CMA 2023-2024, Contrôle continu 3
21 Décembre 2023. Durée : 1H30

Exercice 1 **[2pts]** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$. Redémontrez le résultat de cours suivant :
Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par f, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint f^*.

Exercice 2 **[3pts]** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) A est-elle diagonalisable ?
(2) Donnez sa forme de Jordan. *On ne demande pas la matrice de changement de base.*
(3) Donnez sa décomposition de Dunford.

Exercice 3 **[6pts]** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculez son polynôme caractéristique. *Indication : le résultat final est très simple*
(2) Déterminez les valeurs propres et les sous-espaces propres.
(3) Quelle est la forme de Jordan J de A ? Justifiez.
(4) Soit une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle l'endomorphisme associé à A est représenté par J, quelles relations lient Av_1, Av_2 et Av_3 à v_1, v_2 et v_3 ?
(5) Déterminez une matrice P de changement de base pour laquelle pour laquelle $A = PJP^{-1}$

Exercice 4 **[5pts]** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

(1) Dire sans calcul si la matrice A est diagonalisable.
(2) Calculez ${}^tAA$. Que pouvez vous-dire de la matrice $B = A/9$?
(3) Déterminez une équation du sous-espace vectoriel $Ker(A + 9I)$.
(4) Déduisez en le spectre de A, et les différents sous-espace propres.

Exercice 5 **[4pts]**
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On admet la décomposition $A = PJP^{-1}$ où

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que pour tout i, $Y_i(t) := Pe^{tJ}e_i$ est une solution de $Y' = AY$ et $Y(0) = Pe_i$.

2) En déduire le triplet $(x(t), y(t), y(t))$ de fonctions tel que $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 3)$ et $x' = 2x, y' = x + 2y - z, z' = 2z$.