Université de Rennes 1 **Licence de Mathématiques**
Année 2005-2006

Intégration et probabilités
Examen de deuxième session
Corrigé

Exercice 1.
Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) := \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}.$$

Puisque la fonction $u \mapsto |\sin(u)/u|$ est bornée par 1, on a :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(x/n)}{x/n}\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{x}{1+x^2}.$$

La fonction $x \mapsto x/(1+x^2)$ est intégrable sur $[0,1]$. Enfin, puisque $\sin(u)/u$ tend vers 1 quand u tend vers 0, on a, pour tout $x \in]0,1]$,

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{1+x^2},$$

et c'est également vrai pour $x=0$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Cette intégrale se calcule aisément :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 2.

1. La fonction f est continue et positive sur $]0,+\infty[$, tend vers $1/b$ en 0 et est équivalente en $+\infty$ à xe^{-ax}. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $a>0$.
2. Grâce au développement de la série géométrique (puisque $e^{-bx} \in]0,1[$ pour $x>0$), on a

$$\frac{1}{1-e^{-bx}} = \sum_{n\geq 0} e^{-nbx} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} xe^{-(a+nb)x}.$$

C'est une série de fonctions positives donc (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$),

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} xe^{-(a+nb)x}\,dx \overset{\text{IPP}}{=} \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(a+bn)^2},$$

ce qui est le résultat escompté.

Exercice 3.
Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+)$ soit fini. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$L_\mu(\lambda) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{\lambda x}\, \mu(dx) \in [0, +\infty].$$

On note D_μ l'ensemble sur lequel L_μ est fini.

1. – La fonction $x \mapsto e^{(\lambda-\alpha)x}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\lambda < \alpha$ donc $D_{\mu_1} =]-\infty, \alpha[$. De plus, pour $\lambda < \alpha$,

$$L_{\mu_1}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-(\alpha-\lambda)x}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda}.$$

   – De manière évidente, $D_{\mu_2} = \mathbb{R}$ et

$$L_{\mu_2}(\lambda) = \frac{1}{2}e^\lambda + \frac{1}{2}.$$

   – De même, $D_{\mu_2} = \mathbb{R}$ et

$$L_{\mu_3}(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} e^{\lambda k} = \exp\left(e^\lambda\right).$$

2. Puisque, pour tout $x > 0$ la fonction $\lambda \mapsto e^{\lambda x}$ est croissante et que l'intégrale est croissante, la fonction L_μ l'est aussi. Plus précisément, si $\lambda \leq \lambda'$ alors $L_\mu(\lambda) \leq L_\mu(\lambda')$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. L'ensemble D_μ est donc une demi-droite. De plus $L_\mu(0)$ est égal à $\mu(\mathbb{R}_+)$ qui est fini par hypothèse donc D_μ contient $]-\infty, 0]$. Cette demi-droite peut être ouverte (voir μ_1 à la question précédente). Elle peut être restreinte à $]-\infty, 0]$ (et donc fermée). En effet, si μ est la mesure de densité $x \mapsto 1/(1+x^2)\mathbf{1}_{\{x>0\}}$, $L_\mu(\lambda) = +\infty$ pour tout $\lambda > 0$.
3. Soit λ_0 appartenant à l'intérieur de D_μ. Alors il existe $\lambda_1 \in D_\mu$ tel que $\lambda_0 < \lambda_1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_n telle que

$$0 \leq x^n e^{\lambda_0 x} \leq c_n e^{\lambda_0 x} + e^{\lambda_1 x}$$

   qui est une fonction μ intégrable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{\lambda_0 x}$ est μ-intégrable.
4. La fonction $(\lambda, x) \mapsto e^{\lambda x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overset{\circ}{D}_\mu \times \mathbb{R}_+$. De plus, sa dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à λ est $x^n e^{\lambda x}$ qui est μ intégrable. Donc L_μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intérieur de D_μ et

$$L_\mu^{(n)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^n e^{\lambda x}\, \mu(dx).$$

5. Méthode 1. Soit $s \in]0, 1[$ et λ_0 et λ_1 deux éléments de D_μ. Puisque la fonction exponentielle est convexe, on a

$$\begin{aligned} L_\mu(s\lambda_0 + (1-s)\lambda_1) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{(s\lambda_0 + (1-s)\lambda_1)x}\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} se^{\lambda_0 x} + (1-s)e^{\lambda_1 x}\, dx = sL_\mu(\lambda_0) + (1-s)L_\mu(\lambda_1), \end{aligned}$$

   ce qui assure que L_μ est convexe.

   Méthode 2. D'après la question précédente, L_μ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur D_μ et si $\lambda \in \overset{\circ}{D}_\mu$ alors

$$L''_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{\lambda x}\, dx \geq 0,$$

   ce qui assure que L_μ est convexe.

6. Soit $s \in]0,1[$ et $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathring{\mu}$. Appliquons l'inégalité de Hölder aux réels conjugués $1/s$ et $1/(1-s)$ et aux fonctions $e^{s\lambda_0 \cdot} \in L_\mu^{1/s}$ et $e^{(1-s)\lambda_1 \cdot} \in L_\mu^{1/(1-s)}$:

$$\begin{aligned} L(s\lambda_0 + (1-s)\lambda_1) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{s\lambda_0 x} e^{(1-s)\lambda_1 x} \, \mu(dx) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{\lambda_0 x} \, \mu(dx) \right)^s \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{\lambda_1 x} \, \mu(dx) \right)^(1-s) = L(\lambda_0)^s L(\lambda_1)^{1-s}. \end{aligned}$$

7. D'après la question 4, la fonction $\ln L_\mu$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intérieur de D_μ. Si $\lambda \in \mathring{D}_\mu$, alors

$$\ln L'_\mu(\lambda) = \frac{L'_\mu(\lambda)}{L_\mu(\lambda)} \quad \text{et} \quad \ln L''_\mu(\lambda) = \frac{L''_\mu(\lambda) L_\mu(\lambda) - L'_\mu(\lambda)^2}{L_\mu(\lambda)^2}$$

D'après la question 4, on a de plus,

$$L''_\mu(\lambda) L_\mu(\lambda) - L'_\mu(\lambda)^2 = \int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{\lambda x} \, \mu(dx) \int_{\mathbb{R}_+} e^{\lambda x} \, \mu(dx) - \left(\int_{\mathbb{R}_+} x e^{\lambda x} \, \mu(dx) \right)^2$$

qui est positif d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la mesure μ et aux fonctions $x \mapsto x e^{\lambda x/2}$ et $x \mapsto e^{\lambda x/2}$. Ainsi, $\ln L''_\mu$ est une fonction positive.

8. Méthode 1 : prendre le logarithme de l'inégalité obtenue à la question 6.

   Méthode 2 : $\ln L_\mu$ est convexe puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et que sa dérivée seconde est positive.