

Inégalités fonctionnelles et semi-groupes de Markov Corrigé

Exercice 1.

1) On a $h(0) = h'(0) = 0$. La formule de Taylor avec reste intégral donne, pour tout $u \geq -1$,

$$h(u) = \int_0^u (u-v)h''(v) dv = \int_0^u (u-v) \frac{1}{1+v} dv$$

Le changement de variables $t = v/u$ donne

$$h(u) = u^2 \int_0^1 \frac{1-t}{1+tu} dt.$$

Par définition de l'entropie relative, de h et de u , on a

$$\text{Ent}(\mu|\nu) = \int f \ln f d\nu = \int h(u) d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \frac{u(x)^2(1-t)}{1+tu(x)} \nu(dx) dt.$$

2) On a

$$\int_0^1 (1-t) dt \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)|u(x)| \nu(dx) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} (1-t)\varphi(x)|u(x)| dt \nu(dx),$$

que l'on peut encore écrire

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \left[\sqrt{(1-t)(1+tu(x))} \varphi(x) \right] \left[\sqrt{\frac{(1-t)}{(1+tu(x))}} |u(x)| \right] dt \nu(dx).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la première question fournissent la majoration demandée.

3) On utilise la définition de u et l'on développe :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (1-t)(1+tu(x))\varphi(x)^2 \nu(dx) dt &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (1-t)(1-t+tf(x))\varphi(x)^2 \nu(dx) dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2 \nu(x) \\ &\quad + \int_0^1 t(1-t) dt \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2 f(x) \nu(x) \\ &= \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2 \nu(x) + \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2 \mu(x). \end{aligned}$$

4) On fait apparaître l'entropie :

$$\int \varphi(x)^2 \mu(dx) = \int f(x) \ln f(x) \mu(dx) + \int \ln \left(\frac{e^{\varphi(x)^2}}{f(x)} \right) f(x) \nu(dx).$$

On utilise alors l'inégalité de Jensen pour la fonction concave \ln et la mesure μ (ou la mesure de densité f par rapport à ν) :

$$\int \ln \left(\frac{e^{\varphi(x)^2}}{f(x)} \right) f(x) \nu(dx) \leq \ln \int e^{\varphi(x)^2} \nu(dx) = L.$$

On a donc bien

$$\int \varphi(x)^2 \mu(dx) \leq H + L.$$

D'après les questions précédentes et l'inégalité de Jensen pour la fonction exponentielle, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) |u(x)| \nu(dx) \right)^2 &\leq 4H \left(\frac{1}{3} \int \varphi^2 d\nu + \frac{1}{6} \int \varphi^2 d\mu \right) \\ &\leq 4H \left(\frac{L}{3} + \frac{1}{6}(L + H) \right) \leq \left(\frac{2}{3}H + 2L \right) H. \end{aligned}$$

5) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \left(\int \varphi |u| d\nu \right)^2 &\leq \int \varphi^2 |u| d\nu \int |u| d\nu \\ &\leq \left(\int \varphi^2 d\nu + \int \varphi^2 d\mu \right) \int d\mu + \int d\nu \leq 2(H + 2L) \end{aligned}$$

6) On choisit $a = 1/3$, $b = L$ et $d = 2L$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) |u(x)| \nu(dx) \leq m \sqrt{\text{Ent}(\mu|\nu)}$$

avec

$$m = \sqrt{1 + L + \sqrt{(L-1)^2 + 8L/3}} \leq \sqrt{2}\sqrt{L+1}.$$

7) Par définition, pour deux mesures de masses finies $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}$, on a

$$\|\tilde{\mu} - \tilde{\nu}\|_{vt} = \sup_{g \text{ bornée par } 1} \left(\int g d\tilde{\mu} - \int g d\tilde{\nu} \right)$$

Si $\tilde{\mu}$ admet une densité f par rapport à $\tilde{\nu}$ alors

$$\|\tilde{\mu} - \tilde{\nu}\|_{vt} = \sup_{g \text{ bornée par } 1} \int g(f-1) d\tilde{\nu}.$$

