CMA 2023-2024, Contrôle continu 1 (corrigé)
11 Octobre 2023. Durée : 1H

Exercice 1 Démontrez l'identité du parallélogramme : dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, pour tout couple de vecteurs (u, v) , on a

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Réponse : Par bilinéarité, on trouve

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle \\ \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle \\ \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.\end{aligned}$$

La somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est donc égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

Exercice 2 Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien, f^* son adjoint. Redémontrez le résultats de cours suivant :

$$\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(f)^\perp.$$

Réponse : Notons $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace euclidien. Soit v un vecteur de E .

$$\begin{aligned}v \in \text{Im}(f)^\perp &\iff \forall x \in E, \langle v, f(x) \rangle = 0 \\ &\iff \forall x \in E, \langle f^*(v), x \rangle = 0 \\ &\iff f^*(v) = 0.\end{aligned}$$

On a utilisé la définition de l'adjoint à l'avant dernière ligne. La dernière équivalence résulte du caractère défini du produit scalaire :

$$(\forall x \in E, \langle f^*(v), x \rangle = 0) \implies \langle f^*(v), f^*(v) \rangle = 0 \implies f^*(v) = 0.$$

Exercice 3 On considère l'espace euclidien $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$. Soit a un réel, et soient deux vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Déterminez en fonction du paramètre a , la dimension de l'orthogonal à l'espace engendré par ces deux vecteurs.

Réponse : Si $a = 3$, les vecteurs v_1 et v_2 sont colinéaires et donc $\text{Vect}(v_1, v_2)^\perp = \text{Vect}(v_1)^\perp$ est de dimension $\dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Vect}(v_1) = 4 - 1 = 3$.

Sinon, le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 3$ est non nul. Les vecteurs v_1 et v_2 sont donc indépendants.

Par conséquent, $\dim \text{Vect}(v_1, v_2)^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Vect}(v_1, v_2) = 4 - 2 = 2$.

Exercice 4 Dans $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{standard})$, soit H le sous-espace vectoriel des vecteurs $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

satisfaisant

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Déterminez une base orthonormée de H .

(2) Déterminez la projection orthogonale sur H du vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse : (1) Soit $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$M \in H \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Ce système est échelonné (i.e. triangulaire) et réduit (i.e. les coefficients au dessus des pivots sont nuls). L'espace H est donc défini par deux équations indépendantes : il est de dimension

$4 - 2 = 2$. En utilisant les variables libres x_2 et x_4 , on trouve que les vecteurs $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en forment une base orthonormale.

(2) D'après le cours, puisque (h_1, h_2) est une base orthonormale du sous-espace vectoriel H , le projeté orthogonal de v sur H est

$$p_H(v) = \langle v, h_1 \rangle h_1 + \langle v, h_2 \rangle h_2 = \sqrt{2} h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie les équations de H et que $v - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à h_1 et à h_2 donc à H .

Exercice 5 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Soient v_1, v_2, v_3 les trois vecteurs colonnes de A . Appliquez le procédé de Gram-Schmidt à ces trois colonnes.

(2) Déterminez la décomposition QR de A .

Réponse : En développant suivant la dernière colonne, on vérifie que $\det(A) = 1$. La matrice inversible A admet donc une forme QR .

On pose $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_1$. On retiendra $v_1 = b_1$.

On pose $b'_2 = v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle b_1 = v_2 - b_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ de norme 1. On pose donc $b_2 = b'_2$. On retiendra $v_2 = b_2 + b_1$.

On pose $b'_3 = v_3 - \langle v_3, b_1 \rangle b_1 - \langle v_3, b_2 \rangle b_2 = v_3 - b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ norme 1. On pose donc $b_3 = b'_3$. On retiendra $v_3 = b_3 + b_2 + b_1$. La matrice Q est la matrice orthogonale $P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{B}}$ des coordonnées de la nouvelle base orthonormale $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ dans la base canonique (orthonormale)

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et la matrice R est la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}}$ des coordonnées des vecteurs de la base initiale $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la nouvelle base (b_1, b_2, b_3) . Avec les identités retenues

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $QR = A$.