

# Horocycles récurrents sur des surfaces de volume infini

Yves Coudene, François Maucourant

12 mars 2009

*IRMAR, Université Rennes 1, campus beaulieu, bat.23  
35042 Rennes cedex, France  
yves.coudene@univ-rennes1.fr, francois.maucourant@univ-rennes1.fr*

## Abstract

Nous construisons des exemples de surfaces de volume infini, sur lesquelles tous les horocycles sont récurrents. <sup>1</sup>

## 1 Introduction

Soit  $M$  une variété riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative  $-a^2 \leq \kappa \leq -b^2 < 0$ ,  $d$  la distance riemannienne sur  $M$ ,  $T^1M$  son fibré tangent unitaire, et  $g_t$  le flot géodésique sur  $T^1M$ . Les ensembles fortement stables, aussi appelés horosphères,

$$W^{ss}(v) = \{w \in T^1M : d(g_tv, g_tw) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty\}$$

jouent un rôle fondamental dans l'étude des propriétés dynamiques du flot géodésique. Il s'avère que les propriétés de ce feuilletage sont intimement liées à la topologie de la variété. La propriété la mieux comprise est sans doute la densité des feuilles : une variété à courbure négative  $M$  est compacte si et seulement si toutes les horosphères sont denses dans la variété [Eb72b, Theorem 6.1].

En dimension deux, les horosphères sont les orbites d'un flot appelé flot horocyclique. Françoise Dal'bo a donné une caractérisation dynamique, en terme d'horocycles, de la finitude du volume [Da01, Corollaire 2]: une surface  $S$  est de volume fini si et seulement si tous les horocycles sont denses ou périodiques.

Une feuille dense ou périodique étant nécessairement récurrente, ce dernier résultat a motivé la question suivante, posée par Pascal Hubert : la finitude du volume est-elle équivalente à la récurrence de tous les horocycles ?

Un premier élément de réponse est donné par François Ledrappier, qui montre le résultat suivant [Le97, Proposition 3] : *si le rayon d'injectivité de la surface est strictement positif, toute horosphère récurrente est nécessairement dense dans l'ensemble non-errant*. Ceci entraîne que si la surface a un rayon d'injectivité non nul et que tous les horocycles sont récurrents, alors la surface est compacte.

L'objet de cet article est de répondre négativement à la question de Pascal Hubert. Nous allons en effet construire une surface hyperbolique de volume infini dont tous les horocycles sont récurrents. Nous montrons dans un premier temps que si le rayon d'injectivité le long d'un rayon géodésique n'est pas minoré, les horocycles

---

<sup>1</sup>37B10, 37D40, 34C28

correspondants sont récurrents. Nous détaillons ensuite la construction de la surface et vérifions qu'elle possède bien les propriétés annoncées. Enfin, nous donnons une description des vecteurs sur cette surface dont les horocycles sont récurrents mais non denses.

## 2 Horocycles récurrents et rayon d'injectivité

Considérons une surface riemannienne  $S$  connexe complète dont la courbure est comprise entre deux réels strictement négatifs. Son revêtement universel, noté  $\tilde{S}$ , est difféomorphe à un disque. Son groupe fondamental est noté  $\Gamma$ , si bien qu'on a l'isomorphisme  $S \simeq \tilde{S}/\Gamma$ .

Le relevé d'un point  $x$  de  $S$  ou d'un vecteur  $v \in T^1S$  est noté  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  et  $\tilde{v} \in T^1\tilde{S}$  respectivement. Nous noterons indifféremment  $\pi$  les projections de  $T^1S$  dans  $S$  et de  $T^1\tilde{S}$  dans  $\tilde{S}$  qui à un vecteur associent son point base,  $g_t$  et  $h_s$  les flots géodésiques et horocycliques sur  $T^1S$  et  $T^1\tilde{S}$ ,  $d$  les différentes distances sur  $S, \tilde{S}, T^1S, T^1\tilde{S}$ .

Enfin, introduisons une dernière notation. Soit  $x$  un point de  $\tilde{S}$  et  $\xi$  un point du bord idéal  $\partial\tilde{S}$ . Il existe une unique géodésique issue de  $x$  et qui tend vers  $\xi$  pour les temps positifs. Le vecteur tangent à cette géodésique en  $x$  sera noté  $\vec{x\xi}$ .

### Proposition

*Soit  $\tilde{S}$  une surface riemannienne connexe, simplement connexe, complète, dont la courbure est comprise entre deux constantes strictement négatives. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \tilde{S}$ , satisfaisant  $d(x, y) < \delta$ , on a :*

$$\forall \xi \in \partial\tilde{S}, \quad d_{T^1S}(\vec{x\xi}, \vec{y\xi}) < \varepsilon$$

### Preuve

Quitte à multiplier la courbure par un scalaire positif, on peut supposer que la courbure est partout supérieure à  $-1$ . Notons  $v' \in T_y^1\tilde{S}$  le vecteur obtenu par transport parallèle de  $\vec{x\xi}$  le long de la géodésique reliant  $x$  à  $y$ .