Ce supremum borné par

$$\int |f-1| d\tilde{\nu}$$

et est atteint en choisissant $g = \text{sgn}(f-1)$. Si μ n'est pas absolument continue par rapport à ν alors il n'y a rien à montrer. Sinon, comme la mesure de densité φ par rapport à μ admet la densité f par rapport à la mesure de densité φ par rapport à ν , on a

$$\|\varphi(\mu - \nu)\|_{vt} = \int \varphi |u| d\nu \leq \sqrt{2}\sqrt{1+L}\sqrt{H},$$

ce qui est bien le théorème.

8) Soit ν une mesure admettant un moment d'ordre 1. On applique le théorème à la fonction $\varphi(x) = \sqrt{\delta}|x - x_0| \dots$

Exercice 2.

1) L'EDS est à coefficients réguliers et lipschitziens, il y a donc existence et unicité trajectorielle et en loi pour la solution.

2) On a

$$\frac{\partial H_N}{\partial x_i} = \lambda x_i + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N W'(x_i - x_j) - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N W'(x_j - x_i) = \lambda x_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W'(x_i - x_j)$$

par imparité de W' . L'EDS dans \mathbb{R}^N est donc bien de la forme

$$dX_t^N = \sqrt{2}d\mathcal{B}_t - \nabla H_N(X_t^N)dt,$$

avec $(\mathcal{B}_t)_t$ mouvement brownien sur \mathbb{R}^N .

3) Notons $\mathcal{H}(x)$ la matrice hessienne de H_N au point x . On a alors, pour tous $i \neq j$,

$$\mathcal{H}_{ii}(x) = \lambda + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W''(x_i - x_j) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{ij}(x) = -\frac{1}{N} W''(x_i - x_j).$$

La matrice $\mathcal{H}_N(x)$ est symétrique réelle. Ses valeurs propres sont donc réelles. Puisque W est convexe, W'' est positive. La matrice $\mathcal{H}_N(x)$ est donc à diagonale dominante et même

$$\mathcal{H}_{ii}(x) - \sum_{j \neq i} |\mathcal{H}_{ij}(x)| = \lambda.$$

On en déduit que le spectre de $\mathcal{H}_N(x)$ est inclus dans la demi-droite $[\lambda, +\infty[$.

On a donc

$$(x - \tilde{x}) \cdot (\nabla H_N(x) - \nabla H_N(\tilde{x})) \geq \lambda \|x - \tilde{x}\|^2.$$

Ce contrôle assure que le processus de Kolmogorov X^N vérifie le critère de courbure λ . Sa mesure invariante e^{-H_N}/Z_N vérifie donc une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $2/\lambda$ et l'entropie relative de la loi X_t par rapport à cette mesure invariante tend vers 0 à la vitesse $e^{-\lambda t}$. Remarquons que cette vitesse ne dépend pas de la taille N du système de particules.

4) D'après la formule d'Itô,

$$\left| X_t^{i,N} - \tilde{X}_t^{i,N} \right|^2 = \left| X_s^{i,N} - \tilde{X}_s^{i,N} \right|^2 - 2\lambda \int_s^t \left| X_u^{i,N} - \tilde{X}_u^{i,N} \right|^2 du - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \int_s^t A_{ij}(u) du, \quad (1)$$

avec

$$A_{ij}(u) = \left(X_u^{i,N} - \tilde{X}_u^{i,N} \right) \left(W'(X_u^{i,N} - X_u^{j,N}) - W'(\tilde{X}_u^{i,N} - \tilde{X}_u^{j,N}) \right).$$

