

Intégration et probabilités - TD 10

Exercice 1. Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d.

1. On suppose que $\mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) < 1$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{P}(\{|X_1| \geq \alpha\}) > 0$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| \geq \alpha\}) = 1$ et en déduire que $\mathbb{P}(\{\lim_n X_n = 0\}) = 0$.

2. (a) Montrer que

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\{|X_1| > t\}) dt.$$

En déduire que X_1 est intégrable si et seulement si $\sum_k \mathbb{P}(\{|X_1| > k\}) < +\infty$.

(b) Montrer que X_1 est intégrable si et seulement si $\mathbb{P}(\limsup\{X_n > n\}) = 0$. En déduire que lorsque X_1 est intégrable, on a, presque sûrement, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} X_n \leq 1$.

Exercice 2. Loi des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}(1, 3)$.

1. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i e^{X_i}$$

converge presque sûrement et déterminer sa limite.

2. Même question avec la suite de terme général

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{X_1^2 + \dots + X_n^2}.$$

Exercice 3. Loi des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. intégrables. On note,

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n = \left(\prod_{i=1}^n e^{X_i} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Déterminer la limite presque sûre de la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 4. Estimation de la variance

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable.

1. Montrer que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1])^2 = \text{Var}(X_1).$$

2. On note, pour $n \geq 1$, $M_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ et

$$V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2.$$

- (a) Calculer la variance de V_n .
- (b) Déterminer la limite presque sûre de la suite $(V_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre $p \in [0, 1]$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_1 = -1\}) = p$. On note dans la suite $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- 1. Montrer que, si $p \neq 1/2$, $(|S_n|)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $+\infty$.
- 2. On suppose désormais que $p = 1/2$. Soit $\alpha > 0$.
 - (a) Calculer $\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]$ puis $\mathbb{E}[e^{\alpha S_n}]$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[(\operatorname{ch} \alpha)^{-n} e^{\alpha S_n}] = 1$.
 - (b) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} \alpha)^{-n} e^{\alpha S_n} = 0, \quad p.s.$$

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$f_n(x) = e^{-nx} \sum_{k \geq 0} f(k/n) \frac{(nx)^k}{k!}.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre $x > 0$. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- 1. Déterminer la loi de S_n . En déduire que $f_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n/n)]$.
- 2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f sur $]0, +\infty[$.