CMA 2023-2024, Contrôle continu 2
22 Novembre 2023. Durée : 1H

Exercice 1 [3pt] Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, et u, v deux vecteurs de E.
Exprimez $\|u+2v\|^2 + \|2u-v\|^2$ en fonction de $\|u\|$ et $\|v\|$.

♣ *Réponse: En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, il vient*

$$\begin{aligned}\|u+2v\|^2 &= \langle u+2v, u+2v\rangle = \langle u, u+2v\rangle + 2\langle v, u+2v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle + 4\langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 4\|v\|^2 + 4\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

En appliquant cette identité à la paire $(-v, u)$ en lieu et place de (u, v), on obtient

$$\|-v+2u\|^2 = \|v\|^2 + 4\|u\|^2 - 4\langle v,u\rangle$$

Donc $\|u+2v\|^2 + \|2u-v\|^2 = 5\|u\|^2 + 5\|v\|^2$

Exercice 2 [3pt] Donnez un exemple de matrice A dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (X-1)X^2$ et le polynôme minimal $\mu_A(X) = X(X-1)$.

♣ *Réponse: A est nécessairement diagonalisable de valeurs propres 0 avec multiplicité 2, et 1 avec multiplicité 1. A=diag(0,0,1) convient bien car* $\chi_A(X) = (X-1)X^2$, *et* $A(A-1) = diag(0,0,1) \times diag(-1,-1,0) = 0$.

Exercice 3 Soit $t \in \mathbb{C}$ un paramètre et

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2+2t \\ -1 & 1+t \end{pmatrix}$$

(1) **[2pt]** Calculez, en fonction du paramètre t, le polynôme caractéristique de M. Pour quelles valeurs de t il y a-t-il deux valeurs propres distinctes ?

(2) **[2pt]** Donner, en fonction de t, la forme de Jordan de M.

♣ *Réponse: On trouve* $\chi_M(X) = X^2 - (t-1)X = X(X-t+1)$.
Si $t \neq 1$, *il y a deux valeurs propres distinctes et* M *est diagonalisable de forme de Jordan* $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$.
Si $t = 1$, *la forme de Jordan de* M *est soit* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *soit* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Comme* $M \neq 0$, *elle vaut* J.

Exercice 4 Soit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) **[2pt]** Montrez que $N = M + 2I_4$ est nilpotente et déterminez son indice de nilpotence.

(2) **[2pt]** En déduire sans calcul le polynôme minimal de M.

(3) **[2pt]** En déduire le polynôme caractéristique de M.

(4) **[2pt]** Déterminez la forme de Jordan de M.

♣ *Réponse: (1) On trouve* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$. *l'indice de nilpotence est 3.*

(2) $(X+2)^3$ *est un polynôme annulateur de* M*; le polynôme minimal est un de ses diviseurs, c'est donc nécessairement* $(X+2)^3$, *car* $(M+2)^2 \neq 0$.

(3) Comme χ_M *a les mêmes facteurs irréductibles que* μ_M *et est d'ordre 4,* $\chi_M(X) = (X+2)^4$.

(4) Comme il y a un bloc de Jordan de taille 3, la forme de Jordan est nécessairement $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 [2pt] Soit A une matrice carrée. Démontrez ou donnez un contre-exemple à l'affirmation suivante : Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.

♣ *Réponse: Si A se diagonalise sous la forme* $A = PDP^{-1}$ *alors* $A^2 = PD^2P^{-1}$ *est donc diagonalisable.*

Question bonus **[2pt]**. Même question avec : si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

♣ *Réponse: La matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable,* A^2 *l'est. L'assertion est donc fausse.*