Corrigé CC 2016-2017 ED2

Exercice 1

1.
$$y'(t) + t\,y(t) = t, \text{avec}\, y(0) = y_0 \in \mathbf{R}.$$

Solution particulière $y = 1$, en résolvant l'équation homogène on trouve

$$y(t) = 1 + y_0 e^{-t^2/2}.$$

2.
$$y' = y + \sqrt{y}, \text{avec}\, y(0) = 1.$$

On divise d'abord par $\sqrt{y}$, puis on pose $u = \sqrt{y}$ (qui a un sens car $y \geq 0$). On obtient $2u' = u+1$ là où $y \neq 0$ et $u(0) = 1$. On résout cette seconde équation $u(t) = 2e^{t/2} - 1$, qui est strictement positif sur $]-\ln(4); +\infty[$. La solution finale est

$$y(t) = \begin{cases} (2e^{t/2} - 1)^2 \text{ si } t \geq -\ln(4), \\ 0 \text{ si } t \leq -\ln(4). \end{cases}$$

3.
$$Y' = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -15 & -11 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec}\, Y(0) = Y_0 \in \mathbf{R}^2.$$

Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -15 & -11 \end{pmatrix}$ est $X^2 + 3X + 2$, les valeurs propres sont donc $-2, -1$. On trouve deux vecteurs propres associés $v_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $v_{-2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. On pose la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

ce qui résout l'équation homogène. Pour l'équation avec second membre, on a une solution particulière (ou on applique la variation de la constante/ formule de Duhamel)

$$Y(t) = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

La solution est donc

$$Y(t) = e^{tA} \left[Y_0 - \begin{pmatrix} -11/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -11/2 \\ 15/2 \end{pmatrix},$$

que l'on peut développer à partir des expressions de P, P^{-1} pour obtenir une formule explicite.

Exercice 2

1. Si on pose $Y = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, on peut réécrire l'équation

$$\dot{Y} = F(Y),$$

avec

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l}\sin(x) \end{pmatrix},$$

dont la différentielle

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x) & 0 \end{pmatrix},$$

est bornée sur $\mathbf{R}^2$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements fini, F est globalement Lipschitzienne, et par le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions sont globales.
2. On dérive $E(t)$ et on trouve 0.
3. On calcule l'énergie au temps 0, $E = -mgl\cos(\theta_0)$, en comparant avec la formule pour l'énergie au temps t on obtient

$$\frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 = gl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Le terme de gauche est positif, ce qui conclut.

4. Si $\dot{\theta} > 0$, on a alors (en prenant la racine carrée)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0},$$

ou encore, comme $cos\theta > \cos\theta_0$ pourvu que $\dot{\theta} > 0$,

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

qui est bien à variables séparées.
5. La fonction F est strictement croissante, impaire. Si $u = |\theta_0| - h$, un DL donne

$$\cos u = \cos(\theta_0) + h\sin(|\theta_0|) + o(h),$$

et donc lorsque $h \to 0^+$,

$$\frac{1}{\sqrt{cos(|\theta_0| - h) - cos(\theta_0)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin(|\theta_0|)}\sqrt{h}},$$

Par hypothèse, $sin(|\theta_0|) > 0$; cet équivalent est intégrable car $\int_0^1 \frac{dh}{\sqrt{h}} < +\infty$, on en conclut donc que F a une limite finie en $|\theta_0|$. Par imparité, c'est aussi le cas en $\theta_0 < 0$. De plus, F est bornée.

6. On calcule grâce à l'équation différentielle $\ddot{\theta}(0) = -g\sin(\theta_0)/l > 0$. Ainsi un Dl de $\dot{\theta}$ au temps $t = 0$ donne

$$\dot{\theta}(h) = (-g\sin(\theta_0)/l)h + o(h),$$

est donc strictement positive sur un intervalle de la forme $]0,\delta[$. En notant $t_1 = \inf\{t > 0 : \dot\theta(t) = 0\}$ (qui pourrait à priori être infini), on a l'intervalle voulu. Intégrons maintenant l'équation à variable séparée obtenue en 4. entre $\epsilon > 0$ et $t < t_1$, on a ainsi

$$F(\theta(t)) - F(\theta(\epsilon)) = t - \epsilon.$$

Vu les propriétés de F, on peut faire tendre ϵ vers 0 et t vers t_1,

$$F(\theta(t_1)) - F(\theta_0) = t_1,$$

ce qui nous dit que t_1 est borné. Comme $\dot\theta(t_1) = 0$, on a par l'équation de l'énergie que $\cos\theta(t_1) = \cos(\theta_0)$. Comme θ est strictement croissante sur $]0,t_1[$, on en conclut que $\theta(t_1) = |\theta_0|$. Ainsi

$$t_1 = F(|\theta_0|) - F(\theta_0) = 2F(|\theta_0|),$$

et on obtient presque la formule de l'énoncé (la différence étant une valeur absolue sur θ_0), différence que l'on mettra sur le compte d'une erreur d'énoncé (vu que sinon, le temps trouvé serait négatif).

