UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 3

Examen terminal, session 1, 5 Mai 2017

Le barème appliqué tiendra compte de la longueur du sujet. Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1

1 Donnez trois exemples d'anneaux principaux.

2 Donnez deux exemples d'éléments irréductibles dans un anneau qui ne soit pas $\mathbf{Z}$.

Exercice 2

(*Questions de cours*)

1 Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'idéaux d'un anneau commutatif unitaire A. Démontrez que la réunion $J = \cup_{n\geq 0} I_n$ est un idéal de A.

2 Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'idéaux d'un anneau principal A. Montrez qu'il existe $m \geq 0$ tel que pour tout $n \geq m$, on a $I_n = I_m$.

Exercice 3

Soit σ la permutation de S_{13} définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 13 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

1 Donnez la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

2 Calculez la signature de σ, et son ordre.

3 Calculez σ^{2017}.

Exercice 4

On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}/58\mathbf{Z}$ ainsi que son groupe (multiplicatif) des inversibles $A^\times = (\mathbf{Z}/58\mathbf{Z})^\times$.

1 L'anneau A est-il intègre ? Justifiez.

2 Quel est le cardinal de $A^\times$?

3 En justifiant et en détaillant les étapes, calculez l'ordre de $\bar{3}$ dans le groupe multiplicatif $A^\times$.

4 Le groupe $A^\times$ est-il cyclique ?

Tournez la page !

Problème

Soit $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On note

$$K = \{a + b\omega \ : \ (a,b) \in \mathbf{Q}^2\},$$

et

$$\mathcal{O} = \{a + b\omega \ : \ (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}.$$

1. Montrez que K est un sous-anneau de $\mathbf{R}$, et qu'il est intègre.

2. Montrez que $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de K.

3. On rappelle que $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$. Montrez que pour un élément $x \in K$, il existe un unique couple de nombres rationnels (a,b) tels que $x = a + b\omega$.

4. On note $\omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrez que ω' est dans $\mathcal{O}$.

5. On définit l'application

$$\sigma : K \to K,$$
$$x = a + b\omega \mapsto a + b\omega'.$$

Montrez que σ est un morphisme d'anneaux, et que c'est une involution.

6. Quels sont les morphismes d'anneaux de K dans K ? *Indication: remarquer que ω est solution de $X^2 - X - 1 = 0$.*

7. Pour $x \in K$, on définit sa **norme**:

$$N(x) = x.\sigma(x).$$

Montrez que pour tout $x \in K$, $N(x)$ est un rationnel, et que si de plus $x \in \mathcal{O}$, alors $N(x) \in \mathbf{Z}$.

8. Montrez que K est un corps.

9. Montrez que pour $(x,y) \in K^2$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.

10. Soient $(a,b) \in \mathbf{Q}^2$ avec $|a| \leq 1/2$, $|b| \leq 1/2$. Montrez que $|N(a + b\omega)| < 1$.

11. Montrez que $\mathcal{O}$ est euclidien, de stathme la valeur absolue de N.

12. Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Montrez que, modulo 5,

$$N(a + b\omega) = (a - 2b)^2 \bmod 5.$$

13. Montrez que pour tout $x \in \mathcal{O}$, $N(x)$ n'est congru ni à 2, ni à 3 modulo 5.

14. Montrez que $x \in \mathcal{O}$ est inversible si et seulement si $N(x) \in \{-1, +1\}$.

15. Soit p un entier premier (de $\mathbf{Z}$) congru à 2 ou 3 modulo 5. Montrez que p est un élément irréductible de $\mathcal{O}$.