Université de Rennes 1 **Licence de mathématiques**
Année 2005-2006

Intégration et probabilités
Examen terminal

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Un barème indicatif est donné pour chaque exercice.

On rappelle que la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Exercice 1. *(5 pts)*
On souhaite montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

On précisera les théorèmes du cours utilisés.

1. Montrer que l'intégrale ci-dessus est bien définie en étudiant le comportement de la fonction

$$f \;:\; x \in]0,1[\mapsto \frac{1}{x^x} = e^{-x\ln x}.$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\, dx.$$

3. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^m\, dx.$$

Montrer, par récurrence sur m, que

$$I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

4. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 2. *Équation de la chaleur (11 pts)*
Soit f une fonction continue, positive, intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$. La fonction f n'est pas supposée dérivable. Pour tout $t > 0$, on pose

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}.$$

1. Montrer que si Y est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, u peut aussi s'écrire

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+\sqrt{t}y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \mathbb{E}\Big[f(x+\sqrt{t}Y)\Big].$$

2. Montrer que, pour tout $t > 0$, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto u(t,x)$ est continue, positive, intégrable et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est dérivable par rapport à la variable t et calculer sa dérivée partielle $\partial_t u$. On détaillera la démonstration et les théorèmes utilisés.
4. Calculer sans justification la dérivée seconde $\partial^2_{xx} u$ de cette fonction par rapport à x. Quel est le lien entre $\partial^2_{xx} u$ et $\partial_t u$?
5. On suppose dans cette question que f est bornée par une constante M finie. Montrer qu'il en est de même pour la fonction $x \mapsto u(t,x)$ pour tout $t > 0$. Déterminer la limite de $u(t,x)$ quand t tend vers 0. En déduire que la fonction u est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \dfrac{1}{2}\,\partial^2_{xx} u(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(t,x) \xrightarrow[t\to 0]{} f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. Une fonction positive et intégrable (pour la mesure de Lebesgue) est-elle bornée sur $\mathbb{R}$ (on donnera une preuve ou un contre-exemple de cette assertion) ?
7. **(Question hors barème)** On ne suppose plus que f est bornée. Montrer que le résultat de la question précédente persiste.

Exercice 3. *(7 pts)*

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Déterminer la transformée de Laplace de X_1 définie par $L_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1})$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{X_i}$$

   converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.
   (a) Donner la fonction de répartition, l'espérance et la variance de Y_1.
   (b) Quel est le comportement, lorsque n tend vers l'infini, de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq 1\}} \ ?$$