La distance de  $\vec{x\xi}$  à  $v'$ , calculée dans le fibré tangent  $T^1\tilde{S}$ , est égale à la distance de  $x$  à  $y$ , calculée sur  $\tilde{S}$ . De plus, on a l'égalité :

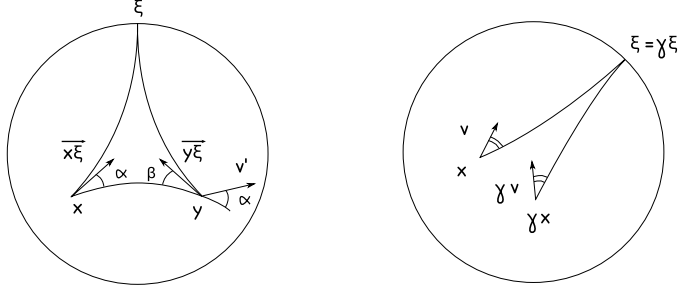
$$d(v', \vec{y\xi}) = \pi - \alpha - \beta$$

où  $\alpha$  est l'angle formé par le vecteur  $v$  et la géodésique reliant  $x$  à  $y$ , et  $\beta$  est l'angle entre cette géodésique et le vecteur  $\vec{y\xi}$ .

Posons  $A = \pi - \alpha - \beta$ . Il s'agit de majorer  $A$  en fonction de  $d(x, y)$ . Pour cela, on se place dans le triangle de sommet  $x, y$  et  $\xi$  et on utilise le théorème de comparaison d'Andronov-Topogonov, de façon à se ramener à la courbure constante [Kl95, prop 2.7.7]. Soit donc un triangle dans l'espace hyperbolique à courbure  $-1$ , dont un des sommets est à l'infini, et dont la longueur du côté opposé à ce sommet est égale à  $d(x, y)$ . On note  $\alpha'$  et  $\beta'$  les angles du triangle situés aux deux extrémités de ce côté, et on pose  $A' = \pi - \alpha' - \beta'$ . D'après le théorème de comparaison,  $A$  est plus petit que  $A'$ . En vertu des relations trigonométriques dans les triangles des espaces hyperboliques, on a les majorations :

$$sh d(x, y) = \frac{\cos \alpha' + \cos \beta'}{\sin \alpha' \sin \beta'} \geq \cos \alpha' - \cos(\alpha' + A') \geq 1 - \cos A' \geq \frac{2}{\pi^2} A'^2$$

Ce qui termine la preuve. Remarquons que la quantité  $A$  peut s'interpréter de manière géométrique : elle est égale à l'aire du triangle dont les sommets sont  $x, y$  et  $\xi$ .



### Corollaire

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que pour toute isométrie directe  $\gamma$  de  $\tilde{S}$ , possédant au moins un point fixe sur le bord  $\partial\tilde{S}$ , et tout  $x \in \tilde{S}$  satisfaisant  $d(x, \gamma x) < \delta$ , on a :

$$\forall v \in T_x^1 \tilde{S}, \quad d(v, \gamma v) < \varepsilon$$

### Preuve

Soit  $\xi$  un point fixe de  $\gamma$  sur  $\partial\tilde{S}$ . On a l'égalité :  $\gamma(\overrightarrow{x\xi}) = \overrightarrow{\gamma(x)\xi}$ . D'après le lemme précédent, les vecteurs  $\gamma(\overrightarrow{x\xi})$  et  $\overrightarrow{x\xi}$  sont proches dès que  $x$  et  $\gamma(x)$  sont proches. Maintenant, un vecteur quelconque  $v \in T_x^1 \tilde{S}$  se déduit de  $\overrightarrow{x\xi}$  en appliquant une rotation d'angle fixé dans les fibres de  $T^1 \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ . Cette rotation est une isométrie de  $T^1 \tilde{S}$  qui commute avec  $\gamma$ . La distance  $d(v, \gamma v)$  est donc égale à  $d(\overrightarrow{x\xi}, \gamma(\overrightarrow{x\xi}))$ , ce qui termine la preuve.

Introduisons quelques notations, afin d'énoncer le résultat principal de notre article : si  $\tilde{v} \in T^1 \tilde{S}$ ,  $\tilde{v}_+$  et  $\tilde{v}_-$  désigneront respectivement les points du bord  $\partial\tilde{S}$  tels que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \pi(g_t \tilde{v}) = \tilde{v}_\pm$ , pour la topologie usuelle sur  $\tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$ . Le rayon d'injectivité de  $S$  en  $x \in S$  sera noté

$$\text{Inj}_S(x) = \sup\{r > 0 : D(\tilde{x}, r) \cap (\Gamma - \{e\})D(\tilde{x}, r) = \emptyset\},$$

où  $D(\tilde{x}, r)$  désigne la boule de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $r$ .

Enfin, précisons que l'on entend par *horocycle récurrent* un horocycle  $W^{ss}(v) \subset T^1 S$  tel qu'il existe une suite  $s_n$  de réels tels que  $|s_n|$  n'est pas bornée et  $h_{s_n} v$  tend vers  $v$ .

