Université de Rennes 1 **Licence de mathématiques**
Année 2005-2006

Intégration et probabilités
Examen terminal – Corrigé

Exercice 1.

1. (1 pt) La fonction f est continue sur $]0,1]$ et tend vers 1 en 0. Elle donc intégrable sur $[0,1]$.
2. (2 pts) Puisque la fonction $u \mapsto e^u$ est developpable en série entière sur $\mathbb{C}$ et que
$$\forall u \in \mathbb{C}, \quad e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!},$$
on a en particulier, pour tout $x \in]0,1]$,
$$\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0,1] \mapsto (-x \ln x)^n / n!$ est une fonction mesurable positive donc d'après le corollaire du théorème de convergence monotone, dans $\overline{\mathbb{R}}^+$,
$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!}\, dx.$$
On obtient donc la relation souhaitée.
3. (1 pt) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, grâce à l'intégration par parties $u = (\ln x)^m$, $v' = x^n$,
$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{m}{x}(\ln x)^{m-1}\, dx \\ &= -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(\ln x)^{m-1}\, dx = -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n}. \end{aligned}$$
Puisque $I_{0,n} = 1/(n+1)$, une récurrence immédiate assure que
$$I_{m,n} = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}.$$
4. (1 pt) En particulier, pour tout $n \geq 1$,
$$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$
Ainsi, d'après la question 2,
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_{n,n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n},$$
ce qui est le résultat demandé.

Exercice 2. *Équation de la chaleur*

1. (1 pt) Fixons $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ et posons $v = (y-x)/\sqrt{t}$ ou $y = x + v\sqrt{t}$:
$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+\sqrt{t}v) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \frac{dv}{\sqrt{2\pi}}$$
Par définition de l'espérance par rapport à une loi à densité, on a encore que $u(t,x)$ est égal à $\mathbb{E}\big[f(x+\sqrt{t}Y)\big]$ avec Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. (4 pts) La fonction u est positive car l'intégrale d'une fonction positive est positive. Pour tout $t > 0$, la fonction
$$\varphi_t \ : \ (x,y) \mapsto f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$
est continue sur $\mathbb{R}^2$ et
$$|\varphi_t(x,y)| = \varphi_t(x,y) \leq \frac{f(y)}{\sqrt{2\pi t}}$$
qui est une fonction intégrable en y qui ne dépend pas du paramètre x. La fonction $x \mapsto u(t,x)$ est donc continue. Enfin, d'après le théorème de Tonelli,
$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, dx\right] dy.$$
Or, à y fixé, le changement de variables $v = (x-y)/\sqrt{t}$ assure que
$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$
Ainsi,
$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, dy = 1.$$
3. (3 pts) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit $0 < a < b$. La fonction
$$(t,y) \mapsto f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$
est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t de dérivée
$$f(y)\left[\frac{(x-y)^2}{2t^2} - \frac{1}{2t}\right] \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.$$
Le module de cette fonction est majoré uniformément en $t \in [a,b]$ par
$$f(y)\left[\frac{(x-y)^2}{2a^2} + \frac{1}{2a}\right] \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2b}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$$
qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ (en y). Donc u est admet une dérivée partielle continue en t égale à
$$\partial_t u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{(x-y)^2}{2t^2} - \frac{1}{2t}\right] \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}$$
pour tout $t \in]a,b[$ et donc pour tout $t > 0$.

4. (1 pt) On pourrait montrer de même que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ses deux variables et que ces dérivées partielles sont les intégrales des derivées partielles de la fonction sous l'intégrale. En particulier,

$$\partial_x u(t,x) = -\int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{(x-y)}{t}\right] \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}$$

et

$$\partial^2_{xx} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{(x-y)^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right] \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}$$

On remarque donc que $\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} u(t,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

5. (1 pt) Par croissance de l'intégrale, $u(t,x) \leq M$. Soit x fixé. La fonction

$$(t,v) \mapsto f(x + \sqrt{t}v) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, vaut $f(x)$ pour $t = 0$ et est bornée par

$$M \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

qui est intégrable par rapport à la mesur ede Lebesque sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Lebesgue de continuité d'une intégrale à paramètre,

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x + \sqrt{t}v) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \frac{dv}{\sqrt{2\pi}}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers $f(x)$ quand t tend vers 0. D'après la question 1, cette fonction est encore la fonction u d'où le résultat.

6. (1 pt) Une fonction positive et intégrable pour la mesure de Lebesgue n'est pas nécessairement bornée et ce même si elle est continue sur $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une fonction ■tente■ avec des pics centrés en les entiers strictement positifs de base $[n - 1/n^3, n + 1/n^3]$ et de hauteur n...

Exercice 3.

1. (a) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$L_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-t)^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2},$$

grâce au changement de variables $u = x - t$ avec t fixé.

(b) Soit $Y_i = X_i^2 e^{X_i}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Les variables aléatoires $(Y_i)_i$ sont indépendantes, identiquement distribuées et positives. L'espérance de Y_1 a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ comme intégrale d'une application mesurable positive. Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_1) &= \mathbb{E}(X_1^2 e^{X_1}) = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^x e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. = e^{1/2} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-(x-1)^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{1/2} \int_{\mathbb{R}} (u+1)^2 e^{-u^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 2e^{1/2}. \end{aligned}$$

La dernière égalité s'établit en developpant le carré : le terme quadratique est la variance de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (il vaut 1), le terme linéaire est son espérance (il vaut 0) et le terme constant vaut 1.

D'après la loi forte des grandes nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{X_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2e^{1/2}.$$

2. (a) La fonction de répartition est donnée par

$$F_{Y_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

De plus, $\mathbb{E}(Y_1) = 1/2$ et $\mathbb{V}(Y_1) = 1/3 - 1/4 = 1/12$.

(b) Notons $U_i = \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq 1\}}$. Les variables aléatoires $(U_i)_i$ sont indépendantes, positives et de même loi. De plus, d'après le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_1) &= \mathbb{P}(Y_1 + Z_1 \leq 1) = \int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\{y+z\leq 1\}}\, dy\, dz = \int_{[0,1]} \left[\int_0^{1-y} dx\right] dy \\ &= \int_0^1 (1-y)\, dy = \left[\frac{(1-y)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La loi forte des grands nombres assure alors que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq 1\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \frac{1}{2}.$$