7. On a vu que le pendule allait en un temps t_1 de la position $(\theta,\dot\theta) = (\theta_0, 0)$ à la position $(-\theta_0, 0)$. Remarquons que si θ est solution de l'équation différentielle, $-\theta$ aussi par imparité de la fonction sinus. Donc la solution partant de $(-\theta_0, 0)$ met un temps t_1 à arriver en $(\theta_0, 0)$. Comme l'équation est autonome, on peut recoller les solutions pour obtenir une solution qui partant de $(\theta_0, 0)$, y revient en temps $2t_1$, puis la recoller par ses translatés de temps multiples de $2t_1$. Par unicité de la solution, c'est bien la solution θ, et elle est bien périodique de période $2t_1$.

8. Lançons le pendule à la position initiale $\theta(0) = 0$ à une vitesse $\dot\theta(0) = 2\sqrt{g/l}$. D'après la conservation de l'énergie,

$$\frac{1}{2}l^2\dot\theta^2 - gl\cos\theta = \frac{1}{2}l^2 4\frac{g}{l} - gl = gl.$$

Donc

$$\dot\theta^2 = \frac{2g}{l}(1+\cos(\theta)).$$

Si l'on analyse de même qu'auparavant l'intervalle $]0,t_1[$ sur lequel $\dot\theta > 0$, on voit que θ croît de 0 à π, et

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta(t)} \frac{du}{\sqrt{1+\cos(u)}},$$

mais la fonction $G(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1+\cos(u)}}$, a une limite infinie en π^-, car lorsque $h \to 0^+$, un DL à l'ordre 2 donne

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos(\pi - h)}} \sim \frac{\sqrt{2}}{h},$$

et donc le pendule met un temps $t_1 = +\infty$ à atteindre le point stationnaire de l'équation $(\theta,\dot\theta) = (\pi, 0)$.

Exercice 3

1. On calcule $f' = 2f^2$.
2. La solution maximale de l'équation ci-dessus est $g(t) = \frac{f(0)}{1-2tf(0)}$, définie sur l'intervalle maximal $]-\infty; \frac{1}{2f(0)}[$. A priori, f n'est en réalité définie sur sur $]t^-, t^+[$, et est donc une restriction de f. Ceci nous donne tout de même que $t^+ \leq \frac{1}{2f(0)} < +\infty$. Comme f est croissante, pour les temps négatifs, $x^2 + y^2 \leq f(0)$, donc (x, y) reste bornée pour les temps $t < 0$. Par le théorème d'explosion en temps fini, $t^- = -\infty$.
3. On obtient

$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\theta - \dot{\theta}\rho\sin\theta = -\rho\sin\theta + \rho^3\cos\theta, \\ \dot{\rho}\sin\theta + \dot{\theta}\rho\cos\theta = \rho\cos\theta + \rho^3\sin\theta. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - 2t\rho_0^2}} \begin{pmatrix} \cos(t + \theta_0) \\ \sin(t + \theta_0) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Cet exercice un peu délicat nécessite une familiarité avec les espaces de Hilbert et les formes quadratiques.

1. Soit v une matrice-colonne, non nulle. On calcule

$$\langle v, Mv\rangle = \int_0^1 \langle v, S(1,s)^t S(1,s)v\rangle ds = \int_0^1 \|^t S(1,s)v\|^2 ds,$$

et comme $S(1,s)$ est inversible, $\|^t S(1,s)v\|^2 > 0$. en particulier $Mv \neq 0$ pour tout v non nul.

2. Posons $B(s) =^t S(1,s)M^{-1}w$. Calculons

$$\phi(B) = \int_0^1 S(1, s^t S(1,s)M^{-1}w ds = MM^{-1}w = w.$$

Reste à montrer que cette solution est de norme minimale. Si B' est une autre solution de $\phi(B') = w$, on a $\phi(B' - B) = 0$. En particulier, si $v = M^{-1}w$,

$${}^t v \int_0^1 S(1,s)(B'(s) - B(s))ds = 0,$$

c'est à dire

$$\langle B, B' - B\rangle = 0.$$

Calculons

$$\|B'\|^2 = \|B + (B' - B)\|^2 = \|B\|^2 + \|B' - B\|^2 + 2\langle B, B' - B\rangle \geq \|B\|^2,$$

et donc B est bien la solution de norme minimale.

3. La formule de Duhamel donne

$$Y(1) = S(0,1)y_0 + \int_0^1 S(1,s)B(s)ds.$$

Comme on veut que $Y(1) = y_1$, on pose $w = y_1 - S(0,1)y_0$, et l'équation devient

$$\phi(B) = w,$$

dont on a vu qu'il y avait une seule solution de norme minimale, à savoir

$$B(s) =^t S(1,s) \left(\int_0^1 S(1,u)^t S(1,u) du \right)^{-1} [y_1 - S(0,1)y_0].$$