### Théorème

Soit  $S$  une surface riemannienne connexe, complète, dont la courbure est comprise entre deux constantes strictement négatives. Soit  $v \in T^1 S$  tel que :

$$\inf_{t \rightarrow +\infty} \text{Inj}(\pi(g_t v)) = 0.$$

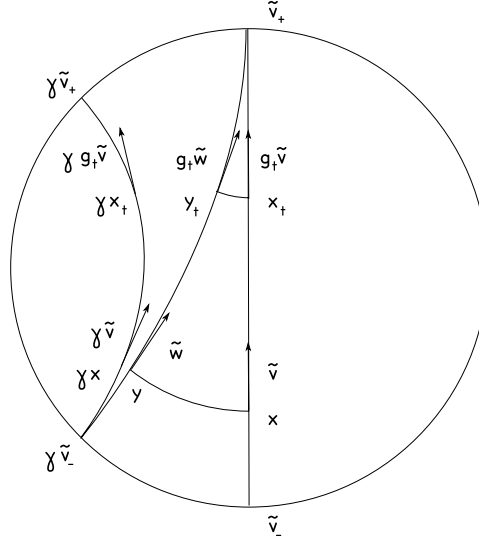
Alors  $v$  est récurrent sous l'action du flot horocyclique.

### Preuve

Soit  $\tilde{v}$  un relevé de  $v$  à  $T^1 \tilde{S}$ ,  $x$  sa projection sur  $\tilde{S}$  et  $x_t$  le projeté de  $g_t \tilde{v}$ . D'après l'hypothèse sur le rayon d'injectivité, on peut trouver un réel  $t$  arbitrairement grand, ainsi que  $z \in \tilde{S}$  et  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $x_t, z$  et  $\gamma z$  sont proches les uns des autres. Ceci implique que  $x_t$  et  $\gamma x_t$  sont proches l'un de l'autre. En effet, si  $d(x, z) < \varepsilon$  et  $d(\gamma z, x_t) < \varepsilon$ , on a :

$$d(x_t, \gamma x_t) \leq d(x_t, \gamma z) + d(\gamma z, \gamma x_t) \leq d(x_t, \gamma z) + d(z, x_t) \leq 2\varepsilon$$

Soit  $\tilde{w} \in T^1\tilde{S}$  le vecteur qui se trouve sur l'horosphère associée au vecteur  $\tilde{v}$  et sur la géodésique reliant  $\gamma\tilde{v}_-$  à  $\tilde{v}_+$ . Notons  $y$  sa projection sur  $\tilde{S}$ , et  $y_t$  la projection de  $g_t\tilde{w}$ , si bien que :  $\tilde{w} = \overrightarrow{y\tilde{v}_+}$ . Montrons que  $\tilde{w}$  est proche de  $\gamma\tilde{v}$ .



Pour cela, commençons par vérifier que  $y$  est proche de  $\gamma x$ . D'après le corollaire, les vecteurs  $g_t\tilde{v}$  et  $\gamma g_t\tilde{v}$  sont proches l'un de l'autre. Il en va de même pour les points  $x_t$  et  $y_t$ , ceci indépendamment de  $t$ . Ce fait classique en dynamique hyperbolique est redémontré par un raisonnement géométrique dans l'annexe située à la fin de cet article. Les points  $\gamma x_t$  et  $y_t$  sont donc proches l'un de l'autre et, par convexité de la distance, il en va de même de  $\gamma x$  et  $y$  :

$$d(\gamma x, y) \leq d(\gamma x_t, y_t)$$

D'après la proposition, les vecteurs  $\overrightarrow{\gamma x \gamma \tilde{v}_-}$  et  $\overrightarrow{y \gamma \tilde{v}_-}$  sont proches l'un de l'autre. Il en va de même pour les vecteurs  $\gamma\tilde{v}$  et  $\tilde{w}$  qui se déduisent de ceux-là en effectuant un demi-tour dans les espaces tangents  $T^1_{\gamma x}\tilde{S}$  et  $T^1_y\tilde{S}$ .

Il reste à vérifier que la projection de  $\tilde{w}$  sur  $T^1S$  est à distance minorée de  $v$  le long de l'horosphère basée en  $v$ . Supposons qu'il existe  $\delta$  et  $\gamma' \in \Gamma$  tel que  $\tilde{w}$  soit sur l'horosphère basée en  $\gamma'\tilde{v}$  et :

$$\forall t > 0, \quad d(g_t\gamma'\tilde{v}, g_t\tilde{w}) < \delta$$

Alors  $d(\gamma x, \gamma'x) \leq d(\gamma x, y) + d(\tilde{w}, \gamma'\tilde{v}) \leq d(\gamma x, y) + \delta$ . Cette quantité peut être choisie inférieure au rayon d'injectivité en  $x$  si  $\delta$  est suffisamment petit. Dans ce cas,  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont égaux et le vecteur  $\tilde{w}$  est sur l'horosphère basée en  $\gamma\tilde{v}$ . Comme il est sur l'horosphère basée en  $\tilde{v}$ , cette horosphère est invariante par  $\gamma$ . Sa projection sur  $T^1S$  est donc fermée.

