*
(2) Déterminez les valeurs propres et les sous-espaces propres.
(3) Quelle est la forme de Jordan J de A ? Justifiez.
(4) Soit une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle l'endomorphisme associé à A est représenté par J, quelles relations lient Av_1, Av_2 et Av_3 à v_1, v_2 et v_3 ?
(5) Déterminez une matrice P de changement de base pour laquelle pour laquelle $A = PJP^{-1}$

Solution: 1) $\chi_A(X) = X^2(X-1)$.
2) Les deux valeurs propres sont 0 et 1. On a

$$E_0(A) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

3) Comme 0 est valeur propre double mais que $dim E_0(A) = 1$, il y a nécessairement un bloc de Jordan de taille 2 associé au sous-espace caractéristique de la valeur propre 0. Ainsi

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{cases} Av_1 = v_1 \\ Av_2 = 0 \\ Av_3 = v_2 \end{cases}$$

5) Posons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et cherchons v_3 tel que $Av_3 = v_2$. $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient, on prend donc pour P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien inversible.

Exercice 4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

(1) Dire sans calcul si la matrice A est diagonalisable.
(2) Calculez ${}^tAA$. Que pouvez vous-dire de la matrice $B = A/9$?
(3) Déterminez une équation du sous-espace vectoriel $Ker(A + 9I)$.
(4) Déduisez en le spectre de A, et les différents sous-espace propres.

Solution: 1) A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, diagonalise en base orthonormée. sur $\mathbb{R}$.
2) On calcule ${}^tAA = 81I_3$. Donc $B/9$ est orthogonale.
3) On obtient le plan $4x + y + z = 0$.
4) -9 est valeur propre au moins double. Pour déterminer la 3ème valeur propre, on remarque que $\lambda + (-9) + (-9) = tr(A) = 7 - 8 - 8$ donc $\lambda = 9$. Ainsi le spectre est $\{9, -9\}$,

$$E_9(X) = E_{-9}^{\perp} = Vect \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On admet la décomposition $A = PJP^{-1}$ où

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que pour tout i, $Y_i(t) := Pe^{tJ}e_i$ est une solution de $Y' = AY$ et $Y(0) = Pe_i$.

2) En déduire le triplet $(x(t), y(t), y(t))$ de fonctions tel que $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 3)$ et $x' = 2x, y' = x + 2y - z, z' = 2z$.

Solution: 1) Dérivons:$Y_i'(t) = PJe^{tJ}e_i = PJP^{-1}Y_i(t) = AY_i(t)$. La valeur en 0 est Pe_i.
2) Résolvons tout d'abord l'équation $xPe_1 + yPe_2 + zPe_3 = (1, 2, 3)$. Elle se réécrit

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

et donc $(1,2,3) = 3Pe_1 - Pe_2 - 2Pe_3$. Calculons e^{tJ}. On a $J = 2I + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commute à $2I$. Donc $e^{tJ} = e^{2tI_3} e^{tN}$, avec $e^{tN} = I + tN$. Ainsi

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Posons $Y(t) = 3Y_1(t) - Y_2(t) - 2Y_3(t)$. On a

$$Y(t) = 3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution est

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = (2-2t)e^{2t} \\ z(t) = 3e^{2t} \end{cases}$$