Remarquons que, par imparité de W' ,

$$A_{ij}(u) + A_{ji}(u) = \left(X_u^{i,N} - X_u^{j,N} - (\tilde{X}_u^{i,N} - \tilde{X}_u^{j,N}) \right) \left(W'(X_u^{i,N} - X_u^{j,N}) - W'(\tilde{X}_u^{i,N} - \tilde{X}_u^{j,N}) \right) \geq 0$$

d'après la question 3. On somme (1) sur $i = 1, \dots, N$ pour obtenir,

$$\left| X_t^{i,N} - \tilde{X}_t^{i,N} \right|^2 = \left| X_s^{i,N} - \tilde{X}_s^{i,N} \right|^2 - 2\lambda \int_s^t \left| X_u^{i,N} - \tilde{X}_u^{i,N} \right|^2 du.$$

Reste à prendre l'espérance pour obtenir l'inéquation demandée. On conclut comme d'habitude avec le lemme de Gronwall. Puisque toutes les particules ont la même loi,

$$\alpha(t) = N \mathbb{E} \left(\left| X_t^{1,N} - \tilde{X}_t^{1,N} \right|^2 \right),$$

et donc

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^{1,N} - \tilde{X}_t^{1,N}\right|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\left|X_0^{1,N} - \tilde{X}_0^{1,N}\right|^2\right)e^{-2\lambda t}.$$

5) L'inégalité ci-dessus montre que pour tout couplage des lois initiales, on a

$$W_2\left(\mu_t^{(1,N)}, \tilde{\mu}_t^{(1,N)}\right) \leq \mathbb{E}\left(\left|X_0^{1,N} - \tilde{X}_0^{1,N}\right|^2\right)e^{-2\lambda t}.$$

En prenant l'infimum sur tous les couplages possibles de μ_0 et $\tilde{\mu}_0$ on obtient

$$W_2\left(\mu_t^{(1,N)}, \tilde{\mu}_t^{(1,N)}\right) \leq e^{-\lambda t}W_2(\mu_0, \tilde{\mu}_0).$$

6) On peut penser que $X^{i,N}$ converge vers le processus solution de l'EDS non linéaire

$$\begin{cases} d\bar{X}_t^i = \sqrt{2}dB_t^i - \lambda\bar{X}_t^i dt - W' * \mu_t(\bar{X}_t^i)dt, \\ \mu_t = \mathcal{L}(\bar{X}_t^i), \end{cases}$$

et que, en particulier, $\mu_t^{(1,N)}$ converge vers μ_t . Grâce à la convexité des potentiels, on pourrait attendre un résultat uniforme en temps de la forme : il existe une constante K indépendante du temps telle que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\left(\left|X_t^{i,N} - \bar{X}_t^i\right|^2\right) \leq \frac{K}{N}.$$

On peut effectivement établir ces résultats.

7) Une fois que l'on a montré que μ_t converge vers une mesure μ_∞ , les résultats ci-dessus permettent d'obtenir, grâce à l'inégalité triangulaire, la majoration suivante :

$$W_2(\mu_t, \mu_\infty) \leq W_2(\mu_0, \mu_\infty)e^{-\lambda t}.$$

Exercice 3.

1) Le processus reste en $n \in \mathbb{N}$ un temps exponentiel de paramètre $\lambda + \mu\mathbf{1}_{\{n>0\}}$ puis saute selon la mesure

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu\mathbf{1}_{\{n>0\}}}\delta_{n+1} + \frac{\mu\mathbf{1}_{\{n>0\}}}{\lambda + \mu\mathbf{1}_{\{n>0\}}}\delta_{n-1}.$$

C'est la file d'attente M/M/1. Tous les états communiquent puisque tous les états mènent à 0 et que 0 mène à tous les états. La chaîne est donc irréductible. Pour la mesure invariante, tout peut arriver...

2) Puisque le processus ne fait que des sauts de taille 1, la propriété de Markov permet d'écrire le temps T_{n0} d'atteinte de 0 partant de n comme la somme des variables aléatoires $T_{n,n-1}, \dots, T_{1,0}$ indépendantes. Comme elles ont même loi (puisque la dynamique de saut est la même pour tous les points de \mathbb{N}^* , ces v.a. ont même loi que $T_{1,0}$, et donc $L_n(\alpha) = L_1(\alpha)^n$.