### 3 La dimension supérieure

On explique brièvement comment généraliser le théorème précédent aux variétés de dimension supérieure. Le corollaire démontré plus haut n'est vrai que si nous sommes sur une surface. Sur une variété de plus grande dimension, un élément loxodromique peut avoir une longueur de translation petite, mais imprimer un mouvement de rotation important aux vecteurs, dans la direction perpendiculaire à l'axe. Un vecteur proche de cet axe, dans le plan perpendiculaire à l'axe, a un point base

qui est peu bougé par l'élément loxodromique. Sa direction, par contre, varie de manière importante.

Pour contourner cette difficulté, nous allons montrer qu'une certaine puissance de l'élément loxodromique bouge peu la direction du vecteur.

**Proposition**

*Soit  $\tilde{M}$  une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète, à courbure comprise entre deux constantes strictement négatives. On peut trouver un entier  $N$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute isométrie  $\gamma$  de  $\tilde{M}$  et tout  $x \in \tilde{M}$  satisfaisant  $d(x, \gamma x) < \delta$ ,*

$$\forall v \in T_x^1 \tilde{M}, \quad \exists n \in \{0 \dots N\}, \quad d(v, \gamma^n v) < \varepsilon.$$

**Preuve**

Par compacité, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un entier  $N$  tel que tout sous-ensemble de  $S^{n-1}$  possédant  $N$  éléments contient deux éléments à distance inférieure à  $\varepsilon$  l'un de l'autre.

Si  $\gamma$  et  $x$  sont tels que  $d(x, \gamma x) < \delta$ , alors pour tout entier positif  $n \leq N$ , on a :

$$d(x, \gamma^n x) \leq \sum_{k=0}^{N-1} d(\gamma^k x, \gamma^{k+1} x) = Nd(x, \gamma x) = N\delta$$

Tous les points  $\gamma^n x$ ,  $n \in \{0 \dots N\}$ , sont proches les uns des autres.

Fixons une trivialisaton du fibré unitaire de  $\tilde{M}$  en choisissant le point  $x$  comme origine sur  $\tilde{M}$  et en identifiant les plans tangents à l'aide du transport parallèle. Nous avons l'isomorphisme  $T^1 \tilde{M} \simeq \tilde{M} \times S^{n-1}$ , avec  $S^{n-1}$  la sphère euclidienne de dimension  $n - 1$ .

D'après la remarque faite plus haut, pour tout  $v \in T_x^1 \tilde{M}$ , on peut trouver deux vecteurs dans l'ensemble  $\{\gamma^n v \mid 0 \leq n \leq N\}$  qui sont proches l'un de l'autre. Il existe donc deux entiers  $0 \leq m \leq n \leq N$  tels que :

$$d(v, \gamma^{n-m} v) = d(\gamma^m v, \gamma^n v) < \varepsilon$$

Ceci termine la preuve de la proposition.

Dans la partie précédente, seule la preuve du corollaire nécessitait une hypothèse sur la dimension de la variété, les autres résultats étant valide en toute dimension. Il suffit donc d'utiliser la proposition qui vient d'être établie, en lieu et place de ce corollaire, pour montrer que le théorème portant sur le rayon d'injectivité est valide sans restriction sur la dimension de la variété :

**Théorème**

*Soit  $M$  une variété riemannienne connexe, complète, dont la courbure est comprise entre deux constantes strictement négatives. Soit  $v \in T^1 M$  tel que :*

$$\inf_{t \rightarrow +\infty} \text{Inj}(\pi(g_t v)) = 0.$$

*Alors la feuille fortement stable de  $v$  est récurrente au sens suivant :*

- *ou bien la feuille n'est pas l'image de  $\mathbf{R}^{n-1}$  par une immersion ;*
- *ou bien pour tout compact dans  $W^{ss}(v)$ , relativement à la topologie intrinsèque de la feuille, on peut trouver dans  $W^{ss}(v)$  des vecteurs arbitrairement proches de  $v$  pour la métrique de  $T^1 M$ , qui sont hors du compact.*

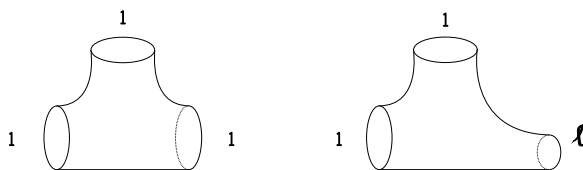
Le premier cas de l'alternative correspond, en dimension deux, à un horocycle fermé. En dimension supérieure, l'horosphère est homéomorphe à un quotient de  $\mathbf{R}^n$  qui peut être non compact.

## 4 Construction

Nous construisons une surface  $S$  à courbure négative constante, qui satisfait les propriétés suivantes :

- la surface est de volume infini ;
- tous les horocycles sont récurrents ;
- tous les vecteurs de  $T^1S$  sont non-errants relativement à l'action du flot géodésique ;
- il n'y a pas d'horocycles fermés, et il existe des horocycles qui ne sont pas denses.

