CMA
Année 2025–2026

Corrigé du CC 2

Exercice 1

2 points. L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est donné par la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 02 & \end{pmatrix}$$

qui est diagonale (donc a fortiori diagonalisable) de polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$$

scndé, non simple puisque 1 est une valeur propre double.

Exercice 2

2 points.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

(1) *2 points.* Le calcul donne:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'indice 3.

(2) *2 points.* Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2t^2 & 2(1+t^2) \\ t+\frac{t^2}{2} & -2t-t^2 & 3t+t^2 \\ t & -2t & 2t \end{pmatrix}$$

Exercice 4

(1) *2 points.*

$$\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$$

(2) *2 points.* $(A-I)(A+I) \neq 0$ donc

$$\mu_A(X) = \chi_A(X) = (X-1)^2(X+1).$$

(3) *2 points.* μ_A admet une racien double, donc A n'est pas diagonalisable.

(4) *2 points.*

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(5) *2 points.* Soit (u_1, u_2, u_3) une base qui transforme A en sa forme de Jordan. On a

$$AX = X \iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 e_1, \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

donc

$$\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Vect}\{e_1\}.$$

On peut choisir $u_1 = e_1$.

$$(A-I)X = e_1 \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

On choisit $x_1 = 0$ et alors $u_2 = e_3$.

$$AX = -X \iff X = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, =: x_2 u_3. \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Finalement:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

(1) *2 points.* $\Rightarrow$ Si f est inversible alors f^k est inversible d'inverse $(f^{-1})^k$ donc 0 n'est pas valeur propre de f^k, i.e. n'est pas racine de χ_{f^lk}. Comme μ_{f^k} divise χ_{f^k}, 0 n'est pas racine de μ_{f^k}.

$\Leftarrow$ Inversement si $\mu_{f^k}(0) \neq 0$, alors 0 n'est pas valeur propre de f^k, donc f^k est inversible. Si $f(x) = 0$ avec $x \neq 0$ alors $f^k(x) = 0$, ce qui contredit f^k inversible. Donc f est injective, i.e. inversible car f est un endomorphisme.

(2) *2 points.* Soit $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$. Les racines de $P(X^k)$ sont les nombres:

$$|\lambda|^{\frac{1}{k}} e^{i\frac{\theta}{k}} e^{2i\pi\frac{p}{k}}, \quad p = 0, \cdots k-1$$

qui sont distincts.

(3) *1 point.* On a:

$$Q(f) = P(f^k) = 0.$$

(4) *2 points.* Soit f inversible avec f^k diagonalisable. Alors μ_{f^k} est scindé simple, soit par exemple:

$$\mu_{f^k}(X) = \Pi_{i=1}^{r}(X - \lambda_i), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \forall i \neq j.$$

De plus:

$$\mu_{f^k}(f^k) = 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} \mu_{f^k}(X^k) \quad \text{annule } f$$

donc μ_f divise $\mu_{f^k}(X^k)$. De plus:

$$\mu_{f^k}(X^k) = \Pi_{i=1}^{r}(X^k - \lambda_i) = \Pi_{i=1}^{r}\Pi_{j=0}^{k-1}(X - \lambda_i^{(j)})$$

où $\lambda_i^{(j)}$, $j = 0, \cdots k-1$, sont les racines $k$ièmes de λ_i, $i = 1, \cdots, r$. Si $\lambda_i^{(j)} = \lambda_\ell^{(m)}$ avec $i \neq \ell$, alors

$$\lambda_i^{(j)k} = \lambda_\ell^{(m)k} \iff \lambda_j = \lambda_\ell \iff i = \ell.$$

Contradiction. Donc $\mu_{f^k}(X^k)$ est scindé simple, ainsi que μ_f. Donc f est diagonalisable.