

Intégration et probabilités - TD 1

Exercice 1. Réunion et intersection dénombrables

1. Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[k - \frac{1}{n+1}, k + \frac{1}{n}\right].$$

2. Soit (f_n) et f des applications de E dans \mathbb{R} . Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i \geq k} \left\{ x \in E, |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Exercice 2. ♣ Ensemble de convergence

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables de E dans \mathbb{C} . Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E, \text{ la suite } (f_n(x))_n \text{ est convergente}\}$$

est un élément de \mathcal{A} . Indication : \mathbb{C} est c-----t.

Exercice 3. Points de discontinuité d'une fonction croissante

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Montrer que f admet des limites à gauche $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ et à droite $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ finies en tout point.
- Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Indication : considérer, pour $n \geq 1$, les ensembles $A_n = \left\{ x \in [-n; n] ; \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \geq \frac{1}{n} \right\}$.

Exercice 4. ♣ Limite supérieure de suites

Soient (a_n) et (b_n) des suites de \mathbb{R} minorées par une constante. Montrer que $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$. Donner un exemple de suites bornées pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte. Que dire de $\limsup(a_n - b_n)$?

Exercice 5.

Donner un exemple de suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n , A_n est (de cardinal) infini et $\bigcap_n A_n = \emptyset$.

Exercice 6. Image et image réciproque

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F .

- Montrer que pour toute partie Y de F , on a $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$. Donner des exemples d'applications $f : E \rightarrow F$ et de partie X de E telles que

$$(i) f(X^c) \subset f(X)^c, \quad (ii) f(X^c) \supset f(X)^c, \quad (iii) \text{ aucune inclusion n'est satisfaite.}$$

- Soient $(X_i)_{i \in I}$ (resp. $(Y_i)_{i \in I}$) une famille de partie de E (resp. F). Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i).$$

Montrer que la dernière inclusion est en général stricte et qu'il y a égalité si f est injective.

Exercice 7. Fonction indicatrice

Soit E un ensemble, $A, B, (A_i)_{i \in I}$ des parties de E .

- Déterminer $\mathbf{1}_{\emptyset}$, $\mathbf{1}_E$ et calculer $\mathbf{1}_A^{-1}(J)$ pour $J \subset \mathbb{R}$.

2. Montrer que

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B \text{ et } A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \quad (ii) \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \text{ et } \mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A,$$

$$(iii) \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad (iv) \mathbf{1}_{A \Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|.$$

3. Montrer que $\mathbf{1}_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \sup_{i \in I} \mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \inf_{i \in I} \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 8. Exemples de tribu

Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble $\{-a ; a \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; A = -A\}$ est une tribu sur \mathbb{R} .
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que la tribu image-réciproque est \mathcal{A} .
3. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Exercice 9. Tribu trace

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et $B \subset E$. Montrer que $\mathcal{A}_B = \{B \cap A ; A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur B rendant l'injection canonique mesurable. Montrer en outre que si $B \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_B = \{A \in \mathcal{A} ; A \subset B\}$.

Exercice 10. Tribu produit engendrée

Soit (E, \mathcal{A}) et (F, \mathcal{B}) deux espaces mesurables. On suppose que \mathcal{A} est engendrée par \mathcal{E} ($\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$) et \mathcal{B} est engendrée par \mathcal{F} ($\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$). On suppose de plus que $E \in \mathcal{E}$ et $F \in \mathcal{F}$. Montrer que la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur $E \times F$ est engendrée par les ensembles qui s'écrivent $A \times B$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 11. ♣

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et f, g des applications mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ muni de la tribu borélienne. On souhaite montrer que les ensembles suivants appartiennent à \mathcal{A} :

$$A = \{x \in E, f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in E, f(x) \leq g(x)\}, \quad C = \{x \in E, f(x) = g(x)\}.$$

1. Montrer que A s'écrit encore $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E ; f(x) < q < g(x)\}$. En déduire que la tribu \mathcal{A} contient A .
2. En déduire que B et C appartiennent également à \mathcal{A} .

Exercice 12.

Montrer que la fonction suivante est discontinue sur \mathbb{Q} est continue sur \mathbb{Q}^c :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux,} \\ 0 & \text{si } x \text{ irrationnel.} \end{cases}$$

Exercice 13. Algèbre des fonctions étagées

Montrer que l'ensemble des fonctions étagées de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est une algèbre. On écrira notamment la stabilité par addition et multiplication.