

Intégration et probabilités - Terminal - Corrigé

Exercice 1.

1. Pour tous a et b réels, on a $2|ab| \leq a^2 + b^2$. Donc

$$|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2) \quad \text{et} \quad \int_E |fg| d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\int_E f^2 d\mu + \int_E g^2 d\mu \right) < +\infty.$$

La fonction fg est donc intégrable.

2. L'intégrale d'une fonction positive appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. De plus, par linéarité de l'intégrale, puisque f^2 , fg et g^2 sont intégrables,

$$\int_E (f + \alpha g)^2 d\mu = \int_E f^2 d\mu + 2\alpha \int_E fg d\mu + \alpha^2 \int_E g^2 d\mu.$$

3. Le discriminant (réduit) du trinôme ci-dessus est donc toujours négatif :

$$\Delta' = \left(\int_E fg d\mu \right)^2 - \int_E f^2 d\mu \int_E g^2 d\mu \leq 0$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Exercice 2.

1. La fonction $t \mapsto e^{xt}/(e^t + e^{-t})$ est continue sur \mathbb{R} , équivalente à $e^{(x-1)t}$ en $+\infty$ et à $e^{(x+1)t}$ en $-\infty$. Elle donc intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $x \in]-1, 1[$. En d'autres termes, $L(x)$ est fini si et seulement si $x \in J$ (si $x \notin J$, $L(x) = +\infty$).

2. La fonction $F : (t, x) \mapsto e^{tx}/\text{ch}(t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ en ses deux variables. De plus,

$$\partial_x F(t, x) = \frac{te^{tx}}{\text{ch } t} \quad \text{et} \quad \partial_{xx}^2 F(t, x) = \frac{t^2 e^{tx}}{\text{ch } t}.$$

Soit $A \in]0, 1[$. Puisque

$$\sup_{x \in [-A, A]} |\partial_x F(t, x)| \leq \frac{|t|e^{A|t|}}{\text{ch } t} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [-A, A]} |\partial_{xx}^2 F(t, x)| \leq \frac{t^2 e^{A|t|}}{\text{ch } t}$$

et ces deux fonctions majorantes sont intégrables sur \mathbb{R} . La fonction L est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $] - A, A[$ et

$$\forall x \in] - A, A[, \quad L'(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} t \frac{e^{tx}}{\text{ch } t} dt \quad \text{et} \quad L''(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} t^2 \frac{e^{tx}}{\text{ch } t} dt.$$

Ce résultat étant vrai pour tout $0 < A < 1$, L est de classe \mathcal{C}^2 sur J .

3. Pour tout $x \in J$, $L''(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive intégrable donc $L''(x)$ est un réel positif : L est convexe sur J . De plus,

$$(\ln L(x))'' = \frac{L''(x)L(x) - L'(x)^2}{L(x)^2}.$$

Or,

$$L'(x)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{tx/2}}{\sqrt{\pi} \text{ch } t} \frac{e^{tx/2}}{\sqrt{\pi} \text{ch } t} dt \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 e^{tx}}{\pi \text{ch } t} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{tx}}{\pi \text{ch } t} dt \right) = L''(x)L(x),$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, $\ln L$ admet une dérivée seconde positive, c'est donc une fonction convexe.

4. On applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions mesurables positives $(f_n)_n$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{tx_n}}{e^t + e^{-t}}.$$

et on en déduit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} L(x_n) \geq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{e^{x_n t}}{e^t + e^{-t}} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\pi} \frac{e^t}{e^t + e^{-t}} dt = +\infty.$$

Donc $L(x_n)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers ∞ et $L(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

5. On fait le changement de variables $v = (1-x)t$ pour obtenir

$$L(x) = \frac{2}{\pi(1-x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xv/(1-x)}}{e^{v/(1-x)} + e^{-v/(1-x)}} dv = \frac{2}{\pi(1-x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-v}}{1 + e^{-2v/(1-x)}} dv$$

6. Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $]0, 1[$ qui converge vers 1, on a

$$\frac{e^{-v}}{1 + e^{-2v/(1-x_n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} e^{-v} & \text{si } v > 0, \\ 1/2 & \text{si } v = 0, \\ 0 & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