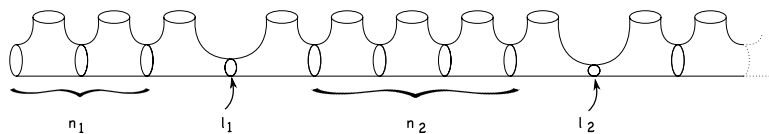
La surface est construite en assemblant des “pantalons”. Ces pantalons sont des surfaces à courbure  $-1$ , difféomorphes au plan privé de deux disques et leur bord est composé de trois géodésiques. Ils sont obtenus en recollant des hexagones à angle droit, et sont déterminés de manière unique, à isométrie près, par les longueurs des trois géodésiques qui forment le bord du pantalon. Ce type de construction est utilisée, par exemple, par P. Buser [Bu92], pour traiter de problèmes d'isospectralité.



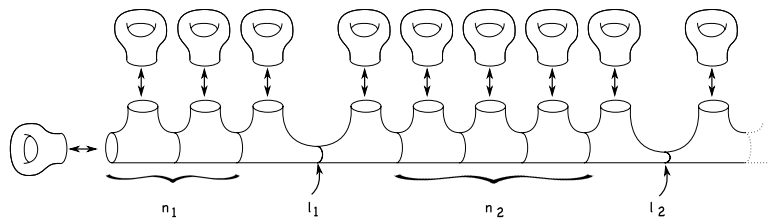
On considère des “pantalons” réguliers, bordés par trois géodésiques de longueur un, et des pantalons “étroits”, bordés par deux géodésiques de longueur un et une de longueur  $l$ , avec  $l$  petit devant un.

Fixons des entiers  $n_i$  arbitraires, et des réels positifs  $l_i$  dont la limite inférieure est zéro. Voici comment est construite notre surface :

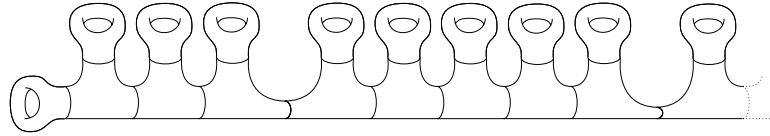
On commence par aligner, de la gauche vers la droite,  $n_1$  pantalons réguliers. Puis on recolle par la droite deux pantalons étroits de longueur  $l_1$ . On assemble ensuite  $n_2$  pantalons réguliers, puis deux pantalons étroits de longueur  $l_2$ , et ainsi de suite. L'assemblage obtenu est la “colonne vertébrale” de notre surface.



On se donne ensuite une surface compacte à courbure  $-1$ , dont le bord est une géodésique fermée de longueur un. La forme de cette surface a peu d'importance. On peut la choisir, par exemple, difféomorphe au tore privé d'un disque. Considérons à présent un nombre dénombrable de copies de cette surface, qu'on vient recoller sur les bouts circulaires des pantalons.



La surface obtenue est de volume infini, et possède un bout unique. Elle se prolonge indéfiniment vers la droite. On notera cette surface  $S$ .



### Théorème

Tous les points de  $T^1S$  sont récurrents pour le flot horocyclique.  
Tous les points de  $T^1S$  sont non-errants pour le flot géodésique.

### Preuve

Rappelons que l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma \subset \partial\tilde{S}$  du groupe  $\Gamma$  est défini comme l'adhérence, dans  $\partial\tilde{S}$ , de tous les itérés de l'origine  $0 \in \tilde{S}$ , sous de  $\Gamma$ . On renvoie à l'ouvrage de P. J. Nicholls [Ni89] pour une description des propriétés de cet ensemble limite.

En particulier, un vecteur de  $T^1S$  est dans l'ensemble non-errant du flot géodésique si et seulement si les deux extrémités de la trajectoire relevée à  $\tilde{S}$  sont dans l'ensemble limite du groupe fondamental de la surface. Un vecteur est dans l'ensemble non-errant du flot horocyclique si et seulement si l'extrémité positive de la géodésique relevée est dans l'ensemble limite.

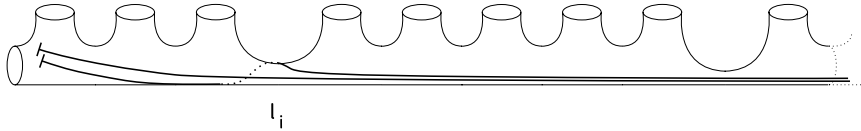
Considérons un vecteur  $v$  de  $T^1S$ , montrons que  $v$  est récurrent pour le flot horocyclique. Il y a deux cas à distinguer.

