Intégration et probabilités - TD 9

Exercice 1. *Indépendance et incompatibilité*
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux évènements disjoints soient indépendants.

Exercice 2. *Indépendance de variables discrètes*
Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. On suppose que, pour tout (i,j), $\mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = u_i v_j$. Trouver les lois marginales et montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 3. ♣ *Variables géométriques indépendantes*
Soient X et Y deux v.a. indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Z = Y - X$ et $M = \min(X,Y)$.

1. Montrer que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = \mathbb{P}(X = m - z)\,\mathbb{P}(Y = m), \qquad \text{si } z < 0,$$

$$\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = \mathbb{P}(X = m)\,\mathbb{P}(Y = m + z), \qquad \text{si } z \geq 0.$$

2. En déduire que , pour tout $(m,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = p^2(1-p)^{2m-2}(1-p)^{|z|}$.

3. Montrer que M et Z sont indépendantes.

Exercice 4.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X et Y sont de carré intégrable. Déterminer la moyenne et la variance de $3X - 5Y$.

Exercice 5. *Variables aléatoires exponentielles indépendantes*
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. On note $Z = \min(X,Y)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z et en déduire sa loi.

2. Montrer $\mathbb{P}(Z = X) = \lambda/(\lambda + \mu)$.

Exercice 6. *Lois jointes du minimum et du maximum*
Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité p.

1. Déterminer la loi du couple $(M,m) = (\max(X,Y), \min(X,Y))$. Quelles sont les lois marginales ?

2. Est-ce cohérent avec le cas de (X,Y) v.a. indépendantes, de même loi ayant une fonction de répartition F_X de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Quelle est la loi du couple $(M+m, M-m)$?

Exercice 7. *Indépendance et convolution*
Soient X et Y deux v.a. indépendantes de densités respectives p et q. Trouver la densité de $S = X + Y$. Qu'obtient-on si X et Y suivent respectivement les lois $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$ $(\lambda > 0,\ \mu > 0)$?

Exercice 8. *Sommes classiques de v.a. indépendantes*
Soient X et Y deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de la v.a. $X + Y$ dans les cas suivants :

1. X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, Y de loi $\mathcal{P}(\mu)$;
2. X de loi $\mathcal{B}(n,p)$, Y de loi $\mathcal{B}(m,p)$;
3. X de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, Y de loi $\mathcal{N}(\mu',\sigma'^2)$.

Exercice 9. *Interprétation probabiliste de la loi binomiale*
Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$? En déduire la moyenne et la variance de S.

Exercice 10. *Somme aléatoire de v.a.*
Soient X_1,..., X_n et N des variables indépendantes. N est de loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$ et X_1, ..., X_n sont identiquement distribuées.

On pose pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Déterminer la fonction caractéristique de Y en fonction de celle de X_1.

Exercice 11. ♣
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note F la fonction de répartition de X_1 et G la fonction génératrice de N.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire $Z_k = \max(X_1,\ldots,X_k)$.

   (a) Exprimer la fonction de répartition H_k de Z_k en fonction de F.

   (b) Déterminer $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[Z_k]$ lorsque X_1 est de loi uniforme sur $[0,1]$.

   (c) Comparer la variable aléatoire Z_k aux variables aléatoires X_1 et $X_1 + \cdots + X_k$. En déduire que Z_k est intégrable si et seulement si X_1 l'est.

   (d) On suppose que $\mathbb{E}\left[X_1\right] < +\infty$ et on note

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ F(t) = 1\}, \quad \inf\emptyset = +\infty.$$

   Remarquer que $\tau \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et montrer que $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left[Z_k\right] = \tau$.

2. On considère la variable aléatoire définie par

$$Z(\omega) = \max\left(X_1(\omega),\ldots,X_{N(\omega)}(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega.$$

   (a) Soit H la fonction de répartition de Z. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad H(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N = k)\, H_k(t).$$

   En déduire une expression de H en fonction de F et G.

   (b) Expliciter H lorsque X_1 est de loi uniforme sur $[0,1]$ et N de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

   (c) Montrer que dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ on a

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N = k)\, \mathbb{E}[Z_k].$$

   En déduire que si X_1 et N sont intégrables Z l'est aussi.