Algèbre et Arithmétique 3

Examen terminal, session 1, 10 Mai 2016

Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1

Soit σ la permutation de S_{12} définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 10 & 8 & 9 & 6 & 2 & 12 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

1 Donner la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
2 Calculez la signature de σ, et son ordre.
3 Calculez σ^{2016}.

Exercice 2

Montrez que $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X]/(X^2+2)$ est un corps fini, dont on donnera le nombre d'éléments.

Exercice 3

Montrez que l'idéal I de l'anneau $\mathbf{Z}[X]$,

$$I = 2\,\mathbf{Z}[X] + X\,\mathbf{Z}[X],$$

n'est pas un idéal principal.

Exercice 4

1 Calculez explicitement les cardinaux des groupes multiplicatifs $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$, $(\mathbf{Z}/25\mathbf{Z})^\times$, et $(\mathbf{Z}/36\mathbf{Z})^\times$.
2 Donnez l'ordre de la classe de 2 dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$, ainsi que l'ordre de la classe de 6 dans $(\mathbf{Z}/25\mathbf{Z})^\times$.
3 Montrez qu'il existe un morphisme d'anneaux Ψ de $\mathbf{Z}/625\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/25\mathbf{Z}$.
4 Montrez que

$$\Psi\left((\mathbf{Z}/625\mathbf{Z})^\times\right) \subset (\mathbf{Z}/25\mathbf{Z})^\times.$$

5 Montrez (sans calculs trop compliqués !) qu'il existe un élément d'ordre 5 dans $(\mathbf{Z}/625\mathbf{Z})^\times$. On ne demande pas l'élément explicitement.

Exercice 5

On considère l'ensemble

$$\mathbf{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2} \ : \ (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}.$$

1 Montrez que $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau intègre.
2 Montrez que la fonction module au carré,

$$N \ : \ z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}] \mapsto N(z) = z\bar{z},$$

est à valeur dans $\mathbf{N}$.
3 Déterminez le groupe des inversibles $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]^{\times}$.
4 Montrez que pour tout nombre complexe z, il existe $z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ avec $|z - z'|^2 \leq 3/4$.
5 Montrez que $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien pour le stathme $N(z) = z\bar{z}$. Est-il principal ?
6 Montrez que $i\sqrt{2}$ et $1 + i\sqrt{2}$ sont irréductibles dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$. Les éléments 2 et 3 sont-ils irréductibles dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$?
7 Montrez qu'aucune des deux équations d'inconnues (x, y)

$$x^2 + 2y^2 = 5,$$

$$x^2 + 2y^2 = 7,$$

n'ont de solutions dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.
8 En déduire qu'un nombre premier $p \in \mathbf{Z}$ congru à 5 ou 7 modulo 8 est encore irréductible dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$.
9 Donnez 5 exemples d'éléments irréductibles (non-associés) de l'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$.
10 Décomposez 30 en facteurs premiers dans l'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$.