UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles 2

Contrôle continu

Durée 2H. Documents et calculatrices interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints. Précisez bien votre groupe (math recherche ou magistère) sur votre copie.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes

1

$$y'' - 6y' + 5y = 25t,$$

2

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} Y, \text{ avec } Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

3

$$y' + 3t^2 y = e^{-t^3},\ y(0) = 2.$$

4

$$y' = y^2 + ty,\ y(0) = 1.$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle dite de *Van der Pol*:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(x^2 - 1)y, \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ est une constante strictement positive.

1 Appliquez les résultats du cours pour discuter de l'existence et/ou de l'unicité d'éventuelles solutions maximales de cette équation, satisfaisant des conditions initiales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, ainsi que de leur intervalle de définition I.

2 Déterminez les éventuelles solutions stationnaires (càd constantes) de cette équation.

3 Soit dorénavant $(x(t), y(t))$ une solution maximale, d'intervalle de définition $I =]T^-, T^+[$. Posons $r(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Montrez que r vérifie

$$\dot{r} \leq 2\varepsilon r.$$

4 En déduire que $T^+ = +\infty$.

Problème *La cycloïde comme courbe tautochrone*

1 Résoudre le problème de Cauchy (trouvez les solutions maximales) d'inconnue u et de variable de temps $t > 0$

$$\begin{cases} u' = -\frac{1+u^2}{2tu} \\ u(1) = u_0 < 0 \end{cases} \tag{1}$$

On précisera bien le domaine de définition de la solution.

2 Soit $k :]0, 2[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3, strictement décroissante, telle que $k(1) = 0$ et prolongeable par continuité en 0: $k(0) = \lim_{y \to 0^+} k(y) < +\infty$. Montrez la convergence de l'intégrale à priori impropre

$$\int_0^1 \sqrt{1 + k'(u)^2} du.$$

3 On considère une rampe d'équation (inversée) $x = k(y)$ et une bille posée sur cette rampe, immobile

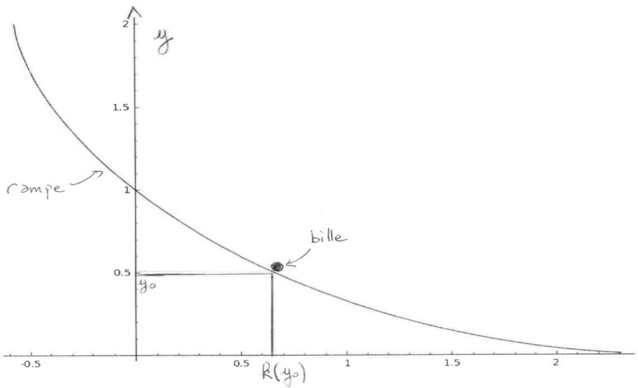

Figure 1: La rampe

au temps $t_0 = 0$, au point $(k(y_0), y_0)$ avec $y_0 \in]0, 1[$. Voir figure. Elle va rouler sur cette rampe avec des coordonnées $(k(y(t)), y(t))$, et sa hauteur y va vérifier l'équation (obtenue par application du principe fondamental de la dynamique) :

$$\begin{cases} \ddot{y}(1 + k'(y)^2) + \dot{y}^2 k'(y)k''(y) + g = 0, \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $g > 0$ est une constante physique positive. Discutez de l'existence et de l'unicité d'une éventuelle solution maximale sur un intervalle de temps de la forme $[0, T_{y_0}[$.

4 Montrez que la solution de (2) vérifie que $y(t) < y_0$ pour $t > 0$ assez proche de 0 (On pourra faire un développement limité).

5 Montrez que l'énergie, définie par

$$E(t) := m\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2(1 + k'(y)^2) + gy\right),$$

où $m > 0$ est la masse de la bille, est constante au cours du temps.

6 En déduire que y vérifie également l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{y}^2(1 + k'(y)^2) = 2g(y_0 - y), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

7 Montrez qu'il y a au moins une solution de l'équation (3) qui n'est pas solution de l'équation (2). Expliquez pourquoi ce phénomène est possible .

8 Montrez que la solution de (2) vérifie $\dot{y}(t) < 0$ pour tout $t > 0$ (la bille descend !), puis que $\lim_{t \to T_{y_0}^-} y(t) = 0$ (la bille descend en bas de la rampe).

9 Montrez que l'équation (3) a une seule solution satisfaisant $y(t) < y_0$ pour $t > 0$ et proche de 0. Montrez que cette dernière vérifie pour tout $t \in [0, T_{y_0}[$

$$\int_{y(t)}^{y_0} \sqrt{\frac{1 + k'(u)^2}{2g(y_0 - u)}}\, du = t.$$

10 Montrez que l'on peut exprimer

$$T_{y_0} = \int_0^1 \sqrt{\frac{y_0(1 + k'(y_0 z)^2)}{2g(1 - z)}}\, dz.$$

On montrera par ailleurs que cette intégrale est toujours finie (la bille finit par arriver en bas de la rampe en temps fini).

11 Soit $\epsilon > 0$, $\epsilon < 1/2$, on définit

$$T_\epsilon(y_0) := \int_\epsilon^{1-\epsilon} \sqrt{\frac{y_0(1 + k'(y_0 z)^2)}{2g(1-z)}} dz.$$

Démontrez que si k' est solution de l'équation (1) avec $u_0 = k'(1)$, alors

$$\frac{\partial T_\epsilon}{\partial y_0} = 0.$$

12 En déduire l'expression paramétrique $\{(k(y), y) \,:\, y \in]0, 2[\}$ d'une rampe tautochrone, c'est à dire pour laquelle toute bille lâchée sur la rampe à vitesse nulle arrive en bas de la rampe en un temps indépendant de sa position initiale y_0. On n'oubliera pas de montrer que la rampe est finie, càd k se prolonge par continuité en 0^+. *On pourra prendre* $u_0 = -1$. *L'équation trouvée est celle d'une cycloïde.*