UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 3

Examen, session 2, 21 Juin 2016

Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1

Soit σ la permutation de S_9 définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 8 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1 Donner la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoints.

2 Calculez la signature de σ, et son ordre.

Exercice 2

En expliquant en français les étapes et justifications de votre démarche, établissez la liste des polynômes unitaires irréductibles de degré ≤ 4 dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 3

Montrer que l'équation d'inconnues entières (x, y, z),

$$2x^4 + 2y^4 = z^4,$$

n'admet que $(0, 0, 0)$ comme solution dans $\mathbf{Z}^3$. On pourra d'abord étudier cette même équation dans $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$.

Exercice 4

Soit A un anneau commutatif. On suppose que $\forall x \in A, x^2 = x$. Un tel anneau est appelé *anneau de Boole*.

1 Montrez que $\forall x \in A, x = -x$. (*On pourra calculer* $(x + x)^2$).

2 Montrez que si A contient au moins trois éléments, alors A n'est pas intègre.

Exercice 5

1 Calculez les cardinaux des groupes multiplicatifs $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\times$, $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^\times$, et de façon générale $(\mathbf{Z}/3^k\mathbf{Z})^\times$, où $k \geq 1$.

2 Calculez l'ordre de la classe de 2 dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\times$, ainsi que l'ordre de la classe de 4 dans $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^\times$.

3 Soit $k \geq 1$. Montrez que l'application f_k qui à la classe d'un entier z modulo 3^k associe la classe de z^3 modulo 3^{k+1}, est bien définie. *Attention, ce ne serait pas vrai si on remplaçait* z^3 *par* z^2.

4 Montrez que si $k \geq 1$, et z est un entier vérifiant $z \equiv 1 + 3^{k-1} (mod\ 3^k)$, alors

$$z^3 \equiv 1 + 3^k\ (mod\ 3^{k+1}).$$

5 En déduire que

$$(1+3)^{3^{k-1}} \equiv 1 + 3^k (mod\ 3^{k+1}),$$

et la valeur de 4^{3^k} modulo 3^{k+1}.
6 En déduire l'ordre de la classe de 4 dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/3^k\mathbf{Z})^\times$.
7 En déduire l'ordre de la classe de 2 dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/3^k\mathbf{Z})^\times$.
Que peut-on dire de ce dernier groupe ?