Premier cas : le rayon géodésique  $(g_tv)_{t \geq 0}$  a des points d'accumulation dans  $T^1S$ , c'est à dire :

$$\cap_{T > 0} \overline{\cup_{t \geq T} g_tv} \neq \emptyset.$$

L'extrémité positive du relevé d'un tel rayon géodésique est par définition ce qu'on appelle un *point conique* de  $\partial\tilde{S}$ . Les points coniques appartiennent à l'ensemble limite, et les horocycles basés en ces points ont un projeté dense dans l'ensemble non-errant du flot horocyclique défini sur  $T^1S$  [Eb72b]. L'horocycle  $W^{ss}(v)$  est donc récurrent.

Deuxième cas : le rayon géodésique  $(g_tv)_{t \geq 0}$  part à l'infini.



Ce rayon coupe donc nécessairement toutes les petites géodésiques de longueur  $l_i/2$  dès que  $i$  est assez grand; mais le rayon d'injectivité sur ces petites géodésiques est précisément  $l_i/2$ , et ainsi le théorème précédent s'applique. L'horocycle  $W^{ss}(v)$  est donc récurrent.

Remarquons maintenant qu'un relevé d'une feuille stable récurrente est un horocycle basé en un point de l'ensemble limite. Ceci montre que tous les vecteurs de  $T^1S$  ont un relevé qui aboutit à un point de l'ensemble limite. Cet ensemble limite coïncide donc avec le bord  $\partial\tilde{S}$ , ce qui démontre que tous les vecteurs sont non-errants pour le flot géodésique et pour le flot horocyclique. Ceci termine la preuve du théorème.

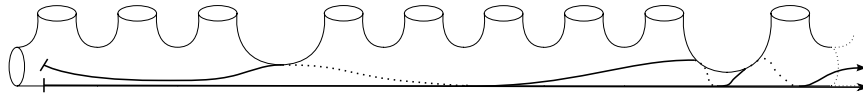
## 5 Géodésiques quasi-minimisantes

Dans cette dernière partie, on décrit les vecteurs  $x \in T^1S$  qui ne sont pas sur un horocycle dense.

Rappelons que si la géodésique issue de  $x$  admet un point d'accumulation pour les temps positifs, alors l'horocycle associé est dense. La géodésique doit donc sortir de tout compact et tendre vers l'infini. Elle coupe toutes les géodésiques de longueur  $l_i$ , pour tous les  $i$  supérieurs à un certain  $i_0$ .

Il existe des géodésiques qui partent à l'infini, mais dont l'horocycle associé est dense dans  $S$ . Pour comprendre ce phénomène, on introduit le concept suivant : une géodésique  $\gamma(t)$  est dite *quasi-minimisante* si il existe une constante  $C > 0$  telle que  $d(\gamma(t), \gamma(0)) > t - C$  pour tout  $t > 0$ . P. Eberlein montre qu'un vecteur est sur un horocycle qui n'est pas dense si et seulement si la géodésique issue de ce vecteur est quasi-minimisante [Eb72b] th.5.5.

Il s'agit donc de décrire les géodésiques quasi-minimisantes. Remarquons que la géodésique qui suit la partie inférieure des pantalons est quasi-minimisante ; elle minimise même la distance entre deux quelconques de ses points. Un deuxième exemple de géodésique quasi-minimisante est donnée par une trajectoire proche de la précédente, mais qui tourne de temps en temps autour des géodésiques de longueur  $l_i$ . Une telle trajectoire perd un temps approximativement égal à  $l_i$  lorsqu'elle se met à suivre la géodésique fermée de longueur  $l_i$ . Il faut donc que la somme totale des longueurs des géodésiques fermées autour desquelles tourne la trajectoire soit finie, pour que cette trajectoire soit quasi-minimisante.



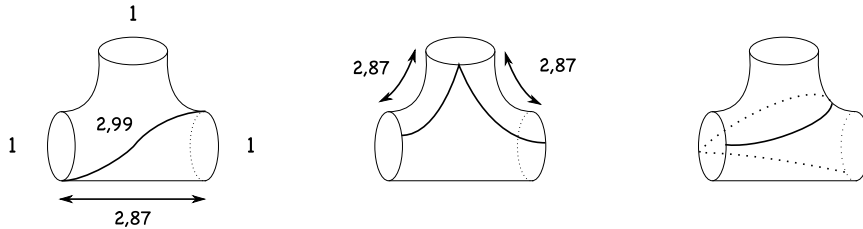
Il n'y a essentiellement pas d'autres géodésiques quasi-minimisantes. Plus précisément, toute géodésique quasi-minimisante est de cette forme à partir d'un certain temps  $t_0$ .

**Proposition**

*Soit  $\gamma$  une géodésique quasi-minimisante. Il existe un temps  $t_0 > 0$  à partir duquel la géodésique reste dans la "colonne vertébrale" de la surface, et ne traverse pas les cols délimités par deux pantalons réguliers successifs. De plus, une fois que la géodésique  $\gamma$  a coupé la géodésique de longueur  $l_i$ , elle ne coupe plus aucune des géodésiques de longueur  $l_j, j < i$ .*

**Preuve**

La distance entre deux points appartenant à deux bouts distincts d'un pantalon régulier est toujours inférieure à 2,99. la plus courte géodésique, composée de deux morceaux, passant par les trois bords du pantalon, a une longueur supérieure à 5,74. De même, une géodésique qui revient couper le bord dont elle est partie, a une longueur supérieure à 5,74.