Partant de 1, pour atteindre 0, il faut que X ait sauté. Donc T_0 est supérieur au premier temps de saut que nous noterons T . En utilisant à nouveau la propriété de Markov forte, on obtient

$$\mathbb{E}_1(e^{-\alpha T_0}) = \mathbb{E}_1\mathbb{E}_1((e^{-\alpha T_0}|T))$$

On discute à présent selon la valeur de X_T . Si $X_T = 0$ alors $T_0 = T$, sinon, T_0 a même loi que $T + T_{2,0}$ avec ces deux v.a. indépendantes. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1(e^{-\alpha T_0}) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}\mathbb{E}_1(e^{-\alpha T})\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\mathbb{E}(e^{-\alpha(T+T_{2,0})}) \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}\mathbb{E}_1(e^{-\alpha T})\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\mathbb{E}(e^{-\alpha T})\mathbb{E}(e^{-\alpha T_{2,0}}) \end{aligned}$$

On a déjà montré que $\mathbb{E}(e^{-\alpha T_{2,0}}) = L_1(\alpha)^2$. Reste à remarquer que T suit la loi $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$ et que donc

$$\mathbb{E}_1(e^{-\alpha T}) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + \alpha}.$$

On en déduit, en résolvant l'équation du second degré (qui a des solutions réelles au moins pour tout $\alpha > 0$) et en gardant la solution comprise entre 0 et 1 (puisque L_1 est l'espérance d'une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$), que

$$L_1(\alpha) = \frac{\lambda + \mu + \alpha - \sqrt{(\lambda + \mu + \alpha)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda},$$

et

$$L_n(\alpha) = \left(\frac{\lambda + \mu + \alpha - \sqrt{(\lambda + \mu + \alpha)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda} \right)^n.$$

3) Partant de 0, le processus saute en 1 au bout du temps $T_{0,1}$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ qui est bien sûr fini p.s. et intégrable. Le temps de retour $T_{0,0}$ en 0 s'écrit donc d'après la propriété de Markov forte comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes $T_{0,1}$ et $T_{1,0}$. On a donc

$T_{0,0}$ est fini p.s. ssi $T_{1,0}$ est fini p.s. et $T_{0,0}$ est intégrable ssi $T_{1,0}$ est intégrable.

Étudions tout d'abord la récurrence et la transience. On discute selon les cas :

$$\mathbb{P}_1(T_0 < +\infty) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} L_1(\alpha) = \frac{\lambda + \mu - |\lambda - \mu|}{2\lambda} = \begin{cases} \mu/\lambda & \text{si } \lambda > \mu, \\ 1 & \text{si } \lambda \leq \mu. \end{cases}$$

Si $\lambda > \mu$, $T_{1,0}$ n'est pas fini p.s. et il en est donc de même pour le temps de retour en 0 : le point 0 est donc transient. Le processus étant irréductible, il en est de même de tous les états. Si $\lambda > \mu$, $T_{1,0}$ n'est pas fini p.s. et 0 est donc récurrent. Le processus est récurrent.

Discutons à présent la qualité de récurrence. On cherche à savoir si $T_{1,0}$ est intégrable.

$$\mathbb{E}_1(T_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -L'_1(\alpha),$$

la limite ayant un sens dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. On trouve

$$-L'_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{2\lambda + \alpha}{\sqrt{4\lambda\alpha + \alpha^2}} - 1 \right\} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} +\infty & \text{si } \lambda = \mu, \\ \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\lambda + \mu + \alpha}{\sqrt{(\lambda + \mu + \alpha)^2 - 4\lambda\mu}} - 1 \right\} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} \left[1 - \frac{\lambda + \mu}{|\mu - \lambda|} \right] = \frac{1}{\mu - \lambda} & \text{si } \lambda < \mu. \end{cases}$$

Si $\lambda = \mu$, $T_{1,0}$ n'est pas intégrable et donc le temps de retour en 0 non plus : le processus est récurrent nul. Si $\lambda < \mu$, $T_{1,0}$ est intégrable, le temps de retour en 0 aussi et son intégrale vaut $1/\lambda + 1/(\mu - \lambda)$. Le point 0 est récurrent positif, le processus aussi.