De plus, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{e^{-v}}{1 + e^{-2v/(1-x)}} \leq e^{-v} \mathbf{1}_{\{v \geq 0\}} + \frac{e^{-v}}{e^{-2v/(1-x)}} \mathbf{1}_{\{v < 0\}} \leq e^{-v} \mathbf{1}_{\{v \geq 0\}} + e^v \mathbf{1}_{\{v < 0\}} = e^{-|v|}$$

et la fonction $v \mapsto e^{-|v|}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Le théorème de convergence dominée assure donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-v}}{1 + e^{-2v/(1-x_n)}} dv = \int_{\mathbb{R}} e^{-v} \mathbf{1}_{\{v > 0\}} dv = 1.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)L(x) = \frac{2}{\pi}.$$

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(T)) &= \mathbb{E}(f(\ln |X|)) = \int_{\mathbb{R}} f(\ln |x|) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_-^*} f(\ln |x|) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\mathbb{R}_+^*} f(\ln |x|) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_-^*} f(\ln(-x)) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\mathbb{R}_+^*} f(\ln x) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Dans les deux intégrales ci-dessus, on fait les changements de variables respectifs suivants : $t = \ln(-x)$ et $t = \ln x$ pour obtenir

$$\mathbb{E}(f(T)) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+e^{2t}} e^t dt + \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+e^{2t}} e^t dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt,$$

ce qui est le résultat demandé.

8. D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}(|T|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|t|}{\pi \operatorname{ch} t} dt < +\infty.$$

La v.a. T est donc intégrable. La densité de sa loi est paire donc $\mathbb{E}(T) = 0$. La variance de T est donc donnée par

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{\operatorname{ch} t} dt,$$

qui n'est pas simple à calculer... Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L(x) = \mathbb{E}(e^{xT})$.

9. On a

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{\pi \operatorname{ch} t} dt.$$

Donc, d'après la question 2, $\mathbb{E}(T^2) = L''(0)$. D'après la forme explicite de L , on a $L''(0) = \pi^2/4$. Puisque $\mathbb{E}(T) = 0$, la variance de T est égale à $\mathbb{E}(T^2)$ et donc $\mathbb{V}(T) = \pi^2/4$.

10. Puisque T_1 est intégrable d'espérance nulle, la suite $(S_n/n)_n$ converge vers 0 presque sûrement en vertu de la loi des grands nombres.

11. Soit $r > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$, alors en utilisant successivement la croissance de l'application $x \mapsto e^{\lambda x}$, l'inégalité de Markov, le fait que les v.a. $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d. et la forme explicite de L , on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda nr}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda nr}} \leq e^{-n\lambda r} L(\lambda)^n \leq e^{-n(r\lambda + \ln \cos(\pi\lambda/2))}.$$

Il ne reste plus qu'à optimiser en λ . La fonction

$$\lambda \in]0, 1[\mapsto r\lambda + \ln \cos(\pi\lambda/2)$$

est minimale en λ_r solution de $r - \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi\lambda_r}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire pour $\lambda_r = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2r}{\pi}\right) \in]0, 1[$. Donc, pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-nI(r)},$$

avec

$$I(r) = r\lambda + \ln \cos(\pi\lambda_r/2) = \frac{2r}{\pi} \arctan\left(\frac{2r}{\pi}\right) + \ln \cos\left(\arctan\left(\frac{2r}{\pi}\right)\right).$$

Exercice 3.

1. La v.a. X est à valeurs dans \mathbb{N}^* . Donc $F_X(t) = 0$ pour tout $t < 1$. Soit $t \geq 1$ alors

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq [t]) = \sum_{k=1}^{[t]} p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^{[t]}.$$

La variable aléatoire Y est positive. Donc $F_Y(t) = 0$ pour tout $t < 0$. De plus, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. D'après le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq Y) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \leq Y\}}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x \leq y\}} \mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x \leq y\}} \mathbb{P}_X(x) dP_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{k \leq y\}} p(1-p)^{k-1} \mathbf{1}_{\{y > 0\}} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \int_k^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k} \\ &= \frac{pe^{-\lambda}}{1 - (1-p)e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, par indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X = k, Y > k) + \mathbb{P}(X = k, Y = k) + \mathbb{P}(X > k, Y = k) \\ &= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k) + \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y = k) \\ &= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k) = p(1-p)^{k-1}e^{-\lambda k}, \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{P}(Y = y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

4. Soit $l \in \mathbb{N}$ et a et b deux réels tels que $l < a < b < l + 1$. On a, puisque X est à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \mathbb{P}(a < Y < b, X \geq l + 1) = \left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right)(1-p)^l.$$