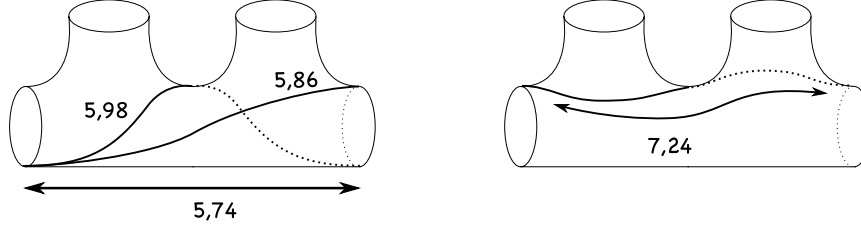


Considérons une géodésique quasi-minimisante qui pénètre au temps  $t_1$  dans un pantalon régulier par la gauche, et ressort au temps  $t_2$  par la droite. Si elle pénètre dans la partie supérieure ou si elle effectue un retour sur la gauche, on aura les



inégalités  $|t_2 - t_1| \geq 5,74$  et  $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) < 2,99$ . Ceci peut donc se produire au plus  $C/2,75$  fois, où  $C$  est la constante intervenant dans la définition d'une géodésique quasi-minimisante.

Un raisonnement similaire montre que couper la géodésique joignant les bords supérieurs de deux pantalons successifs entraîne un sur-coût au moins égal à 0.12. Ceci ne peut donc se produire qu'un nombre fini de fois.



Attention, le dessin précédent peut tromper ; le moyen le plus court de joindre les deux bords opposés des deux pantalons en passant par le col consiste à relier les bases des deux bords et non pas leurs extrémités supérieures. Ceci termine la preuve de la proposition.

## Annexe

Soit  $\tilde{M}$  une variété connexe, simplement connexe, complète, à courbure comprise entre deux constantes négatives. Soit  $\tilde{v}, \tilde{w} \in T^1\tilde{M}$  deux vecteurs unitaires. On note  $[\tilde{v}, \tilde{w}]$  le vecteur qui se trouve sur la feuille stable de  $\tilde{v}$  et tel que la géodésique issue de ce vecteur soit négativement asymptotique à celle issue de  $\tilde{w}$ . Un tel point est unique, c'est le *produit global* de  $\tilde{v}$  et  $\tilde{w}$ . On démontre dans cette annexe que ce produit possède la propriété d'uniformité suivante :

### Théorème

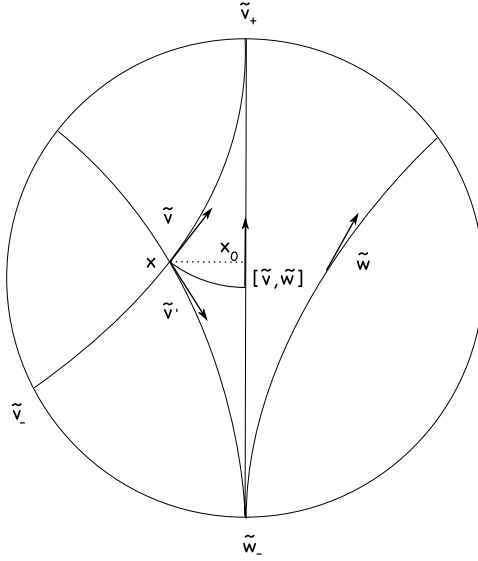
Soit  $\tilde{M}$  une variété connexe, simplement connexe, complète, à courbure comprise entre deux constantes strictement négatives. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que pour tous  $\tilde{v}, \tilde{w} \in T^1\tilde{M}$ ,

$$d(\tilde{v}, \tilde{w}) < \delta \text{ implique } d(\tilde{v}, [\tilde{v}, \tilde{w}]) < \varepsilon$$

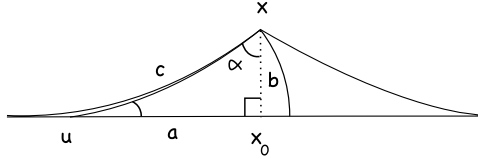
### Preuve

Soit  $x$  le point base de  $\tilde{v}$  ; notons  $\tilde{v}'$  le vecteur ayant  $x$  pour point base et qui pointe vers  $\tilde{w}_-$  sur le bord. Comme les vecteurs  $-\tilde{w}$  et  $\tilde{v}'$  pointent vers le même point du bord et que leurs points base sont proches, ils sont proches l'un de l'autre. Ils sont aussi proches de  $-\tilde{v}$  ; l'angle entre les vecteurs  $\tilde{v}'$  et  $\tilde{v}$  est donc proche de  $\pi$ .

