

## Intégration et probabilités - Terminal

Les documents et calculatrices sont interdits. On pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

### Exercice 1.

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  de carré intégrable.

1. Montrer que la fonction  $fg$  est intégrable (penser aux identités remarquables).
2. Montrer que la fonction

$$\alpha \mapsto \int_E (f + \alpha g)^2 d\mu$$

est un polynôme positif de degré 2.

3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_E fg d\mu \leq \left( \int_E f^2 d\mu \right)^{1/2} \left( \int_E g^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

### Exercice 2.

On note  $J = ]-1, 1[$ . On définit la fonction  $L$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xt}}{\operatorname{ch} t} dt = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xt}}{e^t + e^{-t}} dt.$$

#### Partie I

1. Montrer que, pour tout  $x \in J$ ,  $L$  est finie. Que dire de  $L(x)$  pour  $x \notin J$ ?
2. Montrer que la fonction  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $J$  et exprimer ses deux premières dérivées sous forme intégrale.
3. En déduire que les fonctions  $L$  et  $\ln L$  sont convexes sur  $J$ . On pourra utiliser l'exercice 1.

Note culturelle : on dit qu'une fonction  $f$  est log-convexe sur un intervalle  $K$  si la fonction  $\ln f$  est convexe sur  $K$ .

4. Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $J$  qui converge vers 1. Quelle est la limite de la suite  $(L(x_n))_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ? En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^-} L(x)$ .
5. Montrer que, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$L(x) = \frac{2}{\pi(1-x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-v}}{1 + e^{-2v/(1-x)}} dv.$$

6. En déduire la limite de  $(1-x)L(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

#### Partie II

Soit  $X$  une v.a. de loi de Cauchy, c'est-à-dire dont la loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

7. Montrer que la loi de la v.a.  $T = \ln |X|$  admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction

$$t \mapsto \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

8. La variable aléatoire  $T$  est-elle intégrable? Si oui, que vaut son espérance? Sa variance est-elle aussi facile à calculer? Quel est le lien entre les fonctions  $x \mapsto \mathbb{E}(e^{xT})$  et  $x \mapsto L(x)$ ?

On admet dans la suite que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad L(x) = \frac{1}{\cos(\pi x/2)}.$$

9. Exprimer  $\mathbb{E}(T^2)$  en fonction de  $L''$ . En déduire la variance de  $T$ .

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. i.i.d. de même loi que  $T$ . On note  $S_n = T_1 + \dots + T_n$ .

10. Que dire de la suite  $(S_n/n)_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini?

11. Soit  $r > 0$ . Montrer que, pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ ,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \leq e^{nr\lambda}\right) \leq e^{-n(r\lambda + \ln \cos(\pi\lambda/2))}.$$

En déduire que  $\mathbb{P}(S_n/n \geq r) \leq e^{-nI(r)}$ , où  $I$  est une fonction que l'on choisira le plus astucieusement possible.

### Exercice 3.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{G}(p)$  et  $\mathcal{E}(\lambda)$ . On note  $Z = \min(X, Y)$ .

1. Calculer les fonctions de répartition de  $X$  et  $Y$ .

2. Montrer que  $\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - (1-p)e^{-\lambda}}$ .

3. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer la probabilité  $\mathbb{P}(Z = k)$ .

4. Soit  $l \in \mathbb{N}$  et  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $l < a < b < l + 1$ . Calculer  $\mathbb{P}(a < Z < b)$ .

### Rappels.

On dit que  $U$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(r)$  de paramètre  $r \in ]0, 1[$  si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(U = k) = r(1-r)^{k-1}.$$

On a alors  $\mathbb{E}(U) = 1/r$ .

On dit que  $V$  suit la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda > 0$  si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction  $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$ .