UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles 2

Corrigé du Contrôle continu

Exercice 1

1 L'équation
$$y'' - 6y' + 5y = 25t,$$
a pour polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 5$, de discriminant 16 et de racines 1 et 5. Cherchons une solution particulière polynomiale de degré 1 de la forme $y(t) = \alpha t + \beta$, on trouve $\alpha = 5$ et $\beta = 6$. Donc
$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{5t} + 5t + 6,$$
pour des paramètres (λ, μ) réels.

2 Notons
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Son polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 2$, de discriminant 1 et de racines 1 et 2. Cherchons des vecteurs propres, on trouve
$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On pose donc la matrice de passage
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$
et alors
$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$
et donc
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$
En développant le produit de matrices, on obtient la solution de l'EDO initiale
$$Y(t) = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 3e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

3
$$y' + 3t^2 y = e^{-t^3},\ y(0) = 2.$$
L'équation homogène associée a pour solutions $y(t) = \lambda e^{-t^3}$, pour λ un réel. Par la méthode de la variation de la constante, on trouve
$$y(t) = (t + \lambda)e^{-t^3},$$
et la condition initiale impose $\lambda = 2$, la solution est donc
$$y(t) = (t + 2)e^{-t^3}.$$

4
$$y' = y^2 + ty,\ y(0) = 1.$$
On procède au changement de variable $z = 1/y$, valable si y ne s'annule pas. L'équation se traduit alors par
$$z' + tz + 1 = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent $z = \lambda e^{-t^2/2}$. Par variation de la constante, on trouve la solution particulière

$$z = e^{-t^2/2}\left(\lambda - \int_0^t e^{s^2/2} ds\right).$$

La condition initiale $y(0) = 1$ impose $z(0) = 1$ et donc $\lambda = 1$. On a donc

$$y(t) = \frac{e^{t^2/2}}{1 - \int_0^t e^{s^2/2} ds}.$$

De fait, cette solution y ne s'annule pas, et est définie sur $]-\infty, t_0[$ où t_0 est caractérisé par $\int_0^{t_0} e^{s^2/2} ds = 1$, sa limite en ce point étant infinie. Cette solution est donc maximale. Comme les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites, on a unicité de la solution maximale, et donc la solution de l'équation initiale est bien la fonction ci-dessus sur l''intervalle $]-\infty, t_0[$.

Exercice 2

1 L'équation est autonome, sous la forme $\dot{Z} = F(Z)$, avec

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - \varepsilon(x^2 - 1)y \end{pmatrix},$$

qui est une fonction polynomiale donc de classe C^∞, donc localement Lipschitzienne. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité de la solution maximale au problème de Cauchy, définie sur un intervalle I ouvert contenant 0.

2 On cherche à résoudre $F(x, y) = 0$. On obtient $y = 0$ et donc $x = 0$ également. L'origine est la seule solution stationnaire.

3 On calcule

$$\dot{r}(t) = -2\epsilon y^2(x^2 - 1) = -2\epsilon x^2 y^2 + 2\epsilon y^2.$$

Comme $\epsilon > 0$, on a

$$\dot{r}(t) \leq 2\epsilon y^2 \leq 2\epsilon r.$$

4 En intégrant, pour $t >$, on a

$$r(t) - r(0) \leq \int_0^t 2\epsilon r(s) ds,$$

et par l'inégalité de Gronwall, on obtient pour tout temps $t \in]0, T^+[$,

$$r(t) \leq r(0) e^{2\epsilon t}.$$

Si $T^+ < +\infty$, on a par le théorème de sortie de tout compact que $\lim_{t \to (T^+)^-} r(t) = +\infty$, en contradiction avec la majoration a priori obtenue ci-dessus. Donc $T^+ = +\infty$.