4) Le processus admet une mesure de probabilité invariante dans le cas $\lambda < \mu$ et elle est unique par irréductibilité.

5) On fait tendre α vers $\alpha_0 = -(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2$ en remarquant que α_0 vérifie

$$(\lambda + \mu + \alpha_0)^2 - 4\lambda\mu = 0,$$

c'est-à-dire que le discriminant de l'équation du second degré considérée plus haut est nul. On a alors une racine double égale à $\sqrt{\mu/\lambda}$. Le théorème de convergence monotone fournit l'inégalité

$$\mathbb{E}_1\left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_0}\right) \leq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}.$$

6) Notons $(\nu_n)_n$ la mesure invariante (maintenant que l'on sait qu'elle existe et est unique). Elle vérifie les relations de récurrence suivantes (qui viennent de $\nu = \nu L$) :

$$\nu_{n+1} = (1 + \rho)\nu_n - \rho\nu_{n-1},$$

d'où découle le résultat : $\nu_n = (1 - \rho)\rho^{n-1}$.

7) Puisque la loi initiale de \tilde{X} est la mesure invariante, alors pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{L}(\tilde{X}_t) = G(\rho)$.

8) Par définition de la variation totale, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X_t^n) - G(\rho)\|_{vt} &= \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \mathbb{P}_n(X_t \in A) - \mathbb{P}(\tilde{X}_t \in A) \right| \\ &= \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \mathbb{E}_n(\mathbf{1}_{\{X_t \in A\}}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tilde{X}_t \in A\}}) \right| \\ &\leq \sup_{A \subset \mathbb{N}} \mathbb{E}_n \left(\left| \mathbf{1}_{\{X_t \in A\}} - \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_t \in A\}} \right| \right) \\ &\leq \sup_{A \subset \mathbb{N}} \mathbb{E}_n \left(\left| \mathbf{1}_{\{X_t \neq \tilde{X}_t\}} \right| \right) \leq \mathbb{P}_n(T_c > t). \end{aligned}$$

9) Puisque les deux processus sont indépendants avant l'instant de couplage, la probabilité qu'ils sautent en même temps est nulle. Ainsi la différence entre X et \tilde{X} est un processus à valeurs dans \mathbb{Z} ne faisant que des sauts d'amplitude 1. Si $\tilde{X}_0 < n$ alors, les deux processus se seront rencontrés avant que X ne touche 0 puisque X ne peut atteindre 0 sans passer par le site où se trouve \tilde{X} . Le raisonnement est le même dans le cas contraire.

10) On décompose l'espérance en discutant des positions initiales pour remplacer le temps de couplage par le temps d'atteinte de 0 par l'un ou l'autre des processus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_c} \right) &= \mathbb{E}_n \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_c} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_0 \leq n\}} \right) + \mathbb{E}_n \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_c} \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_0 > n\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E}_n \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_0} \right) \mathbb{P}(\tilde{X}_0 \leq n) + \mathbb{E} \left(\mathbb{E}_{\tilde{X}_0} \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_c} \right) \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_0 > n\}} \right) \end{aligned}$$

On utilise alors la majoration du moment exponentiel :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_c} \right) &\leq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \mathbb{P}(\tilde{X}_0 \leq n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \mathbb{P}(\tilde{X}_0 = k) \\ &\leq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} (1 - \rho^{n+1}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \rho^k (1 - \rho) \\ &\leq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + 2\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}. \end{aligned}$$

11) D'après l'inégalité de Markov (exponentielle),

$$\mathbb{P}_n(T_c > t) \leq \mathbb{E}_n \left(e^{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 T_c} \right) e^{-(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 t} \leq \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + 2 \right) e^{-(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 t}.$$

On conclut en utilisant la majoration de la question 8.