CMA 2025-2026, Contrôle continu 2
19 Novembre 2025. Durée : 1H

Exercice 1 Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, puis donnez une preuve ou un contre-exemple : *un endomorpisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé simple.*

Exercice 2 Donnez un exemple de matrice M dont les polynômes caractéristique et minimal χ_M et μ_M sont respectivement

$$\chi_M(X) = X^2(X-1)^2(X-2)^3,$$
$$\mu_M(X) = X(X-1)^2(X-2)^2.$$

Exercice 3 Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrez que N est nilpotente, et calculer son indice de nilpotence.
(2) Déterminez, pour un paramètre t réel, les coefficients de la matrice $\exp(tN)$.

Exercice 4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de A.
(2) Déterminez le polynôme minimal de A.
(3) La matrice A est-elle diagonalisable ?
(4) Déterminez la forme de Jordan de A.
(5) Donnez une base de Jordan de A.

Exercice 5 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $k \geq 2$ un entier.

(1) Montrez que f est inversible si et seulement si le polynôme minimal de f^k n'a pas zéro comme racine.
(2) Soit $P = X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Montrez que $P(X^k)$ est scindé à racines simples.
(3) Soit P un polynôme annulateur pour l'endomorphisme f^k, montrez que $Q(X) = P(X^k)$ est annulateur pour f.
(4) En déduire que si f est inversible et qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que f^k est diagonalisable. alors f est diagonalisable