Problème *La cycloïde comme courbe tautochrone*

1 On peut réécrire cette équation comme à variable séparée

$$\frac{2u'u}{1 + u^2} = -\frac{1}{t},$$

(écriture légitime car $1 + u^2$ ne s'annule pas), qui s'intègre en

$$\left[\ln(1 + u(s)^2)\right]_1^t = -\left[\ln s\right]_1^t,$$

ou encore

$$\ln \frac{1 + u(t)^2}{1 + u_0^2} = \ln t^{-1},$$

Donc

$$u(t)^2 = \frac{1+u_0^2}{t} - 1.$$

Or l'équation initiale n'autorise pas u à s'annuler à cause du u au dénominateur. Donc u est de signe constant, et négatif car $u_0 < 0$. Donc

$$u(t) = -\sqrt{\frac{1+u_0^2}{t} - 1},$$

solution définie sur $]0, 1+u_0^2[$, se prolongeant par continuité par zéro en la borne $1+u_0^2$. C'est donc bien la solution maximale.

2 Pour $\epsilon > 0$, étudions

$$U(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \sqrt{1+k'(u)^2}du.$$

On a $U(\epsilon) \leq \int_\epsilon^1 \sqrt{1+k'(u)^2+2|k'(u)|}du \leq \int_\epsilon^1 1+|k'(u)|du$. Comme k est décroissante, $k' \leq 0$, donc

$$U(\epsilon) \leq (1-\epsilon) + k(\epsilon) - k(1).$$

Par hypothèse, $\lim_{\epsilon\to 0^+} k(\epsilon) = k(0)$ est finie, et donc l'intégrale impropre $\int_0^1 \sqrt{1+k'(u)^2}du$ est convergente.

3

Comme d'habitude, on transforme le système en $\dot{Z} = F(Z)$, avec

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{-g-v^2k'(u)k''(u)}{1+k'(u)^2} \end{pmatrix},$$

Comme k est de classe C^3, F est de classe C^1 donc F est localement Lipschitzienne. Il y a donc existence et unicité de la solution du problème de Cauchy considéré sur un intervalle de la forme $[0, T_{y_0}[$.

4 La solution vérifie $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) = -g/(1+k'(y_0)^2)$, et donc

$$y(h) = y_0 - \frac{g}{2(1+k'(y_0)^2)}h^2 + o(h^2),$$

qui est bien $< y_0$ pour $t > 0$ assez proche de 0.

5 On dérive

$$\dot{E} = m\left(\ddot{y}\dot{y}(1+k'^2) + \dot{y}^3k'k'' + g\dot{y}\right) = 0.$$

6 On a ainsi $E(t) = E(0)$ pour $t \in [0, T_{y_0}[$, ce qui se réécrit

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2(1+k'(y)^2) + gy = gy_0,$$

ce qui donne immédiatement le résultat.

7 L'équation précédente admet la solution stationnaire $y(t) = y_0$, et ainsi il y a non-unicité dans le problème de Cauchy (3). C'est possible car Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas à

$$\dot{y} = \pm\sqrt{\frac{2g(y_0-y)}{1+k'(y)^2}},$$

dont le second membre n'est pas localement Lipschitzien en y.

8 Un DL de $\dot{y}$ donne $\dot{y}(h) = -\frac{g}{(1+k'(y_0)^2)}h + o(h)$, donc $\dot{y} < 0$ pour $t \in]0, \delta[$, δ assez petit. Définissons

$$\tau = \inf\{t \geq \delta \,:\, \dot{y}(t) = 0\},$$

si un tel nombre existe. On a ainsi que y est décroissante strictement sur $[0, \tau]$, donc $y(\tau) < y_0$. Par conservation de l'énergie, on a aussi

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2(\tau)(1+k'(y)^2) = g(y_0 - y(\tau)) > 0,$$

ce qui contredit la définition de τ. Donc $\dot{y} < 0$ pour tout $t > 0$.