On se place dans le triangle dont les sommets sont  $x, \tilde{v}_+$  et  $\tilde{w}_-$ . Soit  $\alpha$  l'angle en  $x$  dans ce triangle ; d'après ce qui précède, cet angle est proche de  $\pi$ . Soit  $x_0$  le point sur la géodésique dirigée par  $[\tilde{v}, \tilde{w}]$ , qui réalise la distance entre  $x$  et cette géodésique. Les deux triangles de sommets respectifs  $x, x_0, \tilde{v}_+$  et  $x, x_0, \tilde{w}_-$  sont des triangles rectangles avec un angle droit en  $x_0$ . La somme des angles dans un triangle hyperbolique est inférieure à  $\pi$ , les angles en  $x$  dans ces deux triangles sont donc inférieurs à  $\pi/2$ . Comme la somme de ces deux angles est proche de  $\pi$ , on en déduit que l'angle en  $x$  dans le triangle de sommets  $x, x_0, \tilde{v}_+$  est proche de  $\pi/2$ . Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que la distance entre  $x$  et le point base de  $[\tilde{v}, \tilde{w}]$  est petite.



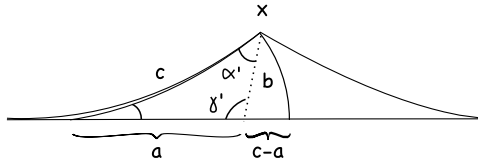
On est ramené à la situation suivante : considérons la projection  $x_0$  d'un point  $x$  sur une géodésique donnée. Choisissons un point  $u$  sur la géodésique, que nous ferons tendre vers l'infini le long de cette géodésique. Plaçons nous dans le triangle de sommets  $x$ ,  $x_0$  et  $u$ . L'angle en  $x_0$  est un angle droit. Soit  $a$  la distance entre  $u$  et  $x_0$ ,  $b$  la distance entre  $x$  et  $x_0$ ,  $c$  la distance entre  $u$  et  $x$ . Il s'agit de montrer que si l'angle  $\alpha$  en  $x$  est proche de  $\pi/2$ , alors les distances  $b$  et  $c - a$  sont petites.



Utilisons le théorème de comparaison d'Andronov-Topogonov afin de se ramener à un calcul en courbure constante. Sans perte de généralité, on peut supposer que la courbure de notre variété est majorée par  $-1$ . Considérons un triangle dans l'espace hyperbolique dont les sommets sont notés  $x$ ,  $x_0$  et  $u$ , dont les côtés sont de longueur  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les angles associés aux sommets  $x$  et  $x_0$  sont notés  $\alpha'$  et  $\gamma'$ . Ils sont plus grands que les angles correspondants dans l'espace  $\tilde{M}$ . Posons  $\alpha = \pi/2 - \varepsilon$ . On a :  $\alpha' \geq \pi/2 - \varepsilon$ ,  $\gamma' \geq \pi/2$ . En tenant compte du fait que dans un triangle, la somme des angles est inférieure à  $\pi$ , on obtient :

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \alpha' \leq \pi - \gamma' \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \gamma' \leq \pi - \alpha' \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$



Pour majorer  $b$ , on peut travailler directement avec le point  $u$  à l'infini et utiliser la relation trigonométrique mentionnée plus haut :

$$\text{sh } b = \frac{\cos \alpha' + \cos \gamma'}{\sin \alpha' \sin \gamma'} \leq \frac{\cos \alpha'}{\sin \alpha' \sin(\pi - \alpha')} \leq \frac{\cos \alpha'}{\sin^2 \alpha'}.$$

Pour majorer  $c - a$ , appliquons la loi des sinus hyperboliques :

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha'} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma'}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha'} \geq \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \frac{\operatorname{sh}(a + (c - a))}{\operatorname{sh} a} = \operatorname{ch}(c - a) + \frac{\operatorname{sh}(c - a)}{\operatorname{th} a} \geq e^{(c-a)}.$$

La quantité  $c - a$  est majorée par  $-\log(\sin \alpha')$ , ce qui permet de conclure.

## Remerciements

Nous remercions Pascal Hubert et Françoise Dal'bo pour les discussions que nous avons eu ensemble, et qui ont motivé la rédaction de cet article. Nous remercions également Sébastien Gouezël pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

## References

- [Bo95] B. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature, *Duke Math. Jour.*, Vol. 77, no 1 (1995), 229-274.
- [Bu92] P. Buser. Geometry and spectra of compact Riemann surfaces. Progress in Mathematics, 106. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [Da01] F. Dal'bo. Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 3, 981-993.
- [Eb72a] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds I. *Ann. Math. II Ser.* **95** (1972), 492-510.
- [Eb72b] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds, II, *Trans. of the A.M.S.*, Vol. 178 (1973), 57-82.
- [He36] G.A. Hedlund. Fuchsian group and transitive horocycles, *Duke Math. J.*, 2 (1936), 530-542.
- [Kl95] W. Klingenberg. Riemannian geometry. *De Gruyter Studies in Mathematics 1*, 2nd ed, 1995, 409p.
- [Le97] F. Ledrappier. Horospheres on abelian covers. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 28 (1997), no. 2, 363-375.
- [Ni89] P. J. Nicholls. The ergodic theory of discrete groups. London Mathematical Society Lecture Note Series, 143. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.