Donc y est décroissante, positive. Donc $y_\infty = \lim_{t \to T_{y_0}^-} y(t)$ existe. Si $y_\infty > 0$, on a alors que

$$\lim_{t \to T_{y_0}^-} \dot{y}(t) = -\sqrt{\frac{2g(y_0 - y_\infty)}{1 + k'(y_\infty)^2}} < 0.$$

Deux possibilités : soit $T_{y_0} = +\infty$, mais alors pout t assez grand, on a l'équivalent

$$y(t) = \int_0^t \dot{y}(s)ds \sim -t\sqrt{\frac{2g(y_0 - y_\infty)}{1 + k'(y_\infty)^2}},$$

ce qui est absurde car $y > 0$. Donc nécessairement $T_{y_0} < +\infty$ et on peut prolonger la solution par continuité en T_{y_0}, ce qui est aussi absurde par le théorème de sortie de tout compact, et contredit la maximalité de la solution. Ainsi $y_\infty = 0$.

9 Soit y une solution maximale de (2) telle que $y(t) < y_0$ pour $t > 0$ proche de 0. Ainsi, pour tout $t > 0$ proche de 0, on a

$$\dot{y}\sqrt{1 + k'(y)^2} = \pm\sqrt{2g(y_0 - y)},$$

ce qui signifie que $\dot{y}$ ne s'annule pas pour $t > 0$, proche de 0, et est donc de signe constant. Ce signe est nécéssairement négatif, donc

$$\frac{\dot{y}\sqrt{1 + k'(y)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = -1,$$

que l'on peut intégrer en

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\sqrt{1 + k'(u)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - u)}} du = -t,$$

Soit $[0, \tau[$ l'intervalle sur lequel y est défini, et $]0, \delta[$ l'intervalle maximal sur lequel de $y(t) < y_0$. Sur cet intervalle l'équation ci-dessus est vérifiée. Donc si $\delta < \tau$, on aurait $y(\delta) = y_0$, ce qui est impossible puisque y est strictement décroissante sur $]0, \delta[$. Donc $\tau = \delta$ et l'équation ci-dessus est valable sur $[0, \tau[$. Enfin, comme la fonction intégrée est strictement positive, y s'exprime comme l'inverse d'une primitive strictement croissante; y est donc unique.

10 La solution de (3) ci-dessus est nécéssairement la solution de (2) par la question 4. Comme $\lim_{t \to T_{y_0}^-} y(t) = 0$, on a donc

$$T_{y_0} = \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{1 + k'(u)^2}{2g(y_0 - u)}} du,$$

que cette intégrale soit finie ou non. Mais elle est en fait convergente car $\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - u)}}$ est intégrable en y_0^- et $\sqrt{1 + k'(u)^2}$ est intégrable en 0 par la question 2. Posons maintenant $u = y_0 z$, $du = y_0 dz$, ce changement de variable donne la formule désirée.

11 L'intégrale

$$T_\epsilon(y_0) = \int_\epsilon^{1-\epsilon} \sqrt{\frac{y_0(1 + k'(y_0 z)^2)}{2g(1 - z)}} dz,$$

est dérivable sous le signe somme

$$\frac{\partial T_\epsilon}{\partial y_0} = \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{1 + k'(y_0 z)^2 + 2y_0 z k'(y_0 z) k''(y_0 z)}{2\sqrt{2g(1 - z) y_0 (1 + k'(y_0 z)^2)}} dz,$$

Or, si k' est solution de l'équation (1) avec $u_0 = k'(1)$, alors

$$1 + k'(t)^2 + 2tk'(t)k''(t) = 0,$$

et pour $t = y_0 z$, on voit que la fonction intégrée est nulle. Donc

$$\frac{\partial T_\epsilon}{\partial y_0} = 0.$$

12 On choisit donc

$$k(y) = \int_1^y -\sqrt{\frac{2}{t} - 1} dt,$$

qui vérifie $k(1) = 0$, est définie sur $]0, 2[$, décroissante, C^3, sa dérivée vérifie (1). Il reste à vérifier que k a une limite finie en 0^+, mais en 0^+ on a l'équivalent

$$\sqrt{\frac{2}{t} - 1} \sim \sqrt{\frac{2}{t}},$$

qui est intégrable en 0^+. Pour ce choix de k, T_ϵ ne dépend pas de y_0. Comme

$$T_{y_0} = \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon(y_0),$$

est une limite simple de fonctions constantes, est constante en fonction de y_0. La rampe est donc tautochrone.